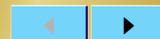




F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 1 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

CÁLCULO CON DERIVE 5

Francisco Cabo García
Bonifacio Llamazares Rodríguez
María Teresa Peña García

Dpto. de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Valladolid

Límites y continuidad

- Funciones definidas a trozos
- Curvas de nivel de una función
- Límite de una función



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 2 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Funciones definidas a trozos

- Ejemplo:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Definición con DERIVE:

 $f(x) := \text{IF}(\text{condición}, \text{valor1}, \text{valor2})$. La función $f(x)$ queda definida por *valor1* cuando se cumple *condición*, y por *valor2* en caso contrario. Por ejemplo:

$f(x) := \text{IF}(x \geq 0, x, -x)$ define la función valor absoluto, $\text{ABS}(x)$



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 3 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Curvas de nivel de una función

- Dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se define para cada $k \in \mathbb{R}$ la **curva de nivel k de f** como el conjunto

$$C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\} = f^{-1}(\{k\})$$



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 4 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Curvas de nivel de una función

- Dada $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se define para cada $k \in \mathbb{R}$ la **curva de nivel k de f** como el conjunto

$$C_k = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = k\} = f^{-1}(\{k\})$$

- Cálculo con DERIVE:

 **Cálculo** \rightarrow **Vector**. Antes de usar esta opción, la ecuación $f(x, y) = k$ debe estar seleccionada en la Ventana de Álgebra; además hay que escoger k como variable

 **VECTOR**($f(x, y) = k, k, m, n, s$). Crea un vector cuyas componentes son las curvas de nivel $m, m + s, m + 2s, \dots$, hasta el nivel n

Antes de dibujar las curvas con el comando PLOT hay que ejecutar  para obtener el vector explícitamente; o bien asegurarnos de que la opción **Opciones** \rightarrow **Simplificar antes de Dibujar** está activada en la Ventana de Gráficas 2D



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 4 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Límite de una función

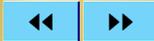
- Para funciones de una variable:
 - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción Cálculo → Límites o el botón `lim`
 - ✍ $LIM(f, x, x_0)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0
 - ✍ $LIM(f, x, x_0, 1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la derecha
 - ✍ $LIM(f, x, x_0, -1)$. Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la izquierda



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 5 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Límite de una función

- Para funciones de una variable:
 - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción **Cálculo** → **Límites** o el botón **lim**
 - ✍ **LIM**(f, x, x_0). Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0
 - ✍ **LIM**($f, x, x_0, 1$). Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la derecha
 - ✍ **LIM**($f, x, x_0, -1$). Calcula el límite de la función f cuando x tiende a x_0 por la izquierda
- Para funciones de dos variables, los límites direccionales se calculan con el siguiente comando:
 - ✍ **LIM2**(f, x, y, x_0, y_0). Calcula el límite direccional cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ a lo largo de líneas rectas de pendiente $\textcircled{1}$, es decir, a través de cualquier recta que pasa por (x_0, y_0)



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 5 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Cálculo diferencial

- Derivada de una función
- Gradiente de una función
- Matriz Hessiana
- Matriz Jacobiana
- Polinomios de Taylor de una función
- Funciones implícitas
- Funciones homogéneas



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 6 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Derivada de una función

- Para funciones de una variable:

➤ Seleccionar la función y escoger la opción Cálculo → Derivadas o el botón 

➤ $DIF(f, x)$. Calcula la derivada de f respecto de la variable x

➤ $DIF(f, x, n)$. Calcula la derivada de orden n de f respecto de la variable x



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 7 de 23

Regresar

Cerrar

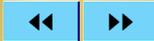
Salir



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 8 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

- Para funciones de varias variables (derivadas parciales):

✍ Reiterando el proceso el número de veces que sea necesario.

Por ejemplo:

$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(x, y)$ se obtiene con `DIF(f(x, y), x, 3), y, 1)`

✍ Utilizando el comando DIF una sola vez, para lo cual se introducen como argumentos dos vectores: el primero contiene las variables respecto a las cuales se va a derivar mientras que el segundo indica el número de veces que se deriva cada una. Por ejemplo:

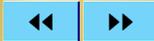
$\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}(x, y, z)$ se obtiene con `DIF(f(x, y, z), [x, y], [2, 3])`



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 9 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Gradiente de una función

- Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\bar{a} \in \overset{\circ}{D}$. Si existen todas las derivadas parciales de f en \bar{a} , se define el **vector gradiente de f en \bar{a}** como

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

- Cálculo con DERIVE:

📌 **GRAD(f)**. Calcula el vector gradiente de f respecto de las tres variables x, y, z

📌 **GRAD($f, [x_1, x_2, \dots, x_n]$)**. Calcula el vector gradiente de f respecto de las variables x_1, x_2, \dots, x_n . Por ejemplo:

