ÁLGEBRA LINEAL CON DERIVE 5

Francisco Cabo García

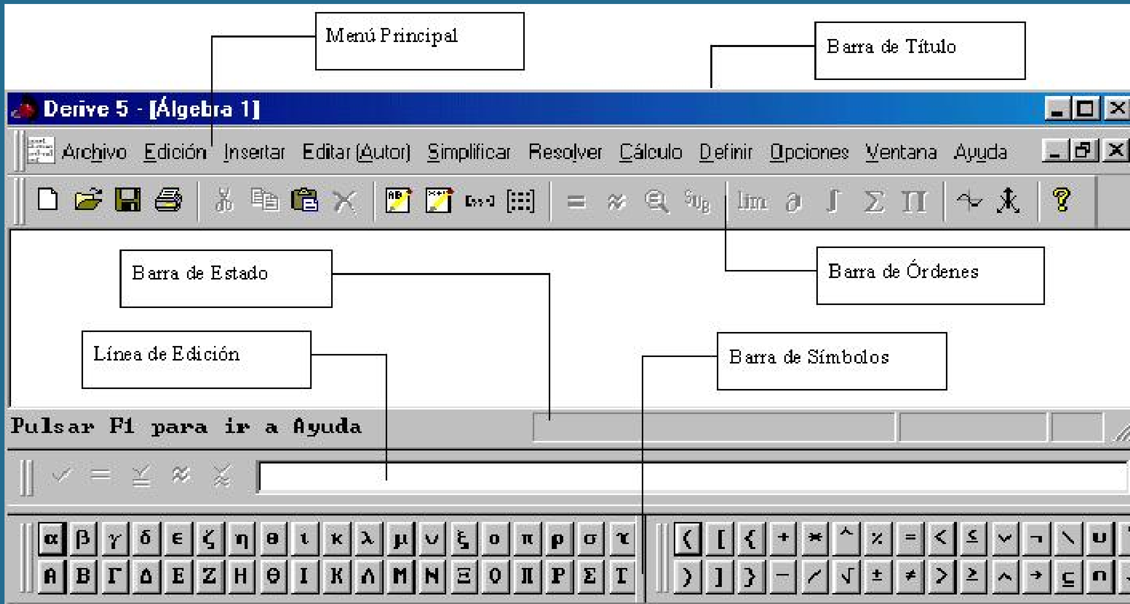
Bonifacio Llamazares Rodríguez

María Teresa Peña García

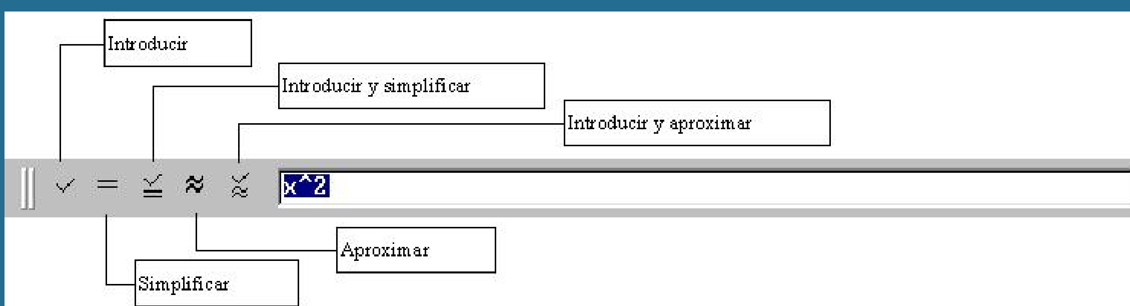
Dpto. de Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

Ventana de Álgebra



Línea de Edición



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Introducción

Operadores Fundamentales

^ (acento)

$* \quad /$

$+ \quad -$

$$4 * 3 \,\hat{}\, 2 \quad \begin{cases} 4 * (3^2) = 36 \\ (4 * 3)^2 = 144 \end{cases}$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Introducción

Operadores Fundamentales

^ (acento)

