H. Fernández-Abascal
Marta Guijarro
José Luis Rojo
José Antonio Sanz

Ejercicios de cálculo de probabilidades

Resueltos y comentados

Ariel Matemática

Los autores poseen una larga trayectoria docente en el campo de la Economía Aplicada, en concreto, en Estadística y Econometría, en las Facultades de Ciencias Económicas y Empresariales. Hermenegildo Fernández-Abascal Teira es profesor titular de Escuela Universitaria, José Luis Rojo García es catedrático de Universidad y José Antonio Sanz Gómez es profesor titular de Universidad interino, todos ellos en el Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría) de la Universidad de Valladolid. Marta Guijarro Garvi ha sido profesora en este mismo Departamento y, en la actualidad, es profesora titular de Universidad en el Departamento de Economía de la Universidad de Cantabria.

Ejercicios de cálculo de probabilidades

Resueltos y comentados

Ariel

Ariel Matemática

R. 25.169

H. Fernández-Abascal,
Marta Guijarro,
José Luis Rojo,
y José Antonio Sanz

Ejercicios de cálculo de probabilidades

Resueltos y comentados

BIBLIOTECA FACULTAD DE
- 2 OCT. 1995
CIENCIAS ECONOMICAS EMPRESARIALES

Editorial Ariel, S.A.
Barcelona

Diseño cubierta: Nacho Soriano

1.ª edición: septiembre 1995

© 1995: H. Fernández-Abascal, Marta Guijarro,
José Luis Rojo y José Antonio Sanz

Derechos exclusivos de edición en español
reservados para todo el mundo:
© 1995: Editorial Ariel, S. A.
Córcega, 270 - 08008 Barcelona

ISBN: 84-344-0483-4

Depósito legal: B. 34.030 - 1995

Impreso en España

1995. — Talleres Gráficos DUPLEX, S. A.
Ciudad de Asunción, 26 - 08030 Barcelona

Ninguna parte de esta publicación, incluido el diseño
de la cubierta, puede ser reproducida, almacenada o transmitida
en manera alguna ni por ningún medio, ya sea eléctrico,
químico, mecánico, óptico, de grabación o de fotocopia,
sin permiso previo del editor.

ESTADIST Econ
E/Es 1209/0542
1>0 0 0 0 2 2 8 8 8 2

SUMARIO

Prefacio

1. Concepto de probabilidad
2. Probabilidad condicionada e independencia estadística
3. Variables aleatorias unidimensionales
4. Variables aleatorias n-dimensionales
5. Características de una variable aleatoria unidimensional
6. Características de una variable aleatoria n-dimensional
7. Funciones características
8. Modelos de distribuciones discretas
9. Modelos de distribuciones continuas univariantes
10. Distribuciones relacionadas con la normal
11. Distribución normal n-dimensional
12. Leyes de los grandes números y teorema del límite central

Anexo. Tablas estadísticas

PREFACIO

El libro que presentamos contiene 389 ejercicios y problemas resueltos de Cálculo de Probabilidades y de distribuciones de probabilidad. Los ejercicios se corresponden, salvo pequeñas excepciones, con los **Ejercicios propuestos** del libro de los mismos autores, **Cálculo de Probabilidades y Estadística** (1994), publicado, también, en esta colección.

Se presupone en este libro que el lector dispone de conocimientos básicos, a un nivel aplicado, de los resultados fundamentales de probabilidad, variables aleatorias, momentos y funciones características, distribuciones tipo, leyes de los grandes números y teorema del límite central. El nivel exigido puede concretarse más con el libro de teoría de los autores, al que anteriormente nos referimos.

La mayoría de los ejercicios y problemas abordan situaciones concretas; no obstante, algunos de ellos proponen demostrar resultados complementarios a los expuestos en el libro de teoría de los autores. Por tanto, algunos lectores, tal vez, habrán demostrado ya dichos resultados, mientras que otros, que desarrollen un curso más práctico, podrán encontrarlos excesivamente difíciles. Los ejercicios teóricos y prácticos más complicados han sido marcados en su inicio con el símbolo ¶, para que el lector que se encuentre en la segunda de las situaciones anteriores, pueda omitirlos o, en todo caso, no se desanime si encuentra su solución demasiado difícil.

Los problemas prácticos resueltos son, casi en su totalidad, originales, y el lector no los encontrará en otros libros de temática similar. La originalidad, con todo, se refiere más a la forma que al contenido, ya que el material sobre el que versan es el básico del Cálculo de Probabilidades, por lo que las variaciones son, necesariamente, limitadas.

Cada capítulo del libro se divide en dos partes; en la primera, se reúnen las principales definiciones y resultados utilizados en la resolución de los problemas. Estos resúmenes intentan servir únicamente de recordatorio, por lo que sugerimos al lector que disponga de un manual más amplio como libro de apoyo. Tras cada resumen, se enuncian los ejercicios correspondientes a la materia descrita.

La segunda parte de cada capítulo contiene las soluciones de todos los ejercicios propuestos en la primera. Se trata, con esta separación entre cada enunciado y su solución, de invitar al lector a que procure resolver cada ejercicio por sus propios medios, sin consultar previamente la solución del mismo. Vale más realizar uno o varios ensayos infructuosos que repetir mecánicamente la solución elaborada por los autores. Si el lector intenta resolverlos por sí mismo, descubrirá cuáles son sus carencias y su nivel de conocimientos, lo que le permitirá orientar sus estudios complementarios.

Las soluciones a los ejercicios no son esquemáticas, sino que están construidas de forma que su lectura enseñe al lector a progresar en el difícil mundo del razonamiento estadístico, y a evaluar tanto las potencialidades como las limitaciones de los resultados teóricos. Por ello, creemos conveniente que estudie la solución del ejercicio propuesta por los autores, no sólo el alumno cuyos intentos para llegar a ella hayan sido infructuosos, sino, también, aquel que lo haya conseguido; encontrará razonamientos diferentes a los que él ha empleado, y que pueden resultarle de utilidad en problemas semejantes. Los ejercicios de cada capítulo se han propuesto siguiendo el orden temático del resumen, y han sido ordenados de acuerdo con su grado de dificultad. Por este motivo, sugerimos al lector que procure respetar dicho orden a la hora de resolverlos.

Este libro está pensado como complemento a un manual de consulta en un curso cuatrimestral de Cálculo de Probabilidades, adecuándose su nivel al de los alumnos de los nuevos planes de estudio de las licenciaturas y diplomaturas en Economía y en Administración de Empresas de las Facultades y Escuelas Universitarias de Ciencias Económicas y Empresariales, para los cuales está inicialmente escrito, así como al de los estudiantes de licenciaturas o diplomaturas que necesiten de un bagaje adecuado de técnicas relacionadas con el Cálculo de Probabilidades (estadística, ciencias físicas, químicas y biológicas, ciencias sociales y humanas, ciencias médicas o ingenierías, entre otras).

Los autores poseen una larga trayectoria docente en el campo de la Economía Aplicada, en concreto, en Estadística y Econometría, en las Facultades de Ciencias Económicas y Empresariales. Hermenegildo Fernández-Abascal Teira es profesor titular de Escuela Universitaria, José Luis Rojo García es catedrático de Universidad, y José Antonio Sanz Gómez es profesor titular de Universidad interino, todos ellos en el Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría) de la Universidad de Valladolid. Marta Guijarro Garvi ha sido profesora en este mismo Departamento y, en la actualidad, es profesora titular de Universidad en el Departamento de Economía de la Universidad de Cantabria.

Valladolid y Santander, mayo de 1995

Capítulo 1

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

En Estadística se emplea la palabra experimento para designar todo acto que proporciona unos datos. Hay situaciones en que la realización sucesiva de un experimento en las mismas condiciones produce resultados distintos: son los llamados **experimentos aleatorios**. A los fenómenos que se manifiestan en dichos experimentos los llamaremos **fenómenos aleatorios**.

Dado un experimento aleatorio, llamamos **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles. Lo denotaremos por Ω, y a sus elementos, que llamaremos puntos muestrales, por ω.

