Marque las respuestas verdaderas (sólo hay una por pregunta).

4.1 ¿Cuál de las siguientes aplicaciones es lineal?

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x) = (x, -x)$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = xy$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $f(x, y) = (x + y, \sqrt{x}, y)$.

4.2 Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación identidad. Entonces:

(a) $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$.

(b) $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$.

(c) Ninguna de las dos respuestas anteriores es verdadera.

4.3 Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación.

(a) Si f es lineal, entonces $\dim \operatorname{Ker} f = 0$.

(b) Si $\bar{x} = (2, 1, 2)$ y $f(2\bar{x}) = (4, 2, 4)$, entonces f es lineal.

(c) Si f es lineal, entonces $\operatorname{Im} f$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y $\dim \operatorname{Im} f \leq 3$.

4.4 Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ una aplicación. Entonces:

(a) $f(0_{\mathcal{U}}) = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad f$ lineal.

(b) f lineal $\quad \Rightarrow \quad \forall\, u, v \in \mathcal{U} \;\; f(u - v) = f(u) - f(v)$.

(c) f lineal $\quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathcal{U}}\}$.

4.5 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{U}$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) $f(u) = f(v) \quad \Rightarrow \quad u = v$.

(b) $f(u + v) = f(u - v) \quad \Rightarrow \quad v = 0_{\mathcal{U}}$.

(c) $f(u + v) = f(u - v) \quad \Rightarrow \quad v \in \operatorname{Ker} f$.

4.6 Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal y $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ un sistema libre de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

(a) $\{f(\bar{u}), f(\bar{v})\}$ es un sistema libre de $\mathbb{R}^2$.

(b) $\{f(\bar{u}), f(\bar{v}), f(\bar{w})\}$ es un sistema ligado de $\mathbb{R}^2$.

(c) $\{f(\bar{u}), f(\bar{v}), f(\bar{w})\}$ es un sistema libre de $\mathbb{R}^2$.

4.7 Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal. Entonces:

(a) $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es un sistema libre $\Rightarrow$ $\{f(\bar{u}), f(\bar{v})\}$ es un sistema libre.

(b) $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es un sistema ligado $\Rightarrow$ $\{f(\bar{u}), f(\bar{v})\}$ es un sistema ligado.

(c) S es un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ $f(S)$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^m$.

4.8 Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{U}$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ una aplicación lineal. Entonces:

(a) f biyectiva $\Rightarrow$ $f(\mathcal{B})$ base de $\mathcal{V}$.

(b) f inyectiva $\Rightarrow$ $f(\mathcal{B})$ base de $\mathcal{V}$.

(c) f suprayectiva $\Rightarrow$ $f(\mathcal{B})$ base de $\mathcal{V}$.

4.9 Si $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un endomorfismo y $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^3$ son tales que $\bar{x} = 2\bar{y} - \bar{z}$, entonces:

(a) $\{f(\bar{x}), f(\bar{y}), f(\bar{z})\}$ es un sistema libre.

(b) $\bar{x} \in \operatorname{Ker} f$.

(c) $f(\bar{x} + \bar{z}) = 2f(\bar{y})$.

4.10 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) $u \in \operatorname{Ker} f$ $\Rightarrow$ $f(u) \in \operatorname{Ker} f$.

(b) $f \circ f$ no es lineal.

(c) $f(0_{\mathcal{U}}) = 0_{\mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ f inyectivo.

4.11 Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ tales que $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} = n$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ una aplicación lineal. Entonces:

(a) f no inyectiva $\Rightarrow$ f suprayectiva.

(b) f inyectiva $\Rightarrow$ f biyectiva.

(c) f inyectiva $\Rightarrow$ f no suprayectiva.

4.12 Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal. Entonces:

(a) $\operatorname{rg} f = 0$ $\Rightarrow$ f inyectiva.

(b) f es suprayectiva.

(c) f no puede ser inyectiva.

4.13 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal tal que $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$. Entonces:

(a) f no puede ser inyectiva.

(b) $m \geq n$.

(c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.

4.14 Si $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal tal que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$, entonces:

(a) $m \leq n$.
(b) f es biyectiva.
(c) Si $m \neq n$, entonces existe algún vector $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ no nulo tal que $f(\bar{u}) = \bar{0}$.

4.15 Dadas la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente:

(a) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.
(b) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(c) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

4.16 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathcal{U}$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ es la matriz nula $\quad\Rightarrow\quad f$ es el endomorfismo nulo.
(b) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n \quad\Rightarrow\quad f = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$.
(c) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n \quad\Rightarrow\quad \mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

4.17 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathcal{U}$ y $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = [\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1}$.
(b) $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = I_n \quad\Rightarrow\quad f = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$.
(c) $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathcal{U}}, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n$.

4.18 Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal y $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, con $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

(a) Si $\operatorname{rg} A = 3$, entonces f es inyectiva.
(b) Si $\operatorname{rg} A \geq 3$, entonces f es suprayectiva.
(c) f no puede ser inyectiva.

4.19 La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (ax - ay + z, ax + ay + z)$:

(a) Es suprayectiva para cualquier $a \in \mathbb{R}$.
(b) Es suprayectiva para cualquier $a \in \mathbb{R}$ no nulo.
(c) No es suprayectiva para ningún $a \in \mathbb{R}$.

4.20 Sean $M, N \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si M, N son semejantes, entonces:

(a) $\det M = \det N$.
(b) M y N son inversibles.
(c) Existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $M = PN$.