

# **DERIVE: UNA HERRAMIENTA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS**

Francisco Cabo García  
Bonifacio Llamazares Rodríguez  
María Teresa Peña García

Dpto. de Economía Aplicada (Matemáticas)  
Universidad de Valladolid

## **Resumen:**

---

En la sociedad actual se ha hecho imprescindible la utilización de herramientas informáticas tanto en el ámbito académico como en el profesional. Dentro de nuestro campo de docencia, las matemáticas, el empleo de recursos informáticos facilita al alumno la comprensión de los conceptos que se imparten en las clases teóricas, lo que permite un proceso de aprendizaje más eficiente. En este trabajo se detalla nuestra experiencia docente con el programa DERIVE en la asignatura *Matemáticas* de las licenciaturas en Economía y en Administración y Dirección de Empresas. En este contexto, se describe la organización de las prácticas efectuadas así como el contenido, el desarrollo y el proceso de evaluación de las mismas.

---

**Palabras clave:** Matemáticas, DERIVE, experiencia docente.

## 1. INTRODUCCIÓN

La implantación en nuestra Facultad de los nuevos planes de estudio en el curso académico 98-99 y el aumento del número de ordenadores disponibles hizo posible la realización de prácticas informáticas como parte de la asignatura *Matemáticas* de las licenciaturas en Economía y en Administración y Dirección de Empresas. Dentro de estas licenciaturas, el uso de herramientas que permitan la realización de cálculo simbólico así como la representación gráfica de funciones tiene una gran utilidad. Por lo que respecta a la asignatura *Matemáticas*, la posibilidad de experimentación mediante la utilización de paquetes informáticos va a facilitar al alumno la comprensión de los conceptos que se imparten en las clases teóricas. Por otra parte, consideramos que la Universidad, como ente dinamizador de la sociedad, debe preparar a sus estudiantes para su incorporación en el mercado laboral, donde las nuevas tecnologías juegan un papel cada vez más relevante.

De la amplia gama de paquetes informáticos relativos a las matemáticas hemos elegido el programa DERIVE. Esta elección no es arbitraria. La principal ventaja de este programa es su facilidad de manejo, debido a que la mayoría de las aplicaciones se pueden realizar de manera intuitiva mediante la utilización de menús y botones de la barra de herramientas sin necesidad de memorizar comandos. Esto lo convierte en un paquete matemático idóneo para los alumnos de primeros cursos de carrera. Asimismo, otro argumento a favor de su utilización es que algunos estudiantes ya lo han usado en el Bachillerato.

## 2. METODOLOGÍA

Las prácticas informáticas se realizan con la versión 4.06 del programa DERIVE y se enmarcan en la asignatura troncal *Matemáticas*, de las licenciaturas en Economía y en Administración y Dirección de Empresas. El contenido de las prácticas es “autosuficiente” en el sentido de que no son precisos conocimientos previos de informática por parte del alumno. Para un mejor seguimiento de las clases por parte de los estudiantes, hemos elaborado una guía dividida en tres capítulos. El primero describe los menús y los botones de cada una de las ventanas del programa. Los dos capítulos siguientes se dedican al estudio de cada uno de los bloques en que se divide la

asignatura: Álgebra y Cálculo. Asimismo, se han programado algunas funciones para facilitar la resolución de determinados ejercicios.

Durante el presente curso académico se imparten clases a un total de ocho grupos correspondientes a las dos licenciaturas. En cada grupo se dan 10 horas de clase concentradas al final de cada cuatrimestre, una vez que los alumnos ya han adquirido los conocimientos teóricos necesarios. La duración de cada una de las clases será de dos horas. La razón fundamental para ello es que algunos de los alumnos no están muy familiarizados con el uso de ordenadores, por lo que parece más adecuado, para un mayor aprovechamiento del curso, que las clases no sean excesivamente cortas. En caso contrario se produciría una pérdida considerable de tiempo en recordar conocimientos ya vistos.

Las clases de cada grupo se imparten fuera de su horario lectivo, lo que permite una mayor flexibilidad a la hora de distribuir el tiempo de uso de las aulas informáticas. De este modo, los grupos que tienen clase por la mañana recibirán las prácticas de ordenador por la tarde y viceversa. No obstante, esto no repercute en una mayor carga lectiva para los alumnos.

Cada aula de informática dispone aproximadamente de 35 ordenadores por lo que es necesario, dado el elevado número de alumnos por grupo (entre 70 y 80), que cada ordenador sea compartido por dos o más alumnos.