$*$ $/$

$+$ $-$

$$4*3\,\hat{}\,2 \quad\begin{cases} 4*(3^2)=36 \\ (4*3)^2=144 \end{cases}$$

Teclado	Ratón	Definición
$sqrt(a) \Longleftrightarrow$ $\boxed{Ctrl+q}\ a$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$
$a!$		$a!$
inf	∞	∞
$\#e \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Ctrl+e}}$	$\widehat{e}$	$ln(e)=1$
$\#i \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Ctrl+i}}$	$\widehat{i}$	$\sqrt{-1}$
pi$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Ctrl+p}}$	π	$\pi=3.1416$
$\#e\,\hat{}\,a \Leftrightarrow \exp(a) \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{Crtl+e}}\,\hat{}\,a$		e^a
$ln(a) \Leftrightarrow log(a)$		$ln(a)$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Espacios Vectoriales. Matrices y Determinantes.

- Definición de vectores y matrices
- Operaciones con matrices
- Definir un vector a partir de una función
- Resolución de ecuaciones

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Definición de vectores y matrices

- Definir un vector
  - ✍ *Editar (Autor)* $\rightarrow$ *Vector* o el botón 
  - ✍ $x := [x_1, \ldots, x_n]$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Definición de vectores y matrices

- Definir un vector

  ✍ *Editar (Autor)* → *Vector* o el botón

  ✍ $x := [x_1, \ldots, x_n]$

- Definir una matriz

  ✍ *Editar (Autor)* → *Matriz* o el botón

  ✍ $A := [a_{11}, \ldots, a_{1n}; a_{21}, \ldots, a_{2n}; \ldots; a_{m1}, \ldots, a_{mn}]$

  ✍ $A := [[a_1, \ldots, a_n]]$. Genera matrices con una única fila

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Operaciones con matrices

- Suma matricial

  ✍ $A + B$

- Producto matricial

  ✍ $A * B \Leftrightarrow AB$

  Se recuerda que la división matricial no existe. Al escribir A/B, DERIVE calcula $A * B^{-1}$

- Potencia n-ésima de una matriz

  ✍ $A\hat{}n$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- Inversa de una matriz

  Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es inversible o regular si existe $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ de forma que $AB = BA = I_n$. En este caso, B se llama matriz inversa de A y se denota por A^{-1}

  ✍ $A\hat{} - 1$

- Determinante de una matriz

  El determinante es una aplicación

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_{n\times n} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

  ✍ DET(A)

> A es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- Traspuesta de una matriz

  ✍ $A`$ (acento grave)

- Traza de una matriz

  ✍ TRACE(A)

- Rango de una matriz

  Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se denomina rango de A por filas (columnas) al número máximo de vectores fila (columna) linealmente independientes

  El rango de A es el orden del mayor menor no nulo de A

  ✍ RANK(A)

- Matriz identidad de orden n

  ✍ IDENTITY_ MATRIX(n)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Definir un vector a partir de una función

Crear un vector cuyos componentes son el resultado de evaluar una función de una variable que sigue una progresión aritmética:

- ✍ *Cálculo* → *Vector*. Antes de usar esta opción, la función debe estar seleccionada en la Ventana de Álgebra
- ✍ VECTOR(f, k, m, n, s). En este comando f es la función, k la variables, m el valor inicial, n el valor final y s la razón de la progresión aritmética; es decir, k toma los valores: $m, m+s, m+2s, \ldots \leq n$. Si m y/o s no aparecen, su valor por defecto es 1

Ejemplo:

$[1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100] \longrightarrow$ VECTOR($k\hat{}2, k, 1, 10, 1$)

$[16, 25, 36, 49, 64, 81, 100] \longrightarrow$ VECTOR($k\hat{}2, k, 4, 10, 1$)

$[16, 36, 64, 100] \longrightarrow$ VECTOR($k\hat{}2, k, 4, 10, 2$)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Resolución de ecuaciones