Llamamos **suceso** a todo subconjunto A del espacio muestral ($A \subset \Omega$). El conjunto de todos los sucesos es el conjunto de **partes de** Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. De éstos, algunos sólo contendrán un punto muestral (**sucesos elementales**), mientras que otros contendrán más de un punto (**sucesos compuestos**). Cuando se realiza un experimento, el resultado observado es un punto muestral; afirmaremos, entonces, que ha ocurrido un suceso cualquiera, A, cuando se obtiene un punto muestral, ω, contenido en el mismo, esto es, $\omega \in A$.

De entre todos los sucesos existen dos especialmente singulares: el **suceso imposible**, $\emptyset$, y el **suceso seguro**, Ω.

De esta forma, se establece una correspondencia entre sucesos y conjuntos que permite trabajar con sucesos como se hace con los subconjuntos de un conjunto. Así, hablaremos de complementario de un suceso ($\overline{A}$), de uniones, intersecciones y diferencias de sucesos ($A \cup B$, $A \cap B$ y $A - B$), de un suceso contenido en otro ($A \subset B$) o de sucesos incompatibles, disjuntos o mutuamente excluyentes ($A \cap B = \emptyset$), sin más que trasladar las principales operaciones y relaciones entre conjuntos, al terreno de los sucesos.

En muchas ocasiones nos interesarán únicamente ciertos elementos de $\mathcal{P}(\Omega)$. Así, llamaremos **σ-álgebra de** BOOLE a un subconjunto α de $\mathcal{P}(\Omega)$, no vacío, que verifique:

1. El complementario de un suceso de α también pertenece a α.

2. La unión de una colección infinita numerable de sucesos de α también pertenece a α.

El par (Ω, α) se llama **espacio probabilizable**.

De estas propiedades se deduce que una σ-álgebra también contendrá a los sucesos $\emptyset$ y Ω, así como a cualquier intersección de sucesos de la misma.

Cuando los sucesos que queremos probabilizar no forman una σ-álgebra, interesa construir la **σ-álgebra engendrada** por dichos sucesos, que es la más pequeña que los contiene. En esa construcción se utiliza con frecuencia una *partición de Ω formada por átomos* de la σ-álgebra. Dada una σ-álgebra, α, se dice que un suceso, $A \in \alpha$, es un **átomo** de la misma, si no hay ningún suceso estrictamente contenido en él, salvo el suceso imposible; formalmente, $A \in \alpha$ es un átomo de α si

$$B \in \alpha, B \neq \emptyset, B \subset A \Rightarrow B = A \, .$$

Por otro lado, una **partición** de Ω es una familia finita de sucesos, $\{A_i\}_{i=1}^n$, disjuntos dos a dos y cuya unión es Ω. La partición se denomina numerable si la familia de sucesos no es finita, sino numerable.

Definamos, a continuación, una medida relativa y teórica de la ocurrencia de un suceso. Dado el espacio probabilizable (Ω, α), se llama **probabilidad** sobre α a una aplicación p, de α en $\mathbb{R}$, que verifica:

1. $p(A) \geq 0$, para todo $A \in \alpha$.
2. $p(\Omega) = 1$.
3. $p(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$, para toda colección infinita numerable de sucesos A_i de α, disjuntos dos a dos.

La terna (Ω, α, p) se denomina **espacio probabilístico**.

Algunas propiedades importantes de las probabilidades son:

1. $p(\emptyset) = 0$.
2. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, para todo $A \in \alpha$.
3. Para cualesquiera $A, B \in \alpha$ tales que $A \subset B$, $p(A) \leq p(B)$.
4. $0 \leq p(A) \leq 1$, para todo $A \in \alpha$.
5. Para cualesquiera $A, B \in \alpha$ tales que $A \subset B$, $p(B - A) = p(B) - p(A)$.
6. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ para cualesquiera $A, B \in \alpha$. Esta propiedad puede generalizarse a más de dos sucesos.

Con frecuencia se plantean experimentos aleatorios donde el conjunto de resultados es finito o infinito numerable. Podemos definir una **probabilidad en un espacio muestral finito o infinito numerable**, con $\alpha = \mathcal{P}(\Omega)$, como

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) \, ,$$

donde A es un suceso cualquiera y las probabilidades $p(\omega_i)$ verifican:

1. $p(\omega_i) \geq 0$, para todo $\omega_i \in \Omega$.
2. $\sum_i p(\omega_i) = 1$.

Cuando el espacio muestral es finito y equiprobable, se obtiene la conocida regla de LAPLACE:

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}$$

En general, el recuento de casos posibles o favorables se simplifica utilizando la Combinatoria. En el apéndice siguiente presentamos un resumen de las nociones fundamentales y seis ejercicios que ilustran estas técnicas de cálculo.

Apéndice: nociones de Combinatoria

• Se dispone de m elementos, $\{a_1, \ldots, a_m\}$, distintos. Se llaman **variaciones** de estos m elementos tomados de n en n $(n \leq m)$ a los distintos grupos de n elementos formados con los m, considerando dos grupos distintos si difieren en algún elemento o en el orden de los mismos.

En resumen, las variaciones se distinguen por:

— No se repiten los elementos.
— Influye el orden.
— En cada grupo no están incluidos todos los m elementos, salvo que $n = m$.

Se denota por $V_{m,n}$ al número de variaciones de m elementos tomados de n en n, siendo dicho número igual a

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1) \, .$$

• Dados m elementos distintos, $\{a_1, \ldots, a_m\}$, se llaman **permutaciones** de m elementos a todas las posibles ordenaciones de éstos.

En resumen, las permutaciones se distinguen por:

— No se repiten los elementos.
— Influye el orden.
— En cada grupo están incluidos todos los elementos.

Su número se denota por P_m, coincidiendo, evidentemente, con las variaciones de m elementos tomados de m en m. Es decir,

$$P_m = V_{m,m} = m \cdot (m-1) \cdots (m-m+1) = m! \, .$$

• Dados m elementos distintos, $\{a_1, \ldots, a_m\}$, se llaman **combinaciones** de m elementos tomadas de n en n $(n \leq m)$ a los distintos grupos de n elementos formados con los m, considerando dos grupos distintos si difieren en algún elemento.

En resumen, las combinaciones se distinguen por:

— No se repiten los elementos.
— No influye el orden.
— En cada grupo no están incluidos todos los m elementos, salvo que $n = m$.

Denotaremos por $C_{m,n}$ al número de combinaciones de m elementos tomados de n en n:

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!} .$$

• Se tienen m elementos distintos, $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos de n elementos formados con los m, repetidos o no, considerando dos grupos distintos si difieren en algún elemento, en el número de veces que se repite cada uno de ellos o en el orden de los mismos.

En resumen, distinguiremos las variaciones con repetición por:

— Se pueden repetir los elementos.
— Influye el orden.
— En cada grupo no tienen por qué estar incluidos todos los m elementos.

Designaremos por $VR_{m,n}$ el número de variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n:

$$VR_{m,n} = m^n .$$

• Dados m elementos, $\{a_1, \ldots, a_m\}$, entre los cuales hay α iguales entre sí y distintos al resto, β iguales entre sí y distintos al resto, ... y λ iguales entre sí y distintos al resto, se llaman **permutaciones con repetición** de estos m elementos a cada una de las distintas formas de ordenarlos.

En resumen, las permutaciones con repetición se distinguen por:

— En cada grupo están incluidos todos los elementos, repetidos el mismo número de veces.
— Influye el orden.

Se denota $P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda}$ al número de permutaciones con repetición:

$$P_m^{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} = \frac{m!}{\alpha! \cdot \beta! \cdots \lambda!} .$$

• Dados m elementos distintos, $\{a_1, \ldots, a_m\}$, se llaman **combinaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n a los distintos grupos de n elementos formados con los m, repetidos o no, considerando dos de ellos distintos si difieren en algún elemento o en el número de veces que se repiten los mismos.

En resumen, las combinaciones con repetición se distinguen por:

— Se pueden repetir los elementos.
— No influye el orden.
— En cada grupo no tienen por qué estar incluidos todos los m elementos.