Durante las clases hay dos profesores presentes en el aula con el fin de agilizar el desarrollo de las mismas. Uno de ellos se encarga de impartir la clase, mientras que el profesor de apoyo resuelve las dudas y problemas que se les puedan plantear a los alumnos.

Una vez concluidas las clases de cada cuatrimestre y antes de la realización del examen, se reserva el aula de informática durante un día para que los estudiantes puedan practicar con el programa. Durante estas tutorías, ayudamos a los alumnos con las cuestiones que se les puedan presentar.

### **3. CONTENIDO DE LAS PRÁCTICAS**

Como se ha comentado anteriormente, las prácticas se dividen en dos bloques, cada uno de los cuales se imparte al final de cada cuatrimestre. El primero está dedicado al

Álgebra Lineal y el segundo al Cálculo Diferencial e Integral. A continuación se describen los temas tratados en cada una de las cinco clases correspondientes a cada cuatrimestre.

### Primer cuatrimestre

#### ✓ 1ª Clase

Al comienzo de la clase se realiza una breve introducción al sistema operativo Windows 98 con el objetivo de que el alumno se familiarice con el entorno de ventanas, sea capaz de ejecutar la aplicación DERIVE y conozca la forma de organizar archivos. A continuación se entra en la ventana de Álgebra y se describe el funcionamiento del menú y de los botones de la barra de herramientas. Una vez descritos los elementos del programa, se explica como editar expresiones haciendo especial hincapié en los operadores fundamentales. Asimismo, se practican otras operaciones básicas tales como mover, reenumerar, borrar, recuperar, pegar y seleccionar expresiones y subexpresiones.

#### ✓ 2ª Clase

En la primera parte de la clase se enseña a escribir un vector y a extraer una componente del mismo. El siguiente paso consiste en introducir una matriz y explicar operaciones básicas (suma, resta, producto, traspuesta, potencia e inversa). Para facilitar el manejo continuado de las matrices, se les asocia un nombre, comentando que, de forma similar, se puede dar nombre a un vector, a una función o a cualquier otra expresión. El cálculo de determinantes permite mostrar a los alumnos como se utilizan funciones propias del programa DERIVE. Otros ejemplos similares son las funciones que permiten obtener traza y la matriz identidad. Especial atención merece la función que se utiliza para calcular el rango de una matriz, dado que para su utilización es preciso cargar previamente en la memoria del ordenador el fichero .MTH donde se encuentra definida. A continuación se muestra la función VECTOR, que permite evaluar la misma expresión varias veces en un sólo paso, cambiando únicamente el valor de una variable. Esta función presenta un especial interés pues a través de ella se pueden calcular, de forma sencilla, las curvas de nivel de una función. A partir de este momento se comienzan a resolver los ejercicios de las listas de

problemas que se facilitan a los alumnos de la asignatura al comienzo de cada cuatrimestre.

✓ **3ª Clase**

En primer lugar se explica la resolución de una ecuación a través del método algebraico y seguidamente, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Estos recursos son utilizados para el estudio de la dependencia e independencia lineal de vectores. Asimismo, se comenta la problemática que presenta el cálculo del rango de una matriz y la resolución de sistemas lineales cuando en su definición aparecen implicados parámetros.

✓ **4ª Clase**

La primera parte de la clase tiene como objetivo el estudio de aplicaciones lineales. En primer lugar se enseña a los alumnos a definir funciones con argumentos, de forma que puedan ser evaluadas. El siguiente paso es el cálculo de la matriz asociada a una aplicación lineal, tanto respecto a las bases canónicas como respecto a cualquier otro par de bases. De forma análoga se muestra el proceso inverso: conocida la matriz asociada a una aplicación lineal respecto a un par de bases, se calcula dicha aplicación. Para realizar estas tareas se utilizan las funciones MAT\_CAN, MAT\_AS, APL\_CAN y APL\_AS, recogidas en el apéndice. Para concluir con las aplicaciones lineales, se calcula el núcleo de una aplicación y se comenta como hallar la dimensión del núcleo y de la imagen.

El segundo tema a tratar en esta clase es la diagonalización de endomorfismos. Se explica como calcular el polinomio característico y los valores y vectores propios. Finalmente se obtiene la matriz diagonal asociada al endomorfismo en la base de autovectores.

✓ **5ª Clase**

La última clase de este cuatrimestre se centra en el estudio de formas cuadráticas. La matriz simétrica asociada a una forma cuadrática se obtiene a través de la función MAT\_SIM que se recoge en el apéndice. Para clasificar formas cuadráticas se utiliza, en primer lugar, el criterio de los valores propios. En el caso de formas cuadráticas con parámetros, para las que el método anterior habitualmente no es operativo, se emplea el método de los menores principales

utilizando la función MENORES\_PRINCIPALES que, como la anterior, aparece en el apéndice. Para terminar, se clasifican también formas cuadráticas restringidas resolviendo el sistema de restricciones y sustituyendo en la forma cuadrática inicial.