- Una ecuación algebraica

Representación gráfica $\rightarrow$ Raíces de forma aproximada

Sea f una función, al menos de x. La ecuación $f = 0$ puede resolverse respecto de esta variable de las siguientes formas:

✍ Escribir la ecuación y *Resolver* →*Expresión* o

- *Algebraico* --→ Mediante fórmulas
- *Cualquiera* --→ Todas las raíces de forma numérica
- *Numérico* --→ Una raíz en un intervalo determinado
- Dominio *Real* ↔ *Complejo*

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Resolución de ecuaciones

- Una ecuación algebraica

Representación gráfica $\rightarrow$ **Raíces de forma aproximada**

Sea f una función, al menos de x. La ecuación $f = 0$ puede resolverse respecto de esta variable de las siguientes formas:

✍ Escribir la ecuación y *Resolver →Expresión* o

- ∗ *Algebraico* ⇢ Mediante fórmulas
- ∗ *Cualquiera* ⇢ Todas las raíces de forma numérica
- ∗ *Numérico* ⇢ Una raíz en un intervalo determinado
- ∗ Dominio *Real* ↔ *Complejo*

✍ SOLVE(f, x). Equivalente al método *Algebraico* y el dominio *Complejo*

✍ APPROX(SOLVE(f, x)). Equivalente al método *Cualquiera* y el dominio *Complejo*

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- Sistema de Ecuaciones:

Sistema de Ecuaciones Lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

Sistema de Ecuaciones no Lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & b_m \end{array}\right\}$$

Elegir tantas variables a despejar como ecuaciones tenga el sistema

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

• Sistema de Ecuaciones Lineales

✍ Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$[a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m]$$

o

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \text{ and } \ldots \text{ and } a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

o

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \wedge \ldots \wedge a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

hacer clic en el botón , seleccionar las m variables a despejar y el método *Algebraico*

✍ SOLVE($sistema, [x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$). El 1^{er} argumento recoge el sistema de ecuaciones y el 2º las m variables a despejar

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

• Sistema de Ecuaciones Lineales

✍ Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$[a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m]$$

o

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \text{ and } \ldots \text{ and } a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

o

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \wedge \ldots \wedge a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

hacer clic en el botón, seleccionar las m variables a despejar y el método *Algebraico*

✍ SOLVE($sistema, [x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}]$). El 1^{er} argumento recoge el sistema de ecuaciones y el 2º las m variables a despejar

Las m ecuaciones no son independientes $\Rightarrow$ Sistema equivalente de menos ecuaciones. Todas independientes. $\Rightarrow \circlearrowright$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- Sistema de Ecuaciones no Lineales
  - ✍ Escribir el sistema de ecuaciones como:

$$[g_1(x_1,\dots,x_n)=b_1,\dots,g_m(x_1,\dots,x_n)=b_m]$$

o

$$g_1(x_1,\dots,x_n)=b_1 \text{ and } \dots \text{ and } g_m(x_1,\dots,x_n)=b_m$$

o

$$g_1(x_1,\dots,x_n)=b_1\wedge\dots\wedge g_m(x_1,\dots,x_n)=b_m$$

hacer clic en el botón , seleccionar las m variables a despejar y el método *Cualquiera*

  - ✍ APPROX(SOLVE($sistema, [x_{i_1},\dots,x_{i_m}]$)). El 1^{er} argumento recoge el sistema de ecuaciones y el 2º las m variables a despejar

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Pantalla completa
Página 13 de 28
Regresar
Cerrar
Salir

Aplicaciones Lineales

- **Matrices asociadas a una aplicación lineal**
  Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, y $f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. La matriz asociada a f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ se denota por $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ y se obtiene como:

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (f(u_1)_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid f(u_n)_{\mathcal{B}'}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\boxed{f(x)_{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\, x_{\mathcal{B}}}$$

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{array}$$ es un isomorfismo

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Aplicaciones Lineales

- Matrices asociadas a una aplicación lineal

Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, y $f \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. La matriz asociada a f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ se denota por $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ y se obtiene como:

