Marque las respuestas verdaderas (sólo hay una por pregunta).

5.1 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}$ un endomorfismo y $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ bases de $\mathcal{U}$. Entonces:

(a) $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')$ diagonal $\quad\Rightarrow\quad$ f diagonalizable.

(b) f diagonalizable $\quad\Rightarrow\quad$ $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ diagonal.

(c) $\mathcal{M}(f,\mathcal{B},\mathcal{B})$ diagonal $\quad\Rightarrow\quad$ f diagonalizable.

5.2 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $u\in\mathcal{U}$ tal que $u\neq 0_{\mathcal{U}}$ y $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) u es vector propio de f $\quad\Rightarrow\quad$ $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\;\; f(u)=\lambda u$.

(b) $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\;\; f(u)=\lambda u$ $\quad\Rightarrow\quad$ u es vector propio de f.

(c) $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\;\; f(u)\neq\lambda u$ $\quad\Rightarrow\quad$ u no es vector propio de f.

5.3 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, $u\in\mathcal{U}$ y $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) $\exists\,\lambda\in\mathbb{K}\;\; f(u)\neq\lambda u$ $\quad\Rightarrow\quad$ u no es vector propio de f.

(b) $(\,u\neq 0_{\mathcal{U}}$ y $f(u)=0_{\mathcal{U}}\,)$ $\quad\Rightarrow\quad$ u es vector propio de f.

(c) u es vector propio de f $\quad\Rightarrow\quad$ $\forall\,\lambda\in\mathbb{K}\;\; f(u)=\lambda u$.

5.4 Si $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ es un endomorfismo no inyectivo, entonces:

(a) $f(\bar{x})=\bar{0}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\bar{x}=\bar{0}$.

(b) 0 es un valor propio de f.

(c) Las dos afirmaciones anteriores son falsas.

5.5 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $u,v\in\mathcal{U}$ y $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}$ un endomorfismo. Entonces:

(a) $u,v,f(u)$ son linealmente dependientes $\quad\Rightarrow\quad$ u es un vector propio de f.

(b) $u,v,f(u)$ son linealmente independientes $\quad\Rightarrow\quad$ u es un vector propio de f.

(c) $u,v,f(u)$ son linealmente independientes $\quad\Rightarrow\quad$ u no es vector propio de f.

5.6 Sea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&2\end{pmatrix}$. Entonces:

(a) $(0,0,0)$ es un vector propio de A.

(b) $(0,0,1)$ es un vector propio de A.

(c) $(1,1,1)$ es un vector propio de A.

5.7 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{U}$ un endomorfismo y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq\mu$, valores propios de f.

(a) Si u,v son vectores propios de f asociados a λ, entonces u,v son linealmente dependientes.

(b) Si u,v son vectores propios de f asociados a λ, entonces u,v son linealmente independientes.

(c) Si u es un vector propio de f asociado a λ y v es un vector propio de f asociado a μ, entonces u,v son linealmente independientes.

5.8 Sean $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable y $\lambda\in\mathbb{R}$ un valor propio de A. Entonces:

(a) $A-\lambda I_n$ es diagonal.

(b) $\det(A-\lambda I_n)=0$.

(c) $A-\lambda I_n$ es la matriz nula.

5.9 Sean $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ un valor propio de A. Entonces:

(a) $\forall\,\bar{v}\in\mathbb{R}^n \quad A\bar{v}=\lambda\bar{v}$.

(b) $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n)=n$.

(c) $\lambda=1 \quad\Rightarrow\quad \det(A-I_n)=0$.

5.10 Si $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces:

(a) $\forall\,\lambda\in\mathbb{R}\;\; A\neq\lambda I_n \quad\Rightarrow\quad A$ no es diagonalizable.

(b) $\det A=0 \quad\Rightarrow\quad A$ es diagonalizable.

(c) $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\;\; A=\lambda I_n \quad\Rightarrow\quad A$ es diagonalizable.

5.11 Si $A\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es tal que $\det A=0$, entonces:

(a) A no es diagonalizable.

(b) A es diagonalizable.

(c) 0 es un valor propio de A.

5.12 Sea $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por $f(1,0,0)=(1,0,0)$, $f(0,2,0)=(0,2,0)$ y $f(0,0,3)=(0,0,3)$. Entonces:

(a) $\mathcal{M}(f,C_{\mathbb{R}^3},C_{\mathbb{R}^3})=I_3$.

(b) f no es diagonalizable.

(c) f tiene tres valores propios distintos.

5.13 Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por $f(2,3,4)=(2,3,4)$, $f(1,0,2)=(2,0,4)$ y $f(3,1,5)=(0,0,0)$. Entonces:

(a) $f(0,0,0)=(3,1,5)$.
(b) f es diagonalizable.
(c) f es inyectivo.

5.14 Sean $\mathcal{B}=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un endormofismo tal que $f(\bar{u}_i)=i\cdot\bar{u}_i$ para todo $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Entonces:

(a) f no es diagonalizable.
(b) f es diagonalizable.
(c) No hay información suficiente para saber si f es o no diagonalizable.

5.15 Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\neq b$. Entonces la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ es:

(a) No inversible.
(b) Inversible.
(c) Diagonalizable.

5.16 Si $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un endomorfismo tal que $\lambda=3$ es su único valor propio, entonces:

(a) f es diagonalizable $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})=\mathbb{R}^n$.
(b) f es diagonalizable $\Rightarrow$ $\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})=\{\bar{0}\}$.
(c) f no es diagonalizable.

5.17 Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces:

(a) A y B no son semejantes.
(b) A y B no tienen el mismo polinomio característico.
(c) A y B no tienen rango máximo.

5.18 Sean $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces:

(a) A y B son diagonalizables $\Rightarrow$ $A+B$ es diagonalizable.
(b) A es diagonalizable y $\det A\neq 0$ $\Rightarrow$ A^{-1} es diagonalizable.
(c) A no es simétrica $\Rightarrow$ A no es diagonalizable.