Marque las respuestas verdaderas (sólo hay una por pregunta).

2.1 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $u, v, w \in \mathcal{U}$ vectores linealmente dependientes. Entonces:

(a) u es combinación lineal de v, w.

(b) u y v son linealmente independientes.

(c) Uno de los tres vectores es combinación lineal de los otros dos.

2.2 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $u, v, w \in \mathcal{U}$. Entonces:

(a) u, v, w son linealmente dependientes $\Rightarrow$ $\big(u \neq 0_{\mathcal{U}}$ o $v \neq 0_{\mathcal{U}}$ o $w \neq 0_{\mathcal{U}}\big)$.

(b) u, v, w son linealmente independientes $\Rightarrow$ $\big(u \neq 0_{\mathcal{U}}, v \neq 0_{\mathcal{U}}$ y $w \neq 0_{\mathcal{U}}\big)$.

(c) $\big(u \neq 0_{\mathcal{U}}, v \neq 0_{\mathcal{U}}$ y $w \neq 0_{\mathcal{U}}\big)$ $\Rightarrow$ u, v, w son linealmente independientes.

2.3 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $u, v, w \in \mathcal{U}$. Entonces:

(a) $\{u, v\}$ es sistema libre $\Rightarrow$ w es combinación lineal de u y v.

(b) $\{u, v, w\}$ es sistema libre $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ es sistema libre.

(c) $0u + 0v + 0w = 0_{\mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $\{u, v, w\}$ es sistema ligado.

2.4 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathcal{U}$. Entonces:

(a) u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes $\Rightarrow$ u_1, u_2, u_3, u_4 son linealmente independientes.

(b) u_1, u_2, u_3, u_4 son linealmente independientes $\Rightarrow$ u_1, u_2, u_4 son linealmente independientes.

(c) u_1, u_2, u_3, u_4 son linealmente dependientes $\Rightarrow$ u_1, u_3, u_4 son linealmente dependientes.

2.5 Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ es un sistema libre de un espacio vectorial $\mathcal{U}$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces:

(a) $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n, 0_{\mathcal{U}}\}$ es un sistema ligado.

(b) $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ es un sistema ligado.

(c) $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, 0_{\mathcal{U}}\}$ es un sistema libre.

2.6 Si $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $u, v, w \in \mathcal{U}$ verifican $w = u + v$, entonces:

(a) $w = 0_{\mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ es un sistema ligado.

(b) $w \neq 0_{\mathcal{U}}$ $\Rightarrow$ $\{u, v\}$ es un sistema libre.

(c) $\{u, v\}$ es un sistema ligado.

2.7 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $u, v \in \mathcal{U}$ linealmente independientes. Entonces:

(a) $2u, 2v$ son linealmente dependientes.

(b) $u, u+v, u-v$ son linealmente independientes.

(c) $u, u+v, u-v$ son linealmente dependientes.

2.8 Sean $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Entonces:

(a) $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es un sistema ligado.

(b) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ no es una base de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{0} \quad \Rightarrow \quad \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es un sistema libre.

2.9 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $u, v, w \in \mathcal{U}$. Entonces:

(a) $\{u, v\}$ es un sistema libre $\quad \Rightarrow \quad \{u, v, w\}$ es un sistema ligado.

(b) $\{u, v\}$ es un sistema ligado $\quad \Rightarrow \quad \{u, v, w\}$ es un sistema ligado.

(c) $\{u, v, w\}$ es un sistema libre $\quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{U} = 3$.

2.10 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ una base de $\mathcal{U}$ y $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ un sistema generador de $\mathcal{U}$. Entonces:

(a) S es un sistema ligado $\quad \Rightarrow \quad \dim \mathcal{U} = 3$.

(b) S es un sistema ligado.

(c) S es un sistema libre.

2.11 Sean $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$. Entonces:

(a) Si $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es un sistema libre.

(b) Cualquier $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(c) $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es base de $\mathbb{R}^2$.

2.12 Si $\mathcal{U}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\dim \mathcal{U} = n$, entonces:

(a) El número de elementos de cualquier sistema generador de $\mathcal{U}$ es menor que n.

(b) Todo conjunto de n vectores linealmente independientes de $\mathcal{U}$ es una base de $\mathcal{U}$.

(c) El número de elementos de cualquier sistema libre de $\mathcal{U}$ es mayor que n.

2.13 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n y $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{U}$. Entonces:

(a) $r > n \quad \Rightarrow \quad \{u_1, \ldots, u_r\}$ es un sistema ligado.

(b) $r \geq n \quad \Rightarrow \quad \{u_1, \ldots, u_r\}$ es un sistema generador.

(c) $r < n \quad \Rightarrow \quad \{u_1, \ldots, u_r\}$ es un sistema libre.

2.14 En la base $\mathcal{B} = \{(1,3),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

(a) Las coordenadas de $(1,3)$ son $(1,3)$ $[(1,3)_{\mathcal{B}} = (1,3)]$.
(b) Las coordenadas de $(3,4)$ son $(1,1)$ $[(3,4)_{\mathcal{B}} = (1,1)]$.
(c) Las coordenadas de $(1,1)$ son $(3,4)$ $[(1,1)_{\mathcal{B}} = (3,4)]$.

2.15 Sea la base $\mathcal{B} = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Las coordenadas del vector $(1,0,0)$ en la base $\mathcal{B}$ son:

(a) $(0,1,0)$.
(b) $(0,0,1)$.
(c) $(1,0,0)$.

2.16 Las coordenadas del vector $(1,3,6)$ respecto de la base $\{(1,2,1),(-1,0,2),(2,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ son:

(a) $(1,2,1)$.
(b) $(1,3,6)$.
(c) $(1,2,-1)$.

2.17 Sean $\mathcal{U}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y S un subconjunto no vacío de $\mathcal{U}$. La siguiente condición garantiza que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$:

(a) $\lambda u + \mu v \in S$ para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $u, v \in S$.
(b) $0_{\mathcal{U}} \in S$.
(c) $(-\lambda)u \in S$ para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in S$.

2.18 ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ no es subespacio vectorial?

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$.
(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 1\}$.
(c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\} \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

2.19 Si $\{u,v,w\}$ es una base de un espacio vectorial $\mathcal{U}$ y S es un subespacio vectorial de $\mathcal{U}$ tal que $u, v \in S$ pero $w \notin S$, entonces:

(a) $\dim S = 2$.
(b) $\dim S = 1$.
(c) $\dim S = 3$.

2.20 Cualesquiera que sean los vectores $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$, se verifica:

(a) $\langle \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \rangle = \mathbb{R}^2$.
(b) $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ son linealmente dependientes.
(c) $\bar{u}$ es combinación lineal de $\bar{v}$ y $\bar{w}$.

2.21 Sea $S = \langle (1,3,1),(2,6,2) \rangle$. Entonces:

(a) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(2,6,2)\}$ es una base de S.

(c) $\{(1,3,1),(2,6,2)\}$ es una base de S.

2.22 Sea $S = \{(a, -a+b, a-b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Entonces:

(a) $\{(1, -1+b, 1-b)\}$ es una base de S para cualquier $b \in \mathbb{R}$.

(b) $\{(a, -a+1, a-1)\}$ es una base de S para cualquier $a \in \mathbb{R}$.

(c) $\{(1,-1,1),(1,0,0)\}$ es una base de S.