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (f(u_1)_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid f(u_n)_{\mathcal{B}'}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$\boxed{f(x)_{\mathcal{B}'} = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\, x_{\mathcal{B}}}$$

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{array} \quad \text{es un isomorfismo}$$

✍ Utilidades creadas con DERIVE

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Diagonalización

- Endomorfismos y matrices diagonalizables

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f \in \operatorname{End}(\mathcal{U})$. f es diagonalizable si y sólo si existe una base $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ es diagonal

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A es diagonalizable $\iff$ $\exists P, D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, P inversible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$

$$(f(u_1)_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid f(u_n)_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

$$\begin{array}{c} f(u_1)_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(u_n)_{\mathcal{B}} = (0, \ldots, \lambda_n) \end{array} \Rightarrow \forall i \in 1, \ldots, n \quad \boxed{f(u_i) = \lambda_i u_i}$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f \in \mathrm{End}\,(\mathcal{U})$

1. $u \in \mathcal{U}$, $u \neq 0_{\mathcal{U}}$ es un vector propio o autovector de f si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = \lambda u$
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio o autovalor de f si y sólo si existe $u \in \mathcal{U}$, $u \neq 0_{\mathcal{U}}$ tal que $f(u) = \lambda u$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f \in \text{End}(\mathcal{U})$

1. $u \in \mathcal{U}$, $u \neq 0_{\mathcal{U}}$ es un vector propio o autovector de f si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(u) = \lambda u$
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio o autovalor de f si y sólo si existe $u \in \mathcal{U}$, $u \neq 0_{\mathcal{U}}$ tal que $f(u) = \lambda u$

f es diagonalizable $\Longleftrightarrow$ existe alguna base de $\mathcal{U}$ formada por vectores propios de f

Toda base $\mathcal{B}$ en la que $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ sea diagonal está formada por vectores propios de f, y los valores propios son los elementos de la diagonal principal

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathcal{U}_{\mathcal{B}} \arrow[r, "D"'] \arrow[d, "P", "{\mathcal{M}\left(id_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\right)}"'] & \mathcal{U}_{\mathcal{B}} \\
\mathcal{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}} \arrow[r, "A", "{\mathcal{M}\left(f, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\right)}"'] & \mathcal{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}} \arrow[u, "P^{-1}", "{\mathcal{M}\left(id_{\mathcal{U}}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}\right)}"']
\end{tikzcd}
$$

$$P = \mathcal{M}\left(id_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\right) = \left((u_1)_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}} \;\middle|\; (u_2)_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; (u_n)_{\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}} \right)$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{M}\left(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}\right) & = & \mathcal{M}\left(id_{\mathcal{U}}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}\right) & \mathcal{M}\left(f, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\right) & \mathcal{M}\left(id_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}\right) \\
D & = & P^{-1} & A & P
\end{array}
$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Diagonalización de matrices

- Polinomio característico de A

  ✍ CHARPOLY(A). Devuelve el polinomio característico de A en potencias de w

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Diagonalización de matrices

- Polinomio característico de A

  ✍ CHARPOLY(A). Devuelve el polinomio característico de A en potencias de w

- Autovalores de A

  ✍ EIGENVALUES(A). Devuelve un vector con los diferentes autovalores de la matriz A pero sin especificar su multiplicidad. Para conocer la multiplicidad de cada autovalor, se calcula el polinomio característico y se factoriza mediante la opción *Simplificar→Factorizar*. Para matrices de orden superior a 4, generalmente DERIVE no puede encontrar los autovalores en forma algebraica (valor exacto); en tal caso, se pueden obtener los autovalores de forma numérica (valor aproximado) utilizando el botón 

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- Autovectores de A

  ✍ EXACT_EIGENVECTOR(A, w). Este comando devuelve el subespacio propio asociado al autovalor w, expresándolo como un vector donde las diferentes variables vienen referidas mediante $@1$, $@2$,... Debe utilizarse cuando el autovalor w se ha obtenido de forma algebraica (valor exacto). Para un autovalor obtenido de forma numérica (valor aproximado) devuelve el vector nulo