Denotaremos por $CR_{m,n}$ al número de combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n, siendo dicho número:

$$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}.$$

Ejercicios propuestos

1.1. Hállese el número de sucesos contenidos en $\mathcal{P}(\Omega)$ si el espacio muestral Ω está formado por n puntos muestrales.

1.2. Demuéstrense las dos leyes de DE MORGAN:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

1.3. Compruébese que la intersección de toda colección finita de sucesos de una σ-álgebra pertenece a la misma.

1.4. Sean A y B dos sucesos de una σ-álgebra α. Demuéstrese que $A - B$ y $A \Delta B$ también pertenecen a α.

1.5. En una urna hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se considera el experimento aleatorio consistente en extraer una bola de la urna. Constrúyase la σ-álgebra generada por los sucesos A, *obtener múltiplo de tres* y B, *obtener número par.*

1.6. En una urna hay dos bolas blancas y tres negras. Las bolas blancas están numeradas del 1 al 2 y las bolas negras del 1 al 3. Si el experimento aleatorio consiste en sacar una bola de la urna y observar su número y color, constrúyase la σ-álgebra generada por los sucesos A, *salir bola blanca* y B, *salir número par.*

1.7. Una σ-álgebra está generada por una partición de Ω en m átomos. ¿Cuántos sucesos la componen?

1.8. Dado un espacio muestral Ω, pruébese que $\alpha_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ y $\alpha_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ son σ-álgebras.

1.9. Sea el espacio muestral $\Omega = \mathbb{N}$ y la σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$. Definimos la aplicación $p : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(A) = 1$ si 0 o 1 pertenecen a A, y $p(A) = 0$, en el resto de los casos. ¿Es p una probabilidad?

1.10. Asígnese a un experimento determinista una probabilidad que explique su comportamiento.

1.11. Razónese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si la suma de las probabilidades de dos sucesos es 1, dichos sucesos son complementarios uno de otro.

b) La igualdad $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ únicamente es cierta cuando $A \cap B$ no es un suceso imposible.

c) Los sucesos A, B y $A \cap B$ tienen las siguientes probabilidades: $p(A) = 0.25$, $p(B) = 0.5$ y $p(A \cap B) = 0.25$.

d) Si en un experimento ocurre el resultado $\omega \in A$, ocurre el suceso A y sólo él.

e) Un suceso y su contrario pueden tener probabilidades cuyo producto sea uno.

1.12. Sean A y B dos sucesos mutuamente excluyentes tales que $p(A) = 0.3$ y $p(B) = 0.6$. Calcúlense las probabilidades de los siguientes sucesos: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$.

1.13. Sean A y B dos sucesos. Demuéstrese que $p(A \cup B) \geq 1 - p(\overline{A}) - p(\overline{B})$.

1.14. Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = 0.3$, $p(B) = 0.6$ y $p(A \cap B) = 0.2$. Hállense las probabilidades de los siguientes sucesos: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$ y $A \Delta B$.

1.15. Sean A, B y C tres sucesos tales que $A \cap B \subset C$. Demuéstrese que

$$p(\overline{C}) \leq p(\overline{A}) + p(\overline{B}) \, .$$

1.16. Una estadística asegura que el 20 % de los habitantes de una ciudad compra habitualmente discos de música clásica, el 30 % de rock y el 15 % de jazz. Asimismo, el 5 % adquiere discos tanto clásicos como de rock, el 7 % de rock y de jazz, el 6 % clásicos y de jazz, y el 1 % de los tres tipos. Calcúlese:

a) Porcentaje de personas que compran música clásica y no de jazz.

b) Porcentaje de individuos que compran discos de rock, o bien de música clásica y de jazz.

c) Porcentaje de personas que compran sólo discos de jazz.

1.17. En una cierta empresa se ha elaborado un informe sobre las actividades que realizan los empleados en su tiempo libre. Dicho análisis arroja, entre otros, los siguientes resultados: el 30 % de los trabajadores practica algún deporte, el 25 % dedica varias horas semanales a la lectura y únicamente el 10 % tiene ambas aficiones.

a) Determínese el porcentaje de trabajadores que sólo practican deporte en sus ratos de ocio.

b) Calcúlese el porcentaje de empleados que ni leen ni realizan actividades deportivas.

1.18. Demuéstrese que las asignaciones de probabilidad a espacios muestrales finitos e infinitos numerables, que aplican a cada suceso elemental en valores no negativos cuya suma vale 1, verifican los tres axiomas de KOLMOGOROV.

1.19. En una urna hay un total de 12 bolas entre blancas y negras. Sabiendo que la probabilidad de sacar una bola negra es el triple de la de blanca, ¿cuántas bolas blancas y negras hay en la urna?

1.20. Se ha trucado un dado para que la probabilidad de cada cara sea proporcional a la puntuación de la misma. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el seis? ¿Y la de que salga par?

1.21. Sea $\Omega = \{0,1\}$ y $p : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que $p(i) = 0.3^i \cdot 0.7^{k-i}$, para $i = 0, 1$. Hállese el valor de k para que p sea una probabilidad.

1.22. Una recién casada está decorando el salón de su nueva residencia. Para ello cuenta, entre otros elementos, con tres cuadros que sólo puede colocar en cada una de las tres paredes disponibles al efecto. Una vez tomada la decisión sobre qué pared será la más adecuada para cada cuadro, y sin comunicársela a su marido, requiere su opinión. ¿Cuál es la probabilidad de que el esposo coincida con el criterio de su mujer en la disposición de al menos un cuadro?

1.23. Una pareja y tres amigos van al cine, sentándose juntos en la misma fila. A la salida acuden a un restaurante donde se sientan alrededor de una mesa. Si, tanto en el cine como en el restaurante se colocan aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad, en cada caso, de que los dos miembros de la pareja se sienten uno junto al otro?

1.24. En un concurso se ha producido un cuádruple empate y el jurado ha decidido otorgar un premio distinto, aunque de idéntico valor económico, a cada uno de los ganadores. Si los cuatro tienen preferencias diferentes y el reparto de premios se realiza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos queden satisfechos? ¿Y de que ninguno se lleve el premio deseado?

1.25. ¿Cuál es la probabilidad de que los cumpleaños de doce personas sean en meses diferentes? ¿Y la probabilidad de que los cumpleaños de seis personas sean en dos meses?

1.26. El encargado de mantenimiento de un hospital tiene que colocar placas con los nombres de cinco médicos en las puertas de sus correspondientes despachos. Como ha olvidado a quién pertenece cada uno, decide hacerlo aleatoriamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el doctor Fernández tenga bien colocada su placa?

b) Hállese la probabilidad de que exactamente dos médicos tengan identificados sus despachos correctamente.

1.27. Sea el espacio muestral $\Omega = \{1, 3, 5, \ldots\}$, formado por los números impares positivos. Se define la probabilidad de un suceso elemental como:

$$p(i) = k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \qquad i = 1, 3, 5, \ldots$$

a) ¿Qué valor tiene que tomar k?

b) Hállese la probabilidad del suceso $A = \{7, 9, 11, \ldots\}$.

1.28. Dado el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, se considera la aplicación p de $\mathcal{P}(\Omega)$ en $\mathbb{R}$ tal que $p(k) = k \cdot e^{-k}$ donde $k = 1, 2, \ldots$ ¿Es p una probabilidad? (Sugerencia: recuerde el lector que para sumar una serie aritmético-geométrica ilimitada, $S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/b_i$, donde a_i y b_i son los términos generales de una serie aritmética y geométrica, respectivamente, se calcula $S - \frac{1}{r} \cdot S$, donde r es la razón de la serie geométrica $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$.)

1.29. Asígnese una probabilidad a la σ-álgebra generada en el ejercicio 1.5.

1.30. La elección de un punto al azar en el intervalo $(0, 1)$ se puede describir probabilísticamente asignando a cada uno de los subintervalos abiertos de $(0, 1)$ un valor de probabilidad que coincida con su longitud: $p[(a, b)] = b - a$. Calcúlese la probabilidad de elegir un punto concreto, por ejemplo el 0.5. (Sugerencia: el punto 0.5 se puede poner como complementario de la unión de los subintervalos $(0, 0.5)$ y $(0.5, 1)$.)

1.31. Dado el espacio muestral $\Omega = (0, 1)$, se define la probabilidad de un subintervalo abierto (a, b) como el área determinada por dicho subintervalo y la recta $y = 1$. Hállese la probabilidad del subintervalo $(1/4, 1/2)$.

Ejercicios propuestos de Combinatoria

C.1. En una carrera en la que participan diez caballos, ¿de cuántas formas distintas se pueden establecer los cuatro primeros puestos?

C.2. Una empresa de reciente creación encarga a un diseñador gráfico la elaboración de su logotipo, indicándole que tiene que seleccionar exactamente tres colores de una lista de seis. ¿Entre cuántos grupos de colores puede decidirse el diseñador?

C.3. ¿Cuántas palabras distintas, de cuatro letras, se pueden formar con la palabra *musa*?

C.4. ¿De cuántas formas distintas se puede elegir al delegado y al subdelegado de una clase constituida por cincuenta alumnos?

C.5. Con once empleados, ¿cuántos comités de empresa de cinco personas pueden formarse?

C.6. Juan no puede salir a jugar hasta que ordene su cuarto. Una de las baldas de su estantería está destinada a sus quince cuentos. Si siempre dispone *Caperucita Roja* en el primer lugar y *Los tres cerditos* en el tercero, ¿cuántas colocaciones distintas puede realizar?

C.7. En el alfabeto Morse de puntos y rayas, ¿cuántos caracteres pueden formarse empleando a lo sumo tres signos?

C.8. Un supermercado organiza una rifa, siendo el premio una botella de cava para todas aquellas papeletas cuyas dos últimas cifras coincidan con las correspondientes al número premiado en el sorteo de Navidad. Suponiendo que todos los boletos tienen cuatro cifras y que existe un único boleto de cada numeración, ¿cuántas botellas repartirá el supermercado?

C.9. ¿Cuántas palabras distintas es posible formar con todas las letras de la palabra *estadística*?

C.10. En una tienda de regalos hay relojes de arena con cubetas de colores, no existiendo ninguna diferencia de forma entre las dos que componen cada reloj. Sabiendo que hay cuatro colores posibles y que el color de ambos recipientes puede coincidir, ¿cuántos modelos distintos de reloj de arena se venden en el establecimiento?

C.11. ¿Cuántas fichas tiene un dominó?

C.12. En una partida de parchís gana aquel jugador que antes consiga *meter en casa* sus cuatro fichas del mismo color. Si son cuatro los jugadores y la partida continúa hasta que todos hayan completado el recorrido, ¿cuántos órdenes distintos hay para la entrada de las dieciséis fichas en casa?

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 1.1.
Sea el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Contabilicemos todos los sucesos de Ω, clasificándolos por el número de puntos muestrales que los forman:

- Existe un único suceso que no contiene elemento alguno; obviamente, se trata del suceso imposible, $\emptyset$.
- Existen n sucesos que contienen un solo elemento: $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}$.

— Existen $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ sucesos que contienen k elementos, $(k = 2, 3, \ldots, n)$, ya que cada suceso es una combinación (no influye el orden) sin repetición formada por k elementos de los n pertenecientes a Ω.

Teniendo en cuenta que el número de sucesos con ningún elemento y con un elemento pueden entenderse como combinaciones sin repetición de n elementos tomados de cero en cero y de uno en uno, respectivamente, entonces, el número de sucesos de Ω es

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n},$$

que no es otra cosa que el desarrollo del binomio $(1+1)^n$. Por tanto, el número de sucesos contenidos en $\mathcal{P}(\Omega)$ es 2^n.

Ejercicio 1.2.

a) Demostremos esta igualdad entre conjuntos (sucesos) viendo que cada uno de ellos está contenido en el otro.

Por un lado, si tomamos un punto cualquiera, ω, de $\overline{A \cup B}$, es decir, $\omega \in \overline{A \cup B}$, entonces, $\omega \notin A \cup B$. Por tanto, ω no pertenece ni a A ni a B, o lo que es lo mismo, $\omega \in \overline{A}$ y $\omega \in \overline{B}$. En conclusión, ω ha de pertenecer a la intersección de $\overline{A}$ y $\overline{B}$, $\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$. De esta forma hemos probado que todo punto de $\overline{A \cup B}$ lo es, también, de $\overline{A} \cap \overline{B}$, esto es,

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$

Por otro lado, si $\omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$, implica que $\omega \notin A$ y $\omega \notin B$; por tanto, $\omega \notin A \cup B$ y, entonces, $\omega \in \overline{A \cup B}$. Así demostramos que

$$\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}\,.$$

La doble contención conduce a la igualdad entre los dos conjuntos:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$

b) Razonemos de la misma forma que en el apartado anterior. Así, si $\omega \in \overline{A \cap B}$, entonces, $\omega \notin A \cap B$, con lo cual, o bien no pertenece a A, o bien no pertenece a B (o no pertenece a ninguno). Por tanto, $\omega \in \overline{A}$ u $\omega \in \overline{B}$, es decir, $\omega \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Entonces,

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}\,.$$

Para probar la inclusión contraria, consideramos cualquier ω perteneciente a $\overline{A} \cup \overline{B}$. Entonces, $\omega \in \overline{A}$ u $\omega \in \overline{B}$, o lo que es igual, $\omega \notin A$ u $\omega \notin B$; de donde concluimos que ω no pertenece a $A \cap B$, es decir, $\omega \in \overline{A \cap B}$. Demostramos así la segunda contención,

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}\,,$$

con lo cual se cumple la igualdad.

Ejercicio 1.3.
Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una colección finita de sucesos, A_i, de una σ-álgebra α. Completemos esta colección con los sucesos $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$, tales que

$$A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset\,,$$

sucesos que están en α, pues el suceso imposible pertenece a cualquier σ-álgebra. Así,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \alpha,$$

por ser la intersección de una colección infinita numerable de sucesos de α.

Ejercicio 1.4.
En primer lugar, la diferencia de sucesos se define como

$$A - B = A \cap \overline{B}\,.$$

Como B pertenece a α, también pertenece $\overline{B}$. El resultado obtenido en el ejercicio anterior asegura, además, que $A \cap \overline{B}$ pertenece a α, por ser la intersección finita de sucesos de dicha σ-álgebra. Entonces,

$$A - B \in \alpha\,.$$

En segundo lugar, la diferencia simétrica de sucesos se define como

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)\,.$$

Obviamente, $A \cup B$ y $A \cap B$ pertenecen a α por ser, respectivamente, unión e intersección finitas de sucesos de α; entonces, $(A \cup B) - (A \cap B) \in \alpha$, por lo demostrado en la primera parte de este ejercicio. Consecuentemente,

$$A \Delta B \in \alpha\,.$$

Ejercicio 1.5.
El espacio muestral de este experimento aleatorio es $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Los sucesos disjuntos $A = \{3\}$ y $B = \{2, 4\}$ junto con el suceso $C = \{1\}$ constituyen los átomos de la σ-álgebra generada por A y B, esto es, la partición más pequeña conteniendo a $A - B$, $B - A$ y $A \cap B$ que, como A y B son disjuntos, equivale a la partición más pequeña de Ω conteniendo a A y B. Las uniones de ninguno, uno, dos o tres de estos átomos, forman los sucesos de la σ-álgebra:

$$\alpha = \{\emptyset, \{3\}, \{2, 4\}, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 4\}, \Omega\}\,,$$

σ-álgebra más pequeña que contiene a los sucesos A y B.

Ejercicio 1.6.
El espacio muestral Ω asociado a este experimento está formado por cinco puntos muestrales, las cinco bolas de la urna: ω_1, *uno y blanca*, ω_2, *dos y blanca*, ω_3, *uno y negra*, ω_4, *dos y negra*, y ω_5, *tres y negra*.

Entonces,

$$A = \{\omega_1, \omega_2\}$$

y

$$B = \{\omega_2, \omega_4\}.$$

Dado que ω_2 pertenece a los dos sucesos A y B, los átomos de la partición que genera la menor σ-álgebra que contiene a A y B son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega_1\}, \\ A_2 &= \{\omega_2\}, \\ A_3 &= \{\omega_4\} \quad \text{y} \\ A_4 &= \{\omega_3, \omega_5\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $A_1 = A - B$, $A_3 = B - A$ y $A_2 = A \cap B$, siendo A_4 el suceso que completa la partición.

Haciendo todas las posibles uniones de k átomos ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), se obtiene la σ-álgebra generada por A y B, formada por los sucesos:

$$\begin{aligned} &\emptyset, \\ &\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_4\}, \{\omega_3, \omega_5\}, \\ &\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_1, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_2, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \\ &\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \quad \text{y} \\ &\Omega. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7.
Sea α la σ-álgebra generada por los átomos $A_1, \ldots, A_m$. Cada uno de los sucesos de esta σ-álgebra estará formado por la unión de k átomos ($k = 0, 1, \ldots, m$). Razonando como en el ejercicio 1.1, el número de sucesos formados por la unión de k átomos es $C_{m,k} = \binom{m}{k}$. Entonces, el número de sucesos de α es

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{m} = (1+1)^m = 2^m.$$

Obsérvese que en el ejercicio 1.5 partíamos de 3 átomos obteniendo una σ-álgebra con $2^3 = 8$ sucesos y, en el ejercicio 1.6, resultaba una σ-álgebra con $2^4 = 16$ sucesos a partir de 4 átomos.

Ejercicio 1.8.
Obsérvese que $\alpha_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ está formada por dos sucesos de Ω verificando las dos propiedades que definen una σ-álgebra. Así, el complementario de un suceso de α_1 también pertenece a α_1; obviamente, tanto el complementario del suceso vacío, Ω, como el complementario de Ω, el suceso $\emptyset$, pertenecen a α_1.

Además, la unión de una colección infinita numerable de sucesos de α_1 también está en α_1; evidentemente, cualquier unión de sucesos de α_1, o bien es el suceso $\emptyset$ (si todos los sucesos de la unión son el suceso $\emptyset$), o bien es Ω (si al menos uno de los sucesos de la unión es Ω), sucesos ambos que pertenecen a α_1. Por tanto, $\alpha_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ es una σ-álgebra.

Para $\alpha_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ se verifican igualmente las dos propiedades que caracterizan a una σ-álgebra. Así, el complementario de cualquier suceso A de α_2 también pertenece a α_2, pues $\overline{A}$ es un subconjunto de Ω y, por tanto, $\overline{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Por otra parte, la unión de una colección infinita numerable de sucesos de α_2, subconjuntos de Ω, es un subconjunto de Ω y, consecuentemente, está en $\alpha_2 = \mathcal{P}(\Omega)$.

Entonces, $\alpha_2 = P(\Omega)$ también es una σ-álgebra.

Ejercicio 1.9.

La aplicación p, que asocia a cada suceso un número real, verifica las dos primeras propiedades que definen una probabilidad. Así, $p(A) \geq 0$, dado que $p(A)$ es 0 o 1, y $p(\Omega) = 1$, pues $\Omega = \mathbb{N}$ contiene tanto al 0 como al 1.

En cambio, no verifica la tercera propiedad, $p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$, para toda colección infinita numerable de sucesos A_i de α, disjuntos dos a dos. Por ejemplo, si $A_1 = \{0\}, A_2 = \{1\}$ y $A_3, A_4, \ldots$ son sucesos cualesquiera, todos ellos disjuntos dos a dos, $p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$, pero $\sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) = 2$, dado que $p(A_1) = p(A_2) = 1$ y $p(A_3) = p(A_4) = \cdots = 0$.

Por tanto, p no es una probabilidad.

Ejercicio 1.10.

A un experimento determinista (aquel que realizado sucesivamente bajo las mismas condiciones produce el mismo resultado) le asociamos el espacio muestral Ω formado por un único elemento, el único resultado posible: $\Omega = \{\omega\}$.

Obviamente, la σ-álgebra no puede ser otra que

$$\alpha = \{\emptyset, \Omega\},$$

única σ-álgebra que puede definirse a partir de Ω, y la probabilidad,

$$p(\emptyset) = 0 \quad \text{y} \quad p(\Omega) = 1.$$

Ejercicio 1.11.

a) Un ejemplo pondrá en evidencia la falsedad de esta afirmación. Si se lanza un dado normal, el espacio muestral, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, puede considerarse equiprobable; entonces, los sucesos A, *obtener par*, y B, *obtener un número mayor o igual que cuatro*, tienen ambos una probabilidad de 0.5. Por tanto, $p(A) + p(B) = 1$, pero dichos sucesos no son complementarios uno del otro.

b) Esta afirmación también es falsa. Utilizando el ejemplo anterior, para los sucesos A, *obtener par*, y C, *obtener impar*,

$$\begin{aligned} &p(A) = p(\{2, 4, 6\}) = 0.5, \\ &p(C) = p(\{1, 3, 5\}) = 0.5, \\ &p(A \cap C) = p(\emptyset) = 0 \qquad \text{y} \\ &p(A \cup C) = p(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

Evidentemente, se cumple la igualdad

$$p(A \cup C) = p(A) + p(C) - p(A \cap C),$$

siendo $A \cap C = \emptyset$, es decir, el suceso imposible.

c) Esta afirmación puede ser cierta. Si consideramos el espacio muestral, finito y equiprobable, $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, los sucesos $A = \{1\}$ y $B = \{1, 2\}$ cumplen dicha afirmación.

Ahora bien, esta afirmación no tiene por qué ser obligatoriamente cierta. En el mismo espacio, los sucesos $A = \{1\}$ y $C = \{2, 3\}$ tienen probabilidad 0.25 y 0.5, respectivamente, pero $p(A \cap B)$ no es 0.25.

d) La afirmación es falsa. Volviendo al experimento de lanzar un dado normal, cuando se *obtiene un dos*, punto muestral perteneciente al suceso *par*, ocurre este suceso, pero no sólo éste: también ocurre cualquier otro suceso que contenga al dos, por ejemplo, *obtener un número primo*.

e) Esta afirmación es falsa. Supongamos que fuese cierta y sea $p = p(A)$. Entonces,

$$p(A) \cdot p(\overline{A}) = p(A) \cdot [1 - p(A)] = p(1 - p) = 1\,,$$

es decir,

$$p^2 - p + 1 = 0\,.$$

Resolviendo esta ecuación,

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}\,.$$

Como se ve, la ecuación no tiene soluciones reales. Por tanto, no existe ningún suceso A tal que: $p(A) \cdot p(\overline{A}) = 1$.

Ejercicio 1.12.
De forma inmediata,

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

y

$$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0.6 = 0.4\,.$$

Como A y B son mutuamente excluyentes, $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$ y, por tanto,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.6 = 0.9\,.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta las leyes de DE MORGAN,

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.9 = 0.1$$

y

$$p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1\,.$$

Ejercicio 1.13.
Desarrollemos la probabilidad del suceso $A \cup B$:

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \\ &= 1 - p(\overline{A}) + 1 - p(\overline{B}) - 1 + p(\overline{A \cap B}) \geq 1 - p(\overline{A}) - p(\overline{B}), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 1.14.
De manera inmediata,

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 0.7$$

y

$$p(\overline{B}) = 1 - p(B) = 0.4.$$

Por otro lado,

$$A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

y, como $A \cap B$ y $A \cap \overline{B}$ son disjuntos,

$$p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B}).$$

Entonces,

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1.$$

Haciendo la misma descomposición para B, es decir, expresándolo como unión de sucesos disjuntos, se obtiene

$$p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B) = 0.6 - 0.2 = 0.4.$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} &p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.7, \\ &p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 0.3 \quad \text{y} \\ &p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 0.8. \end{aligned}$$

Por último, la diferencia simétrica $A \Delta B$ puede escribirse

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B),$$

o bien

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

Por comodidad utilizaremos la segunda expresión. Dado que $A-B = A\cap\overline{B}$ y $B-A = B\cap\overline{A}$ y, además, son disjuntos,

$$p(A\Delta B) = p(A\cap\overline{B}) + p(B\cap\overline{A}) = 0.1 + 0.4 = 0.5\,.$$

Ejercicio 1.15.
Dado que $A\cap B\subset C$, la relación entre los sucesos complementarios es la contraria,

$$\overline{C}\subset\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}\,.$$

Entonces,

$$p(\overline{C}) \le p(\overline{A}\cup\overline{B}) = p(\overline{A}) + p(\overline{B}) - p(\overline{A}\cap\overline{B})\,.$$

Por tanto,

$$p(\overline{C}) \le p(\overline{A}) + p(\overline{B})\,.$$

Ejercicio 1.16.
Consideremos los siguientes sucesos:

A, *comprar música clásica,*
B, *comprar música rock,*
C, *comprar música jazz,*
D, *comprar clásica y rock,*
E, *comprar rock y jazz,*
F, *comprar clásica y jazz,* y
G, *comprar clásica, rock y jazz.*

Entonces,

$$p(A) = 0.20,\quad p(B) = 0.30,\quad p(C) = 0.15,$$

$$p(D) = 0.05,\quad p(E) = 0.07,\quad p(F) = 0.06\quad \text{y}\quad p(G) = 0.01\,.$$

Un diagrama de VENN muestra la relación entre estos sucesos (véase la figura 1.1). Obviamente,

$$D = A\cap B,\quad E = B\cap C,\quad F = A\cap C,\quad \text{y}\quad G = A\cap B\cap C\,.$$

a) El suceso *comprar clásica y no jazz* es $A - C = A\cap\overline{C}$. Descomponiendo A como unión de sucesos disjuntos,

$$A = A\cap(C\cup\overline{C}) = (A\cap C)\cup(A\cap\overline{C})\,,$$

se obtiene

$$p(A\cap\overline{C}) = p(A) - p(A\cap C)\,.$$

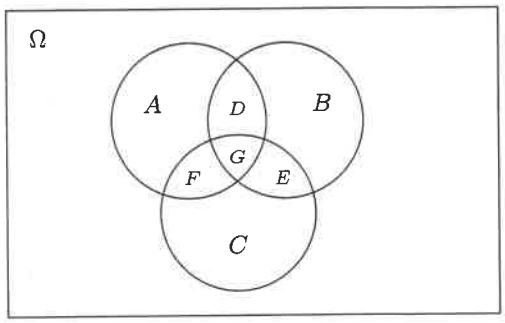


FIG. 1.1.

Como $A \cap C = F$,

$$p(A - C) = p(A) - p(F) = 0.20 - 0.06 = 0.14\,,$$

es decir, el 14 % de las personas compran música clásica y no de jazz.

b) El suceso *comprar rock, o música clásica y de jazz* es $B \cup F$. Entonces,

$$p(B \cup F) = p(B) + p(F) - p(B \cap F)\,.$$

Como $B \cap F = G$,

$$p(B \cup F) = 0.30 + 0.06 - 0.01 = 0.35\,,$$

esto es, el 35 % de las personas compran rock, o música clásica y de jazz.

c) El suceso *comprar sólo música de jazz* es $C - A \cup B$ o, lo que es lo mismo, $C \cap \overline{A \cup B}$. Descomponiendo adecuadamente C como unión de sucesos disjuntos,

$$C = C \cap [(A \cup B) \cup (\overline{A \cup B})] = [C \cap (A \cup B)] \cup [C \cap (\overline{A \cup B})]$$

y, consecuentemente,

$$p(C) = p[C \cap (A \cup B)] + p[C \cap (\overline{A \cup B})]\,.$$

Por otra parte,

$$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) = F \cup E\,,$$

con lo cual,

$$p[C \cap (A \cup B)] = p(F) + p(E) - p(G)\,,$$

dado que $F \cap E = G$.

De esta forma,

$$p[C \cap (\overline{A \cup B})] = p(C) - [p(F) + p(E) - p(G)] = 0.03 .$$

Así, el 3 % de las personas sólo compran música de jazz.

Nótese que el cálculo de todas estas probabilidades se hace inmediato sin más que tener en cuenta el diagrama de VENN.

Este ejercicio puede plantearse de manera más formal, pero también más complicada, considerando de entrada los resultados simples, es decir, los puntos muestrales del experimento. Así,

ω_1, *comprar música clásica, rock y jazz,*
ω_2, *comprar música clásica y rock, pero no jazz,*
ω_3, *comprar música rock y jazz, pero no clásica,*
ω_4, *comprar música clásica y jazz, pero no rock,*
ω_5, *comprar sólo música clásica,*
ω_7, *comprar sólo música jazz,* y
ω_8, *no comprar ninguno de los tres tipos de música.*

Puede calcularse previamente la probabilidad de los sucesos elementales a partir de la información disponible y, con estas probabilidades, obtener posteriormente la de los tres sucesos descomponiéndolos en sus sucesos elementales.

De esta forma, los sucesos A, B, C, D, E, F y G son:

$$\begin{aligned} A &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}, \\ B &= \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6\}, \\ C &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_7\}, \\ D &= \{\omega_1, \omega_2\}, \\ E &= \{\omega_1, \omega_3\}, \\ F &= \{\omega_1, \omega_4\} \quad \text{y} \\ G &= \{\omega_1\}. \end{aligned}$$

A partir de aquí es posible hallar la probabilidad de cualquier suceso elemental. Así,

$$\begin{aligned} p(\omega_1) &= p(G) = 0.01, \\ p(\omega_2) &= p(D - G) = p(D) - p(G) = 0.05 - 0.01 = 0.04, \\ p(\omega_3) &= p(E - G) = p(E) - p(G) = 0.07 - 0.01 = 0.06, \\ p(\omega_4) &= p(F - G) = p(F) - p(G) = 0.06 - 0.01 = 0.05, \\ p(\omega_5) &= p(A) - p(\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}) = 0.20 - (0.01 + 0.04 + 0.05) = 0.10, \\ p(\omega_6) &= p(B) - p(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = 0.30 - (0.01 + 0.04 + 0.06) = 0.19, \\ p(\omega_7) &= p(C) - p(\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}) = 0.15 - (0.01 + 0.06 + 0.05) = 0.03 \quad \text{y} \\ p(\omega_8) &= 1 - p(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}) = 1 - 0.48 = 0.52. \end{aligned}$$

Ahora puede obtenerse la probabilidad de cualquier suceso. Así, la probabilidad de *comprar clásica y no jazz* es $p(\{\omega_2, \omega_5\}) = 0.14$. De la misma manera, se calcularían las otras dos probabilidades pedidas.

Ejercicio 1.17.
Denotando por D y L a los sucesos *practicar algún deporte* y *dedicar varias horas semanales a la lectura*, sabemos que

$$p(D) = 0.30\,,$$
$$p(L) = 0.25 \quad \text{y}$$
$$p(D \cap L) = 0.10\,.$$

Un diagrama de VENN proporciona una idea gráfica de la relación entre estos sucesos (véase la figura 1.2).

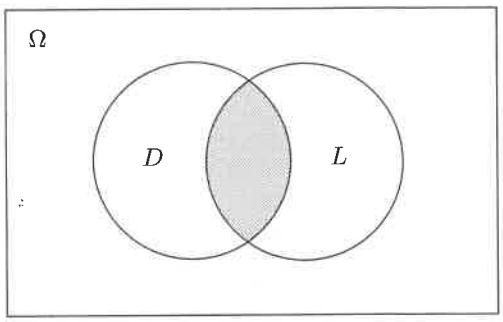


FIG. 1.2.

a) El suceso *sólo practicar deporte* en los ratos de ocio es $D - L = D \cap \overline{L}$. Descompongamos el suceso D como unión de sucesos disjuntos,

$$D = D \cap (L \cup \overline{L}) = (D \cap L) \cup (D \cap \overline{L})\,.$$

Entonces,

$$p(D) = p(D \cap L) + p(D \cap \overline{L})$$

y

$$p(D - L) = p(D \cap \overline{L}) = p(D) - p(D \cap L) = 0.20\,.$$

Por tanto, el 20 % de los empleados de la empresa dedica su tiempo libre sólo a practicar deporte. Obsérvese que a este resultado puede llegarse de forma inmediata sin más que tener en cuenta el diagrama de VENN.

b) El suceso *no leer ni realizar actividades deportivas* es $\overline{D \cup L}$. Entonces,

$$p(\overline{D \cup L}) = 1 - p(D \cup L) = 1 - p(D) - p(L) + p(D \cap L) = 0.55\,;$$

consecuentemente, el 55 % de los empleados ni lee ni hace deporte.

Ejercicio 1.18.
Consideremos, primeramente, el espacio muestral finito $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ y demostremos que estas asignaciones son realmente probabilidades sobre $\alpha = \mathcal{P}(\Omega)$. Obviamente, una asignación de este tipo es una aplicación que a cada suceso A de α le asocia un número real, pues

$$p(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i)\,,$$

verificándose, además, que

1. $p(A) \geq 0$, para todo $A \in \alpha$, dado que $p(A)$ es una suma de números no negativos.
2. $p(\Omega) = 1$, pues $p(\Omega) = p(\omega_1) + \cdots + p(\omega_n) = 1$.
3. $p(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i)$, para toda colección infinita numerable de sucesos A_i de α, disjuntos dos a dos.

Para no complicar la demostración con enrevesadas notaciones, consideremos, sin pérdida de generalidad, únicamente dos conjuntos, A_1 y A_2, disjuntos, de k y l elementos, respectivamente:

$$A_1 = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$$

y

$$A_2 = \{\omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l}\}\,.$$

Entonces,

$$A_1 \cup A_2 = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}, \omega_{j_1}, \ldots, \omega_{j_l}\}\,,$$

por ser sucesos disjuntos y, consecuentemente,

$$p(A_1 \cup A_2) = p(\omega_{i_1}) + \cdots + p(\omega_{i_k}) + p(\omega_{j_1}) + \cdots + p(\omega_{j_l}) = p(A_1) + p(A_2)\,,$$

como queríamos demostrar (téngase en cuenta que, dado que Ω es finito, cualquier colección infinita numerable de sucesos disjuntos de α está formada por un número finito de sucesos no vacíos, siendo el resto iguales al suceso imposible).

Por tanto, estas asignaciones de probabilidad para espacios muestrales finitos son realmente probabilidades, al verificar los tres axiomas de KOLMOGOROV.

Invitamos al lector a que demuestre de igual modo que cualquier asignación de probabilidad de este tipo a un espacio muestral infinito numerable es realmente una probabilidad. La única complicación, fundamentalmente de notación, que puede presentar tal demostración está en el hecho de que los sucesos disjuntos a los que se refiere el tercer axioma no tienen por qué ser finitos.

Ejercicio 1.19.
Designando por b y n a los dos posibles resultados del experimento, *sacar bola blanca* y *sacar bola negra*, respectivamente, el espacio muestral es $\Omega = \{b, n\}$. Sabemos que

$$p(n) = 3p(b)\,.$$

Ahora bien, como

$$p(b) + p(n) = 1\,,$$

entonces,

$$p(b) + 3p(b) = 4p(b) = 1\,.$$

Por tanto,

$$p(b) = \frac{1}{4}$$

y

$$p(n) = \frac{3}{4}\,.$$

Dado que hay 12 bolas en la urna, la cuarta parte, 3, son blancas y el resto, 9, negras.

Ejercicio 1.20.
En el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, se define la probabilidad de un suceso elemental como

$$p(i) = k \cdot i\,, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, 6\,.$$

Entonces,

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = k + 2k + 3k + 4k + 5k + 6k = 21k = 1$$

y, por tanto,

$$k = \frac{1}{21}\,,$$

con lo cual queda determinada la probabilidad de cualquier suceso elemental y, en consecuencia, de cualquier suceso.

Así, la probabilidad de que *no salga el seis* es

$$p(\overline{\{6\}}) = 1 - p(6) = 1 - \frac{6}{21} = \frac{15}{21}$$

y la de que *salga par*,

$$p(\{2, 4, 6\}) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{12}{21}\,.$$

Del mismo modo se podría calcular la probabilidad de cualquiera de los $2^6 = 64$ sucesos que forman la σ-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$ (recuérdese, a este respecto, el resultado del ejercicio 1.1).

Ejercicio 1.21.
En el espacio muestral finito $\Omega = \{0, 1\}$ una probabilidad, p, tiene que verificar

$$p(0) + p(1) = 1\,,$$

esto es,

$$0.3^0 \cdot 0.7^k + 0.3^1 \cdot 0.7^{k-1} = 1 .$$

Operando,

$$0.7^{k-1}(0.7 + 0.3) = 1 ,$$

es decir,

$$0.7^{k-1} = 1 .$$

Por tanto, para $k = 1$, p es una probabilidad.

Ejercicio 1.22.
Al existir tres paredes para colocar tres cuadros, existen 6 posibles colocaciones de los mismos (se trata de permutaciones sin repetición de 3 elementos, $P_3 = 3! = 6$). Sin otra información, parece razonable suponer que todas estas colocaciones sean igualmente probables. Estamos, así, ante un espacio muestral finito (los resultados simples son las seis posibles colocaciones) y equiprobable, pudiéndose calcular la probabilidad de un suceso, A, por medio de la regla de LAPLACE,

$$p(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} .$$

Por tanto, la probabilidad de que *el esposo coincida con el criterio de su mujer en al menos un cuadro*, A, es

$$p(A) = \frac{4}{6} ,$$

dado que, o coinciden en los 3 cuadros (1 caso), o coinciden sólo en uno de ellos (3 casos).

Ejercicio 1.23.
En el cine, los cinco amigos se sientan en hilera, siendo 120 las posibles colocaciones (permutaciones sin repetición de 5 elementos, $P_5 = 5! = 120$). Como estas colocaciones son todas igualmente probables, el espacio muestral Ω de los posibles resultados es finito y equiprobable, pudiéndose utilizar la regla de LAPLACE para el cálculo de probabilidades.

Para contabilizar los casos favorables, consideramos a la pareja como un solo elemento, siendo, entonces, 24 las colocaciones con los miembros de la pareja juntos y en un cierto orden ($P_4 = 4! = 24$, al ser 4 los elementos a permutar). Si, a su vez, permutamos la colocación de los dos miembros de la pareja, se obtienen los $2 \cdot 24 = 48$ casos favorables.

Por tanto, la probabilidad de que *la pareja se siente junta en el cine*, A, es

$$p(A) = \frac{48}{120} = 0.4 .$$

En el restaurante, los cinco amigos se colocan en círculo, donde no hay primero ni último. En esta situación, si la posición de todos rota alrededor de la mesa, manteniéndose las mismas posiciones relativas (la persona que uno tiene sentada a su izquierda y la que tiene sentada a su derecha), se considera que la colocación no ha cambiado. Por tanto, ahora, el número de casos posibles es la quinta parte de los que se contabilizaban cuando

la colocación se hacía en hilera; es decir, hay $\frac{5!}{5} = 4! = 24$ posibles colocaciones, todas igualmente probables.

Análogo razonamiento nos lleva a la conclusión de que el número de casos favorables, es la cuarta parte de los que se consideraban cuando la colocación era en hilera, esto es, hay $\frac{2 \cdot 4!}{4} = 2 \cdot 3! = 12$ casos favorables.

Entonces, la probabilidad de que *la pareja se siente junta en el restaurante*, B, es

$$p(B) = \frac{12}{24} = 0.5 .$$

Ejercicio 1.24.

Por el mismo razonamiento que en los ejercicios anteriores, existen 24 posibles repartos de premios (permutaciones sin repetición de 4 elementos, $P_4 = 4! = 24$) todos ellos igualmente probables, pudiendo aplicarse, de nuevo, la regla de LAPLACE.