### Segundo cuatrimestre

#### ✓ 1ª Clase

Esta clase está dedicada a la resolución de ejercicios de topología euclídea. En primer lugar se explica el funcionamiento del menú y de los botones de la barra de herramientas correspondientes a las ventanas de gráficos en dos y en tres dimensiones. En estas ventanas se explica como representar gráficamente funciones, conjuntos de puntos y curvas de nivel, resaltando que la representación gráfica de una función permite conocer los puntos en los que ésta no está definida.

#### ✓ 2ª Clase

Se centra en el estudio de límites en una y en dos variables. Por lo que respecta a funciones de una variable, se explica como obtener tanto el límite de una función como los límites laterales. Asimismo, se muestra como la representación gráfica permite corroborar los valores obtenidos. Para las funciones de dos variables se estudian aquellos problemas para los cuales es posible comprobar que no existe límite. Cuando esto se pueda demostrar mediante límites direccionales (a través de rectas), se utilizará la función LIM2. También se les enseña a probar la inexistencia del límite cuando es preciso recurrir a direcciones polinómicas (parabólicas, cúbicas, etc.) para las que DERIVE no tiene definida una función. Esta clase finaliza explicando la resolución de una ecuación a través del método numérico, apoyándonos en la representación gráfica para establecer el intervalo de puntos en el que el programa busca la solución. Obviamente, la representación gráfica también permite encontrar el valor de la misma.

**✓ 3ª Clase**

Se explica el cálculo de derivadas de funciones de una y varias variables. En este último caso, para el cálculo de derivadas de orden mayor que uno, es posible utilizar la función DIF reiteradamente, o una sola vez pero con argumentos vectoriales. A continuación se muestra como obtener el gradiente, la matriz jacobiana y la matriz hessiana. Para el cálculo de esta última hemos programado la función HESSIANA, recogida en el apéndice. Finalmente se aplica lo estudiado en esta clase a la composición de funciones.

**✓ 4ª Clase**

La clase comienza con el cálculo del polinomio de Taylor de una función de una variable. Se representa gráficamente tanto la función como el polinomio que la aproxima, mostrando que, en general, la aproximación mejora a medida que aumenta el grado del polinomio. Para hallar el polinomio de Taylor de una función de varias variables hemos creado la función MULTITAYLOR, recogida en el apéndice.

A continuación se resuelven problemas relativos a funciones implícitas. Se realiza el cálculo de las derivadas con el objetivo de construir el polinomio de Taylor que aproxima la función implícita. Cuando la función implícita depende de más de una variable, para el cálculo de las derivadas cruzadas hemos programado la función IMP\_DIF\_CRUZ, que se muestra en el apéndice.

La clase termina con el estudio de funciones homogéneas. En el caso de funciones sencillas es posible determinar, a través de la definición, si son o no homogéneas y, en su caso, su grado de homogeneidad. No obstante, de forma general, se utilizará el teorema de Euler para realizar dicho estudio.

**✓ 5ª Clase**

El objetivo de esta clase es la resolución de ejercicios de Cálculo Integral. La primera parte se dedica al cálculo de primitivas y de integrales definidas. Por lo que respecta a estas últimas, se comenta que en algunos casos donde no es posible obtener la solución de forma exacta se puede encontrar el valor aproximado. En lo referente a integrales impropias, se explica que este último procedimiento sólo se puede utilizar cuando se conoce a priori que la integral es convergente. Asimismo, se muestra como la resolución de integrales múltiples

se reduce al cálculo sucesivo de varias integrales simples. La clase finaliza con el empleo de las funciones Gamma y Beta.

#### 4. EVALUACIÓN

Al finalizar las prácticas con DERIVE de cada uno de los cuatrimestres, se realiza un examen para evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes. Este examen representa el 10% de la calificación global de la asignatura. Para mitigar el problema de la masificación de las clases, se da la opción al alumno de conservar la nota de un curso académico a otro.

Para la realización de los exámenes y con la finalidad de que no haya más de un alumno por ordenador es necesario desdoblar los grupos.