  ✍ APPROX_EIGENVECTOR(A, w). Cuando un autovalor no se puede calcular de forma algebraica y se obtiene un valor aproximado, w, de forma numérica, es posible obtener una aproximación a uno de sus autovectores utilizando este comando. Si dicho comando se emplea con un autovalor que se puede obtener de forma algebraica (valor exacto), el resultado no tiene por qué ser un autovector

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Formas Cuadráticas

- Clasificación de las Formas Cuadráticas
- Criterio de los valores propios
- Criterio de los menores principales
- Formas Cuadráticas restringidas

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Clasificación de las Formas Cuadráticas

Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática

1. Q es definida positiva (D^+) si y sólo si

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ \ \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow Q(\overline{x}) > 0$$

2. Q es definida negativa (D^-) si y sólo si

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ \ \overline{x} \neq \overline{0} \Rightarrow Q(\overline{x}) < 0$$

3. Q es semidefinida positiva (SD^+) si y sólo si

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ \ Q(\overline{x}) \geq 0 \text{ y } \exists\, \overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \overline{x}_0 \neq \overline{0}, \text{ tal que } Q(\overline{x}_0) = 0$$

4. Q es semidefinida negativa (SD^-) si y sólo si

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n \ \ Q(\overline{x}) \leq 0 \text{ y } \exists\, \overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \overline{x}_0 \neq \overline{0}, \text{ tal que } Q(\overline{x}_0) = 0$$

5. Q es indefinida (I) si y sólo si

$$\exists\, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R}^n \ \ Q(\overline{x}_1) > 0 \wedge Q(\overline{x}_2) < 0$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Criterio de los valores propios

- Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de $\mathcal{M}(Q, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})$, entonces:

1. Q es D^+ $\iff$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i > 0$
2. Q es D^- $\iff$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i < 0$
3. Q es SD^+ $\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i \geq 0 \text{ y} \\ \exists j \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_j = 0 \end{array} \right.$
4. Q es SD^- $\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i \leq 0 \text{ y} \\ \exists j \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_j = 0 \end{array} \right.$
5. Q es I $\iff$ $\exists i, j \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Criterio de los valores propios

- Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de $\mathcal{M}(Q, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})$, entonces:

  1. Q es $D^+ \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i > 0$
  2. Q es $D^- \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i < 0$
  3. Q es $SD^+ \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i \geq 0 \text{ y} \\ \exists j \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_j = 0 \end{cases}$
  4. Q es $SD^- \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_i \leq 0 \text{ y} \\ \exists j \in \{1, \ldots, n\} \;\; \lambda_j = 0 \end{cases}$
  5. Q es $I \iff \exists i, j \in \{1, \ldots, n\} \; \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$

- La aplicación de este criterio con DERIVE requiere:

  ✍ Utilidad creada con DERIVE

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Criterio de los valores propios

- Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de $\mathcal{M}(Q, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})$, entonces:

  1. Q es $D^+ \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i > 0$
  2. Q es $D^- \iff \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \lambda_i < 0$
  3. Q es $SD^+ \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \lambda_i \geq 0 \ \text{y} \\ \exists j \in \{1, \ldots, n\} \ \lambda_j = 0 \end{cases}$
  4. Q es $SD^- \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \lambda_i \leq 0 \ \text{y} \\ \exists j \in \{1, \ldots, n\} \ \lambda_j = 0 \end{cases}$
  5. Q es $I \iff \exists i, j \in \{1, \ldots, n\} \ \lambda_i > 0, \lambda_j < 0$

- La aplicación de este criterio con DERIVE requiere:

  ✍ Utilidad creada con DERIVE

  ✍ EIGENVALUES(A). Devuelve un vector con los diferentes autovalores de la matriz A

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Criterio de los menores principales

- Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ los menores principales de $A = \mathcal{M}(Q, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})$