GRAD($x^2 + y^2, [x, y]$) devuelve el vector $[2x, 2y]$

Matriz Hessiana

- Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\bar{a} \in \overset{\circ}{D}$, tales que f es de clase C^2 en alguna bola de centro \bar{a} . Se define la **matriz Hessiana de f en \bar{a}** como:

$$\mathcal{H}f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

- Cálculo con DERIVE:

 Utilidad creada con DERIVE



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 10 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Matriz Jacobiana

- Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$, y $\bar{a} \in \overset{\circ}{D}$. Si f es diferenciable en \bar{a} , la **matriz Jacobiana de f en \bar{a}** es la matriz asociada a la diferencial de f en \bar{a} respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m :

$$\mathcal{J}f(\bar{a}) = \mathcal{M}(df_{\bar{a}}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m})$$

Se puede comprobar que

$$\mathcal{J}f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 11 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

En consecuencia

$$df_{\bar{a}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

• Cálculo con DERIVE:

📌 **JACOBIAN**($f, [x_1, x_2, \dots, x_n]$). Devuelve la matriz Jacobiana de la función f respecto de las variables x_1, x_2, \dots, x_n . Conviene destacar que f tiene que ser dada a través de un vector. Por ejemplo:

Si $f(x, y) := x^2 + y^2$, entonces hay que escribir **JACOBIAN**($[f(x, y)], [x, y]$)

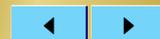
Si $f(x, y) := [x^2 + y^2, x^2 - y]$, entonces hay que escribir **JACOBIAN**($f(x, y), [x, y]$)



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 12 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Polinomios de Taylor de una función

Funciones de una variable

- Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^q y $a \in \mathbb{R}$. Se define el **polinomio de Taylor de grado q de f en a** como:

$$P_q(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) (x - a) + \frac{1}{2!} f''(a) (x - a)^2 + \dots + \frac{1}{q!} f^q(a) (x - a)^q$$

- Cálculo con DERIVE:
 - ✍ Escribir la función y seleccionar la opción **Cálculo \rightarrow Polinomios de Taylor**
 - ✍ **TAYLOR(f, x, a, q)**. Calcula el polinomio de Taylor de grado q de la función f en el punto a



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 13 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Funciones de varias variables

- Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^q y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Se define el polinomio de Taylor de grado q de f en \bar{a} como:

$$\begin{aligned} P_q(\bar{x}) &= f(\bar{a}) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) (x_i - a_i) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) (x_i - a_i) (x_j - a_j) + \cdots + \\ &+ \frac{1}{q!} \sum_{i_1, \dots, i_q=1}^n \frac{\partial^q f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_q}}(\bar{a}) (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdots (x_{i_q} - a_{i_q}) \end{aligned}$$

Si $q = 2$

$$P_q(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \nabla f(\bar{a}) (\bar{x} - \bar{a}) + \frac{1}{2} (\bar{x} - \bar{a})^t \mathcal{H}f(\bar{a}) (\bar{x} - \bar{a})$$

- Cálculo con DERIVE:

 Utilidad creada con DERIVE



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 14 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Funciones implícitas

Existencia

• Sean $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ abierto y $(\bar{x}_0, y_0) \in D$. Si

1. $f \in C^1(D)$

2. $f(\bar{x}_0, y_0) = 0$

3. $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, y_0) \neq 0$

entonces se puede garantizar la existencia de una función implícita g de clase $C^1(D)$, única, que muestra la dependencia de la variable y respecto de las variables x_1, \dots, x_n ($y = g(\bar{x})$)

Derivación

• Bajo las hipótesis anteriores:
$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, g(\bar{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, g(\bar{x}))}$$



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 15 de 23

Regresar

Cerrar

Salir



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 16 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

- Cálculo con DERIVE

📌 **IMP_DIF**(f, x, y, n). Devuelve la derivada de orden n de la función implícita que se deduce de la ecuación $f = 0$, siendo x la variable independiente e y la dependiente. Este procedimiento sigue siendo válido aún cuando y dependa de más de una variable. Por ejemplo, dada la ecuación

$$x + y + z + \cos(xyz) - 1 = 0$$

que nos define a z como función implícita de x e y , entonces:

IMP_DIF($x + y + z + \cos(xyz) - 1, x, z, 1$) devuelve la derivada de primer orden de z con respecto a x

IMP_DIF($x + y + z + \cos(xyz) - 1, y, z, 2$) devuelve la derivada de segundo orden de z con respecto a y

📌 Derivadas cruzadas: **Utilidad creada con DERIVE**

Funciones homogéneas

- Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que f es **homogénea de grado α** si para cualesquiera $\bar{x} \in D$ y $\lambda > 0$ se verifica

$$f(\lambda \bar{x}) = \lambda^\alpha f(\bar{x})$$

- Cálculo con DERIVE

✍ Se halla $f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ y se factoriza en función de λ



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 17 de 23

Regresar

Cerrar

Salir



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 18 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

- Teorema de Euler

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces:

$$f \text{ homogénea de grado } \alpha \Leftrightarrow \bar{x} \cdot \nabla f(\bar{x}) = \alpha f(\bar{x}), \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Cálculo con DERIVE

 Se halla

$$\frac{(x_1, \dots, x_n) \cdot \nabla f(x_1, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}$$

Si el resultado es un **número**, la función es homogénea y su grado de homogeneidad es este valor

Si el resultado **depende de alguna variable**, entonces la función no es homogénea

Cálculo integral

- Integral de una función
- Función Gamma de Euler
- Función Beta de Euler



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 19 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Integral de una función

- Para funciones de una variable:

✎ Escribir la función y seleccionar la opción Cálculo → Integrales o el botón 

✎ $\text{INT}(f, x)$. Calcula una primitiva de la función f respecto de la variable x

✎ $\text{INT}(f, x, a, b)$. Calcula la integral definida de la función f respecto de la variable x en el intervalo $[a, b]$



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 20 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Integral de una función

- Para funciones de una variable:

✎ Escribir la función y seleccionar la opción **Cálculo** → **Integrales** o el botón 

✎ **INT**(f, x). Calcula una primitiva de la función f respecto de la variable x

✎ **INT**(f, x, a, b). Calcula la integral definida de la función f respecto de la variable x en el intervalo $[a, b]$

DERIVE también permite representar el área de integración:

✎ **PLOTINT**(f, x, a, b). Visualiza el área comprendido entre el eje de abscisas y la gráfica de la función, en el intervalo $[a, b]$. Esta expresión se dibuja directamente si la opción **Opciones** → **Simplificar antes de Dibujar** está activada en la Ventana de Gráficas 2D. En caso contrario hay que ejecutar  antes de dibujarla



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 20 de 23

Regresar

Cerrar

Salir



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 21 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

- Para funciones de dos y tres variables (integrales dobles y triples):

➤ Reiterando la orden INT el número de veces que sea necesario. Por ejemplo:

$$\int_1^2 \left[\int_0^1 (x^3 + xy^2) dy \right] dx$$

se obtiene mediante $\text{INT}(\text{INT}(x^3 + xy^2, y, 0, 1), x, 1, 2)$

➤ **AREA**($x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, f(x, y)$) Calcula

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy \right] dx$$

➤ **VOLUME**($x, x_1, x_2, y, y_1, y_2, z, z_1, z_2, f(x, y, z)$) Calcula

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{y_1}^{y_2} \left[\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx$$

Función Gamma de Euler

- $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx, \quad p > 0$

- Cálculo con DERIVE:

- $\Gamma(p)$

- **GAMMA**(p)



F. Cabo

B. Llamazares

T. Peña

Límites y contin.

Cálculo diferencial

Cálculo Integral

Utilidades

Pantalla completa



Página 22 de 23

Regresar

Cerrar

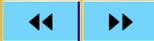
Salir



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 22 de 23

Regresar

Cerrar

Salir

Función Gamma de Euler

- $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx, \quad p > 0$

- Cálculo con DERIVE:

 $\Gamma(p)$

 GAMMA(p)

Función Beta de Euler

- $\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p, q > 0$

- Cálculo con DERIVE:

 EULER__BETA(p, q)

Utilidades creadas con DERIVE

Para su utilización es necesario cargar previamente, mediante la opción *Archivo* → *Leer* → *Utilidades*, el fichero **CALCULO.MTH**, copiado con anterioridad en la carpeta **C:\DfW5\Users**. Sólo es necesario realizar este proceso una vez en cada fichero de trabajo

- **HESSIANA**($f, [x_1, x_2, \dots, x_n]$). Devuelve la matriz Hessiana de la función f de variables x_1, x_2, \dots, x_n
- **MULTITAYLOR**($f, [x_1, x_2, \dots, x_n], [a_1, a_2, \dots, a_n], q$) Calcula el polinomio de Taylor de grado q ($q \leq 2$) de la función f , de variables x_1, x_2, \dots, x_n , en el punto (a_1, a_2, \dots, a_n)
- **IMP_DIF_CRUZ**(f, x, y, z). Devuelve $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y)$, donde z está definida como función implícita de las variables x e y a partir de la ecuación $f = 0$



F. Cabo
B. Llamazares
T. Peña

Límites y contin.
Cálculo diferencial
Cálculo Integral
Utilidades

Pantalla completa



Página 23 de 23

Regresar

Cerrar

Salir