El examen consiste en la resolución de un ejercicio similar a los que se han realizado durante las clases de prácticas. La prueba tiene una duración de una hora. Durante la primera media hora los alumnos resuelven el ejercicio planteado. Transcurrido este tiempo, los dos profesores presentes en el aula imprimen y guardan en un disquete cada uno de los exámenes. El examen impreso es devuelto a los alumnos para que lo firmen, siendo esta copia la que se utilizará para su calificación.

Durante la realización del ejercicio propuesto, los alumnos pueden consultar tanto la guía del DERIVE que hemos confeccionado, como los esquemas teóricos de la asignatura elaborados por otros profesores del departamento.

#### 5. CONCLUSIONES

La utilización de recursos informáticos permite un mayor acercamiento al alumno de asignaturas que, como *Matemáticas*, no gozan de muchas simpatías entre los estudiantes. Además, estas prácticas con ordenador se realizan durante el primer curso de carrera, lo cual redundará en una mayor destreza de los alumnos en las prácticas informáticas que deberán realizar en los sucesivos cursos a lo largo de su vida académica.

Por otra parte, la potencia de cálculo de los ordenadores permite resolver problemas que, por su complejidad, no es posible tratar en la pizarra. Como ejemplo se puede citar la representación gráfica de funciones, especialmente en tres dimensiones.



Por último, nos gustaría señalar que, como próxima línea de actuación, se pretenden establecer mecanismos de autoevaluación a través de internet por medio de los cuales el alumno pueda contrastar antes del examen su grado de conocimiento sobre la materia.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Consejería de Educación y Cultura de la Junta de Castilla y León (proyecto VA 30/01).

## 7. APÉNDICE

Las siguientes funciones, obtenidas del disquete que acompaña al libro de Sanz, Vázquez y Ortega (1998), han sido utilizadas para la realización de las prácticas del primer cuatrimestre:

- $\text{MAT\_CAN}(f, x, n)$ : Devuelve la matriz asociada a la aplicación lineal  $f$  respecto de las bases canónicas, siendo  $x$  el vector de variables y  $n$  la dimensión del espacio de partida.
- $\text{MAT\_AS}(f, x, b, c)$ : Devuelve la matriz asociada a la aplicación lineal  $f$  respecto de dos bases, siendo  $x$  el vector de variables,  $b$  la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de partida y  $c$  la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de llegada.
- $\text{APL\_CAN}(a, x)$ : Devuelve la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es  $a$ , siendo  $x$  el vector de variables de dicha aplicación.
- $\text{APL\_AS}(f, x, b, c)$ : Devuelve la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de dos bases es  $a$ , siendo  $x$  el vector de variables de dicha aplicación,  $b$  la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de partida y  $c$  la matriz cuyas filas son los vectores de la base del espacio de llegada.
- $\text{MAT\_SIM}(q, x)$ : Devuelve la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática  $q$ , siendo  $x$  el vector de variables.
- $\text{MENORES\_PRINCIPALES}(a)$ : Devuelve un vector cuyos elementos son los menores principales de la matriz  $a$ .

A continuación se detallan las funciones que hemos programado para ser utilizadas en el segundo cuatrimestre:

- HESSIANA ( $f$ ): Devuelve la matriz Hessiana de la función  $f$ .
- MULTITAYLO R( $f, [x_1, x_2, \dots, x_m], [x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0], n$ ): Calcula el polinomio de Taylor de grado  $n$  ( $n \leq 2$ ) de la función  $f$ , de variables  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , en el punto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ .
- IMP\_DIF\_CRUZ( $f, x, y, z$ ): Devuelve  $\frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y}$ , donde  $z$  está definida como función implícita de las variables  $x$  e  $y$  a partir de la ecuación  $f = 0$ .

## 8. BIBLIOGRAFÍA

GETAN, J., POCIELLO, E. y VAREA, J. (1994): Problemas de matemáticas aplicados a la economía y la empresa: resueltos con ordenador. Ed. Ediciones S., Barcelona.

GARCÍA, A. y CORONADO, J.L. (1994): Prácticas de matemáticas con DERIVE. Ed. Alfonsa García, Madrid.

GONZÁLEZ, A. (1995): Matemáticas con DERIVE en la economía y la empresa. Ed. RA-MA, Madrid.

KUTZLER, B. (1996): Introduction to DERIVE for Windows. Ed. Bernhard Kutzler, Austria.

PÉREZ, C. y PAULOGORRÁN, C. (1998): Matemática práctica con DERIVE para Windows. Ed. RA-MA, Madrid.

SANZ, P., VÁZQUEZ, F.J. y ORTEGA, P. (1998): Problemas de Algebra lineal. Cuestiones, ejercicios y tratamiento en DERIVE. Ed. Prentice Hall Iberia, Madrid.