1. Q es D^+ $\iff$ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$
2. Q es D^- $\iff$ $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n\Delta_n > 0$
3. Si $\Delta_n = \det A \neq 0$ y no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, entonces Q es I
4. Si $\Delta_n = \det A = 0$ y rg$A = p$, reordenando, si es necesario, hasta conseguir que el menor principal de orden p sea distinto de cero, con $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_p$ los menores principales de la nueva matriz, entonces:
   - 4.1. Q es SD^+ $\iff$ $\Delta'_1 > 0, \Delta'_2 > 0, \ldots, \Delta'_p > 0$
   - 4.2. Q es SD^- $\iff$ $\Delta'_1 < 0, \Delta'_2 > 0, \ldots, (-1)^p\Delta'_p > 0$
   - 4.3. En cualquier otro caso, Q es I

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Criterio de los menores principales

- Si $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ los menores principales de $A = \mathcal{M}(Q, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})$

1. Q es D^+ $\iff$ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$
2. Q es D^- $\iff$ $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0$
3. Si $\Delta_n = \det A \neq 0$ y no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, entonces Q es I
4. Si $\Delta_n = \det A = 0$ y $\operatorname{rg} A = p$, reordenando, si es necesario, hasta conseguir que el menor principal de orden p sea distinto de cero, con $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_p$ los menores principales de la nueva matriz, entonces:

   4.1. Q es SD^+ $\iff$ $\Delta'_1 > 0, \Delta'_2 > 0, \ldots, \Delta'_p > 0$

   4.2. Q es SD^- $\iff$ $\Delta'_1 < 0, \Delta'_2 > 0, \ldots, (-1)^p \Delta'_p > 0$

   4.3. En cualquier otro caso, Q es I

✍ Utilidad creada con DERIVE

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Formas Cuadráticas restringidas

Sean $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática, $A = \mathcal{M}(Q, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})$ y el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ $V = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid B\overline{x} = \overline{0}\}$, con $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y rg(B)$= m$

Al resolver el sistema $B\overline{x} = \overline{0}$, se obtienen m variables en función de las $n - m$ restantes. Sustituyendo en $Q(\overline{x})$, se transforma la forma cuadrática restringida $Q\,|_V$ en una forma cuadrática sin restricciones con menor número de variables $(n - m)$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Utilidades creadas con DERIVE

Cargar el fichero ALGEBRA.MTH, copiado con anterioridad en C:\DfW5\Users, mediante la opción *Archivo*→ *Leer* → *Utilidades*

- MAT_CAN($f, [x_1, \ldots, x_n]$). Devuelve la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases canónicas, siendo $[x_1, \ldots, x_n]$ el vector de variables
- MAT_AS($f, [x_1, \ldots, x_n], B, C$). Devuelve la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de dos bases, siendo $[x_1, \ldots, x_n]$ el vector de variables, B la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de partida y C la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de llegada

$$B = \begin{pmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ \ldots \\ \overline{u}_n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \ldots \\ \overline{v}_m \end{pmatrix}$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- APL_CAN$(A, [x_1, \ldots, x_n])$. Devuelve la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es A, siendo $[x_1, \ldots, x_n]$ el vector de variables de dicha aplicación
- APL_AS$(A, [x_1, \ldots, x_n], B, C)$. Devuelve la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de dos bases es A, siendo $[x_1, \ldots, x_n]$ el vector de variables de dicha aplicación, B la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de partida y C la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de llegada

✍ MAT_SIM($Q, [x_1, \ldots, x_n]$). Devuelve la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática Q, siendo $[x_1, \ldots, x_n]$ el vector de variables

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- MAT_SIM$(Q, [x_1, \ldots, x_n])$. Devuelve la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática Q, siendo $[x_1, \ldots, x_n]$ el vector de variables
- MENORES_PRINCIPALES(A). Devuelve un vector cuyos elementos son los menores principales de la matriz A
- MENORES_PRINCIP_REST(A, B). Devuelve un vector cuyos elementos son los $n - m$ últimos menores principales de la matriz orlada, siendo $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ la matriz de la forma cuadrática y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ la matriz de restricciones

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña