Marque las respuestas verdaderas (sólo hay una por pregunta).

9.1 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x^2y$. Entonces:

(a) $\nabla f(1,0)$ y $\nabla f(0,1)$ son linealmente independientes.

(b) $\nabla f(1,0)$ y $\nabla f(1,1)$ son linealmente independientes.

(c) $\nabla f(1,1)$ y $\nabla f(0,1)$ son linealmente independientes.

9.2 La forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de la función $f(x,y) = x^2 \ln y$ en el punto $(0,3)$ es:

(a) Definida positiva.

(b) Indefinida.

(c) Semidefinida positiva.

9.3 La forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de la función $f(x,y,z) = \dfrac{y \ln x}{z}$ en el punto $(1,2,-1)$ es:

(a) Indefinida.

(b) Semidefinida positiva.

(c) Definida positiva.

10.1 Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable en $\bar{a}$, entonces:

(a) $df_{\bar{a}}(\bar{0}) = 0$.

(b) Las derivadas parciales de f son continuas en $\bar{a}$.

(c) Las derivadas parciales cruzadas de segundo orden de f son iguales en $\bar{a}$.

10.2 Sean $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Se verifica:

(a) Si existen todas las derivadas direccionales de f en $\bar{a}$, entonces f es diferenciable en $\bar{a}$.

(b) $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad f$ es diferenciable en $\bar{a}$.

(c) f diferenciable en $\bar{a} \quad \Rightarrow \quad df_{\bar{a}}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{x}$.

10.3 Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que posee todas sus derivadas parciales en un punto $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Entonces:

(a) f es continua en $\bar{a}$.

(b) $df_{\bar{a}}(\bar{h}) = \nabla f(\bar{a}) \cdot \bar{h}$ para cualquier $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$.

(c) No se puede garantizar que f sea diferenciable en $\bar{a}$.

10.4 Sean $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $\bar{a} \in D$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Se verifica:

(a) Si no existe $\nabla f(\bar{a})$, entonces f no es diferenciable en $\bar{a}$.
(b) Si f no es continua en $\bar{a}$, entonces no existe $\nabla f(\bar{a})$.
(c) Si f no es diferenciable en $\bar{a}$, entonces f no es continua en $\bar{a}$.

10.5 Indica cuál de las siguientes situaciones es imposible para una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$:

(a) Existen las derivadas parciales de f en un punto y f no es diferenciable en él.
(b) f es diferenciable en un punto y f no es continua en él.
(c) f es continua en un punto y f no es diferenciable en él.

10.6 Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $(0,0)$ y $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$, $\|\bar{v}\| = 1$, entonces:

(a) $D_{\bar{v}} f(0,0) = df_{(0,0)}(\bar{v})$.
(b) $df_{(0,0)}(-\bar{v}) = df_{(0,0)}(\bar{v})$.
(c) $df_{(0,0)}(\bar{v}) = 0$.

10.7 Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $\nabla f(1,0) = (0,1)$, entonces:

(a) $D_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} f(1,0) = \frac{3}{5}$.
(b) $D_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} f(1,0) = \frac{4}{5}$.
(c) No hay datos suficientes para calcular $D_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} f(1,0)$.

10.8 Sean $f(x,y) = x^2 + y$ y $\bar{u} = (1,-1)$. Entonces $D_{\bar{u}} f(0,1)$ vale:

(a) -1.
(b) $2x + 1$.
(c) 1.

10.9 Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$ y $\bar{v} = (v_1, v_2)$ una dirección. Entonces:

(a) No existe $D_{\bar{v}} f(0,0)$.
(b) $D_{\bar{v}} f(0,0) = 0$.
(c) $D_{\bar{v}} f(0,0) = v_1 + v_2$.

10.10 Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) tal que $\nabla f(x_0,y_0) = (1,-1)$. ¿En qué dirección se anula la derivada direccional de f en (x_0,y_0)?

(a) En ninguna.
(b) En $(1,0)$.
(c) En $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

10.11 Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Entonces:

(a) $D_{\bar{v}} f(x_0, y_0) = 0$ para todo $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\bar{v} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \ \Rightarrow \ D_{\bar{v}} f(x_0, y_0) = 0$.

(c) $\bar{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \ \Rightarrow \ D_{\bar{v}} f(x_0, y_0) = 0$.

10.12 La función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ verifica:

(a) $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

(b) f es continua en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en dicho punto.

(c) f es diferenciable en $(0, 0)$.

10.13 Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dos funciones diferenciables tales que $\nabla f(1, 1) = (-1, 1)$, $\mathcal{J} g(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $g(0) = (1, 1)$. Entonces:

(a) $\mathcal{J}(f \circ g)(0) = (-2)$.

(b) $\mathcal{J}(g \circ f)(1, 1) = (-2)$.

(c) $\mathcal{J}(f \circ g)(0) = (-1)$.

10.14 Si $z = u + \ln v$, con $u = \operatorname{sen}(x + 2y)$ y $v = 2^{x+y}$, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ es:

(a) $2\cos(x + 2y) + 2^{x+y} \ln 2$.

(b) $\cos(x + 2y) + 2^{x+y} \ln 2$.

(c) $\cos(x + 2y) + \ln 2$.

10.15 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Se define la función $F(x, y) = \dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ para $x \neq 0$. Se verifica que:

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{1}{x^2} f\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{1}{x} f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

(c) $x\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -F(x, y)$.

10.16 Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables, $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = u^2vx$, con $u = f(x, y)$ y $v = g(x)$. Entonces, para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se verifica:

(a) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = u^2v\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + g'(x)\right)$.

(b) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = u^2v$.

(c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = u^2v + 2uvx\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + u^2xg'(x)$.