CÁLCULO CON DERIVE 5

Francisco Cabo García

Bonifacio Llamazares Rodríguez

María Teresa Peña García

Dpto. de Economía Aplicada (Matemáticas)

Universidad de Valladolid

Límites y contin.

Cálculo diferencial

Cálculo Integral

Utilidades

Límites y continuidad

- Funciones definidas a trozos
- Curvas de nivel de una función
- Límite de una función

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Funciones definidas a trozos

- Ejemplo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Definición con DERIVE:

  ✍ $f(x) := \text{IF}(\textit{condición, valor1, valor2})$. La función $f(x)$ queda definida por *valor1* cuando se cumple *condición*, y por *valor2* en caso contrario. Por ejemplo:
  $f(x) := \text{IF}(x \geq 0, x, -x)$ define la función valor absoluto, ABS(x)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Curvas de nivel de una función

- Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se define para cada $k \in \mathbb{R}$ la curva de nivel k de f como el conjunto

$$C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\} = f^{-1}(\{k\})$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Curvas de nivel de una función

- Dada $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se define para cada $k \in \mathbb{R}$ la curva de nivel k de f como el conjunto

$$C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\} = f^{-1}(\{k\})$$

- Cálculo con DERIVE:

  ✍ *Cálculo* → *Vector*. Antes de usar esta opción, la ecuación $f(x, y) = k$ debe estar seleccionada en la Ventana de Álgebra; además hay que escoger k como variable

  ✍ VECTOR($f(x, y) = k, k, m, n, s$). Crea un vector cuyas componentes son las curvas de nivel $m, m + s, m + 2s, \ldots,$ hasta el nivel n

Antes de dibujar las curvas con el comando PLOT hay que ejecutar **=** para obtener el vector explícitamente; o bien asegurarnos de que la opción *Opciones* → *Simplificar antes de Dibujar* está activada en la Ventana de Gráficas 2D

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límite de una función

- Para funciones de una variable:
  - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción *Cálculo* $\rightarrow$ *Límites* o el botón lim
  - ✍ LIM(f, x, x_0). Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0
  - ✍ LIM$(f, x, x_0, 1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la derecha
  - ✍ LIM$(f, x, x_0, -1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la izquierda

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Límite de una función

- Para funciones de una variable:
  - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción *Cálculo* → *Límites* o el botón lim
  - ✍ LIM(f, x, x_0). Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0
  - ✍ LIM$(f, x, x_0, 1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la derecha
  - ✍ LIM$(f, x, x_0, -1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la izquierda
- Para funciones de dos variables, los límites direccionales se calculan con el siguiente comando:
  - ✍ LIM2(f, x, y, x_0, y_0). Calcula el límite direccional cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ a lo largo de líneas rectas de pendiente @1, es decir, a través de cualquier recta que pasa por (x_0, y_0)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Cálculo diferencial

- Derivada de una función
- Gradiente de una función
- Matriz Hessiana
- Matriz Jacobiana
- Polinomios de Taylor de una función
- Funciones implícitas
- Funciones homogéneas

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Derivada de una función

- Para funciones de una variable:

  - Seleccionar la función y escoger la opción *Cálculo* → *Derivadas* o el botón ∂
  - DIF(f, x). Calcula la derivada de f respecto de la variable x
  - DIF(f, x, n). Calcula la derivada de orden n de f respecto de la variable x

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

- Para funciones de varias variables (derivadas parciales):
  - ✍ Reiterando el proceso el número de veces que sea necesario. Por ejemplo:

    $$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(x,y) \text{ se obtiene con } \mathsf{DIF}(\mathsf{DIF}(f(x,y),x,3),y,1)$$

  - ✍ Utilizando el comando DIF una sola vez, para lo cual se introducen como argumentos dos vectores: el primero contiene las variables respecto a las cuales se va a derivar mientras que el segundo indica el número de veces que se deriva cada una. Por ejemplo:

    $$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}(x,y,z) \text{ se obtiene con } \mathsf{DIF}(f(x,y,z),[x,y],[2,3])$$

Gradiente de una función

- Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\bar{a} \in \mathring{D}$. Si existen todas las derivadas parciales de f en $\bar{a}$, se define el vector gradiente de f en $\bar{a}$ como

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

- Cálculo con DERIVE:

  ✍ GRAD(f). Calcula el vector gradiente de f respecto de las tres variables x, y, z

  ✍ GRAD($f, [x_1, x_2, \ldots, x_n]$). Calcula el vector gradiente de f respecto de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Por ejemplo: GRAD($x\hat{\ }2 + y\hat{\ }2, [x, y]$) devuelve el vector $[2x, 2y]$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Matriz Hessiana

- Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\bar{a} \in \overset{\circ}{D}$, tales que f es de clase C^2 en alguna bola de centro $\bar{a}$. Se define la matriz Hessiana de f en $\bar{a}$ como:

$$\mathcal{H}f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(\bar{a}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(\bar{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(\bar{a}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

- Cálculo con DERIVE:

  ✍ Utilidad creada con DERIVE

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Matriz Jacobiana

- Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\bar{a} \in \mathring{D}$. Si f es diferenciable en $\bar{a}$, la matriz Jacobiana de f en $\bar{a}$ es la matriz asociada a la diferencial de f en $\bar{a}$ respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y R^m:

$$\mathcal{J}f(\bar{a}) = \mathcal{M}(df_{\bar{a}}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m})$$

Se puede comprobar que

$$\mathcal{J}f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$df_{\bar{a}}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Cálculo con DERIVE:

  ✍ JACOBIAN($f, [x_1, x_2, \ldots, x_n]$). Devuelve la matriz Jacobiana de la función f respecto de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Conviene destacar que f tiene que ser dada a través de un vector. Por ejemplo:

  Si $f(x,y) := x\hat{}2 + y\hat{}2$, entonces hay que escribir JACOBIAN($[f(x,y)], [x,y]$)

  Si $f(x,y) := [x\hat{}2 + y\hat{}2, x\hat{}2 - y]$, entonces hay que escribir JACOBIAN($f(x,y), [x,y]$)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Polinomios de Taylor de una función

Funciones de una variable

- Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^q y $a \in \mathbb{R}$. Se define el polinomio de Taylor de grado q de f en a como:

$$P_q(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + + \cdots + \frac{1}{q!} f^q(a)(x-a)^q$$

- Cálculo con DERIVE:
  - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción *Cálculo → Polinomios de Taylor*
  - ✍ TAYLOR(f, x, a, q). Calcula el polinomio de Taylor de grado q de la función f en el punto a

- Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^q y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Se define el polinomio de Taylor de grado q de f en $\bar{a}$ como:

$$P_q(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})\,(x_i - a_i) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\bar{a})\,(x_i - a_i)\,(x_j - a_j) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{q!}\sum_{i_1,\ldots,i_q=1}^{n} \frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_q}}(\bar{a})\,(x_{i_1} - a_{i_1})\cdots(x_{i_q} - a_{i_q})$$

Si $q = 2$

$$P_q(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a})\,(\bar{x} - \bar{a}) + \tfrac{1}{2}(\bar{x} - \bar{a})^t\,\mathcal{H}f(\bar{a})\,(\bar{x} - \bar{a})$$

- Cálculo con DERIVE:

✍ Utilidad creada con DERIVE

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Funciones implícitas

Existencia

- Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $(\bar{x}_0, y_0) \in D$. Si

  1. $f \in C^1(D)$
  2. $f(\bar{x}_0, y_0) = 0$
  3. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, y_0) \neq 0$

  entonces se puede garantizar la existencia de una función implícita g de clase $C^1(D)$, única, que muestra la dependencia de la variable y respecto de las variables $x_1, \ldots, x_n$ $(y = g(\bar{x}))$

Derivación

- Bajo las hipótesis anteriores: $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, g(\bar{x}))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, g(\bar{x}))}$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

- Cálculo con DERIVE

✍ IMP_DIF(f, x, y, n). Devuelve la derivada de orden n de la función implícita que se deduce de la ecuación $f = 0$, siendo x la variable independiente e y la dependiente. Este procedimiento sigue siendo válido aún cuando y dependa de más de una variable. Por ejemplo, dada la ecuación

$$x + y + z + cos(xyz) - 1 = 0$$

que nos define a z como función implícita de x e y, entonces:

IMP_DIF$(x + y + z + cos(xyz) - 1, x, z, 1)$ devuelve la derivada de primer orden de z con respecto a x

IMP_DIF$(x + y + z + cos(xyz) - 1, y, z, 2)$ devuelve la derivada de segundo orden de z con respecto a y

✍ Derivadas cruzadas: Utilidad creada con DERIVE

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Funciones homogéneas

- Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que f es homogénea de grado α si para cualesquiera $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ se verifica

$$f(\lambda\,\bar{x}) = \lambda^{\alpha}\,f(\bar{x})$$

- Cálculo con DERIVE

  ✍ Se halla $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ y se factoriza en función de λ

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

- Teorema de Euler

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces:

$$f \text{ homogénea de grado } \alpha \;\Leftrightarrow\; \bar{x}\cdot\nabla f(\bar{x}) = \alpha\, f(\bar{x}),\; \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Cálculo con DERIVE

✍ Se halla

$$\frac{(x_1,\ldots,x_n)\cdot\nabla f(x_1,\ldots,x_n)}{f(x_1,\ldots,x_n)}$$

Si el resultado es un número, la función es homogénea y su grado de homogeneidad es este valor

Si el resultado depende de alguna variable, entonces la función no es homogénea

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Cálculo integral

- Integral de una función
- Función Gamma de Euler
- Función Beta de Euler

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Integral de una función

- Para funciones de una variable:
  - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción *Cálculo → Integrales* o el botón ∫
  - ✍ INT(f, x). Calcula una primitiva de la función f respecto de la variable x
  - ✍ INT(f, x, a, b). Calcula la integral definida de la función f respecto de la variable x en el intervalo $[a, b]$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Integral de una función

- Para funciones de una variable:
  - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción *Cálculo* $\rightarrow$ *Integrales* o el botón $\int$
  - ✍ INT(f, x). Calcula una primitiva de la función f respecto de la variable x
  - ✍ INT(f, x, a, b). Calcula la integral definida de la función f respecto de la variable x en el intervalo $[a, b]$

DERIVE también permite representar el área de integración:

- ✍ PLOTINT(f, x, a, b). Visualiza el área comprendido entre el eje de abscisas y la gráfica de la función, en el intervalo $[a, b]$. Esta expresión se dibuja directamente si la opción *Opciones* $\rightarrow$ *Simplificar antes de Dibujar* está activada en la Ventana de Gráficas 2D. En caso contrario hay que ejecutar = antes de dibujarla

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

- Para funciones de dos y tres variables (integrales dobles y triples):
  - ✍ Reiterando la orden INT el número de veces que sea necesario. Por ejemplo:

$$\int_1^2 \left[\int_0^1 (x^3 + xy^2)\, dy \right] dx$$

se obtiene mediante INT(INT($x\hat{}3 + xy\hat{}2, y, 0, 1$), $x, 1, 2$)

  - ✍ AREA($x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, f(x,y)$) Calcula

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\, dy \right] dx$$

  - ✍ VOLUME($x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1, z_2, f(x,y,z)$) Calcula

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\, dz \right] dy \right] dx$$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Función Gamma de Euler

- $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{p-1}\, dx, \quad p > 0$
- Cálculo con DERIVE:

  ✍ $\Gamma(p)$

  ✍ GAMMA(p)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Función Gamma de Euler

- $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} x^{p-1}\, dx, \quad p > 0$
- Cálculo con DERIVE:

  ✍ $\Gamma(p)$

  ✍ GAMMA(p)

Función Beta de Euler

- $\beta(p,q) = \displaystyle\int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx, \quad p,q > 0$
- Cálculo con DERIVE:

  ✍ EULER_BETA(p, q)

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Utilidades creadas con DERIVE

Para su utilización es necesario cargar previamente, mediante la opción *Archivo* → *Leer* → *Utilidades*, el fichero CALCULO.MTH, copiado con anterioridad en la carpeta C:\DfW5\Users. Sólo es necesario realizar este proceso una vez en cada fichero de trabajo

- HESSIANA($f, [x_1, x_2, \ldots, x_n]$). Devuelve la matriz Hessiana de la función f de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- MULTITAYLOR($f, [x_1, x_2, \ldots, x_n], [a_1, a_2, \ldots, a_n], q$) Calcula el polinomio de Taylor de grado q ($q \leq 2$) de la función f, de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$
- IMP_DIF_CRUZ(f, x, y, z). Devuelve $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$, donde z está definida como función implícita de las variables x e y a partir de la ecuación $f = 0$

F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades