Marque las respuestas verdaderas (sólo hay una por pregunta).

6.1 Sea $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

(a) $Q(-3\bar{x}) + Q(\bar{x}) = 10Q(\bar{x})$ para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

(b) $Q(\bar{x}) \neq Q(-\bar{x})$ para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$, $\bar{x} \neq \bar{0}$.

(c) $Q(-3\bar{x}) + Q(\bar{x}) = Q(-2\bar{x})$ para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

6.2 Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

(a) $\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; Q(\bar{x}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ es semidefinida positiva.

(b) $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; Q(\bar{x}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ es semidefinida positiva.

(c) Q es definida positiva $\quad \Rightarrow \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; Q(\bar{x}) \geq 0$.

6.3 Si $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, entonces:

(a) $\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \neq \bar{0}$, $Q(\bar{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ es semidefinida positiva.

(b) Q es semidefinida positiva $\quad \Rightarrow \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; Q(\bar{x}) \geq 0$.

(c) $\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; Q(\bar{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ es definida positiva.

6.4 Sea $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces:

(a) Q es definida positiva $\quad \Rightarrow \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \;\; Q(\bar{x}) > 0$.

(b) Q es indefinida $\quad \Rightarrow \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n - \{\bar{0}\} \;\; Q(\bar{x}) \neq 0$.

(c) Q es definida negativa $\quad \Rightarrow \quad \alpha Q$ es definida negativa si $\alpha > 0$ y αQ es definida positiva si $\alpha < 0$.

6.5 Sea $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $Q(1,1) = 1$ y $Q(1,0) = 0$. Entonces:

(a) Q no puede ser definida negativa.

(b) Q es semidefinida positiva.

(c) Q puede ser definida positiva.

6.6 Sea $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática que verifica $Q(1,2,0) = 3$, $Q(3,4,2) = -1$ y $Q(2,6,1) = 0$. Entonces:

(a) Q es indefinida.

(b) Q es semidefinida positiva y semidefinida negativa.

(c) No existe Q que verifique las condiciones mencionadas.

6.7 Si $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática que verifica $Q(0,1,1) = 0$ y $Q(2,2,3) > 0$, entonces:

(a) Q es semidefinida positiva.
(b) Q es semidefinida positiva o indefinida.
(c) Q es definida positiva.

6.8 Sean $Q_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2$, dos formas cuadráticas definidas positivas. Entonces:

(a) $Q_1 - Q_2$ es indefinida.
(b) $-Q_1 - Q_2$ puede ser indefinida.
(c) $Q_1 + Q_2$ es definida positiva.

6.9 Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(\bar{x}) = \bar{x}^t A \bar{x}$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ los valores propios de A. Entonces:

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \quad \Rightarrow \quad Q$ es indefinida.
(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ no es indefinida.
(c) $\lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q$ es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

6.10 La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2$ es:

(a) Semidefinida positiva.
(b) Indefinida.
(c) Semidefinida negativa.

6.11 La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sqrt{2}\, x_1^2 + 2\sqrt{3}\, x_2^2 + 7x_3^2 + \sqrt{5}\, x_5^2$$

es:

(a) Indefinida.
(b) Definida positiva.
(c) Semidefinida positiva.

6.12 Si $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática indefinida y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial, entonces $Q|_V$:

(a) No puede ser definida positiva.
(b) Puede ser definida positiva.
(c) Es indefinida.

6.13 Sean $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y S_1, S_2 dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ tales que $Q|_{S_1}$ es definida positiva y $Q|_{S_2}$ es definida negativa. Entonces:

(a) Q es definida positiva.

(b) Q es definida negativa.

(c) Q es indefinida.

6.14 Si $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una forma cuadrática que verifica $Q(1,0) = Q(0,1) = 1$, entonces:

(a) Q es semidefinida positiva.

(b) Q es definida positiva.

(c) $Q|_{\langle(1,0)\rangle}$ es definida positiva.

6.15 Sean $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $V = \langle\bar{x}\rangle$ y $Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $Q(\bar{x}) \neq 0$. Entonces:

(a) $Q|_V$ es definida positiva o semidefinida positiva.

(b) $Q|_V$ es definida positiva o definida negativa.

(c) $Q|_V$ es indefinida.