Así, la probabilidad de que *todos queden satisfechos* (un único caso de los 24) es 1/24.

Hallemos, ahora, la probabilidad de que *ninguno se lleve el premio deseado*. El cálculo del número de casos favorables no es sencillo;[1] recurramos a su contabilización generándolos. Para ello, designemos por A, B, C y D a los cuatro ganadores y supongamos que A prefiere el premio número 1, B el número 2, C el número 3, y D el número 4, denotándolo por

$$(A, B, C, D) .$$

Generemos los casos en que ninguno de los premiados se lleva el premio deseado. Supongamos que B se lleva el primero,

$$(B, _, _, _) .$$

En esta situación, el segundo premio puede asignarse a A, a C o a D; en el primer caso,

$$(B, A, _, _) ,$$

siendo la única posibilidad para que nadie quede satisfecho

$$(B, A, D, C) .$$

De la misma forma consideraríamos los casos

$$(B, C, D, A)$$

y

$$(B, D, A, C) .$$

Por tanto, existen 3 casos en los que ninguno de los jugadores se lleva el premio deseado, partiendo de que el primer premio se lo lleva B. El mismo número de casos, 3, habrá en cada una de las situaciones en que este primer premio se lo lleve C o D (A no puede llevárselo pues es el que él desea). Contabilizamos, entonces, un total de 9 casos favorables, siendo la probabilidad de que *ninguno se lleve el premio deseado* igual a 9/24.

1. El lector interesado en una resolución más formal de este ejercicio y del 1.26 puede consultar el capítulo IV de FELLER, W., *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones*, vol. I, Limusa-Wiley, México, 1986.

Ejercicio 1.25.
Designando a cada mes del año por su inicial (o sus iniciales si se prestase a confusión), los cumpleaños de 12 personas pueden describirse por una serie de 12 iniciales, en el siguiente sentido: la serie

(Sep, Abr, Dic, Dic, Jun, Ago, Oct, Mar, May, Ene, Nov, Jul)

indica que la primera persona nació en septiembre, la segunda en abril, la tercera y la cuarta en diciembre, etc. El número de todas estas posibles series es el de variaciones con repetición de 12 elementos (los 12 meses del año), tomados de 12 en 12 (las 12 personas), es decir, $VR_{12,12} = 12^{12}$. Suponiendo que todos los meses tienen el mismo número de días, estas 12^{12} maneras de producirse los cumpleaños de las 12 personas son igualmente probables (si no hacemos esta suposición, el ejercicio se complicaría).

Las series de iniciales que contabilizan los casos favorables, los doce cumpleaños en meses diferentes, no presentan iniciales repetidas; entonces, su número es el de las permutaciones de 12 elementos, $P_{12} = 12!$.

Por tanto, aplicando la regla de LAPLACE, la probabilidad de que *los cumpleaños de doce personas sean en meses diferentes*, A, es

$$p(A) = \frac{12!}{12^{12}} = 0.000054 .$$

Por el mismo razonamiento, el número de casos en que pueden presentarse los cumpleaños de 6 personas es 12^6 (variaciones con repetición de 12 elementos tomados de 6 en 6), siendo éstos equiprobables.

Para contabilizar los casos favorables, los 6 cumpleaños en dos meses, fijemos, por ejemplo, enero y febrero. Entonces, el número de casos en que los 6 cumpleaños se producen en estos 2 meses es 2^6 (variaciones con repetición de 2 elementos tomados de 6 en 6); ahora bien, tendremos que descontar 2 casos, aquel en que los 6 cumpleaños son en enero y aquel en que son en febrero. Además, tengamos en cuenta que existen 66 formas de elegir los dos meses (combinaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 2 en 2, $C_{12,2} = \binom{12}{2} = 66$). Por tanto, el número de casos favorables es $66(2^6 - 2)$, es decir, 4 092.

De esta forma, por la regla de LAPLACE, la probabilidad de que *los cumpleaños de seis personas sean en dos meses*, B, es

$$p(B) = \frac{4\,092}{12^6} = 0.0014 .$$

Ejercicio 1.26.
El número de posibles colocaciones de las placas es 120 ($P_5 = 5!$), todas ellas igualmente probables, pudiéndose aplicar la regla de LAPLACE.

a) El número de casos favorables al suceso *el doctor Fernández tiene bien colocada la placa* es 24 (las permutaciones sin repetición de las otras 4 placas una vez la del doctor Fernández esté en su sitio); por tanto, la probabilidad de este suceso es 24/120, es decir, 1/5.

b) Calcular directamente el número de casos favorables al suceso *acertar en la colocación de exactamente dos placas* no es sencillo, por lo que recurriremos a su contabilización, describiendo alguno de estos casos.

Para concretar, numeremos las puertas de los despachos de los doctores Álvarez, Barrio, Conde, Díez y Fernández, en este orden, describiendo por

$$(A, B, C, D, F)$$

la identificación correcta, es decir, la placa de Álvarez en la primera puerta, la de Barrio en la segunda, etc. Consideremos el caso en que se acierte en dos colocaciones y sólo en dos, por ejemplo, en las de los doctores Álvarez y Barrio:

$$(A, B, _, _, _)\,.$$

En las puertas tercera, cuarta y quinta no puede acertarse; por tanto, si la placa del doctor Conde no puede estar en la tercera, ha de estar en la cuarta o en la quinta:

$$(A, B, _, C, _)$$

o

$$(A, B, _, _, C)\,.$$

En estas situaciones, la única manera de colocar las placas de los doctores Díaz y Fernández de forma incorrecta es, respectivamente,

$$(A, B, F, C, D)$$

y

$$(A, B, D, F, C)\,.$$

Por tanto, hay dos casos en los que sólo se acierta con las placas de los doctores Álvarez y Barrio. El mismo número de casos, 2, habría en cada una de las situaciones en que consideráramos la identificación correcta de las placas de otros dos doctores cualesquiera. Dado que el número de posibles elecciones de dos doctores de un total de 5 es 10 (combinaciones sin repetición de 5 elementos tomados de 2 en 2, $C_{5,2} = \binom{5}{2}$), el total de casos favorables es $10 \cdot 2 = 20$. Por tanto, la probabilidad de *acertar en la colocación de exactamente dos placas* es $20/120$, esto es, $1/6$.

Ejercicio 1.27.

a) En el espacio muestral infinito numerable formado por los números impares positivos queda definida una probabilidad asignando a cada uno de los sucesos elementales valores no negativos que sumen la unidad. Por tanto, el único requisito exigible es que

$$p(1) + p(3) + p(5) + \cdots = 1\,,$$

es decir,

$$k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 + k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 + \cdots = 1\,.$$

Dado que la primera parte de la igualdad es la suma de una progresión geométrica ilimitada, $S = \frac{a_1}{1-r}$, cuyo primer término, a_1, es $k \cdot \frac{1}{3}$ y la razón, r, es $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, se obtiene

$$\frac{k \cdot \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1 ,$$

resultando que k es igual a $8/3$.

b) La probabilidad del suceso $A = \{7, 9, 11, \ldots\}$ puede hallarse directamente (sumando una progresión geométrica ilimitada) o calculando la probabilidad de su complementario. Así,

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - [p(1) + p(3) + p(5)] = 1 - \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{243}\right) = 0.001 .$$

Ejercicio 1.28.
Al igual que en el ejercicio anterior, para que p sea una probabilidad ha de verificarse:

1. $p(k) \geq 0$, para todo $k = 1, 2, \ldots$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} p(k) = 1$.

La primera condición es obvia, ya que $k \cdot e^{-k}$ es una cantidad positiva, para $k = 1, 2, \ldots$ En cuanto a la segunda, debemos sumar una serie aritmético-geométrica ilimitada siguiendo la sugerencia que se propone:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} p(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k} .$$

Así, dado que e es la razón de la progresión geométrica que aparece en el denominador del término general de la serie, resulta

$$S - \frac{1}{e} \cdot S = \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots\right) - \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots\right) .$$

Operando,

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) S = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} ,$$

es decir,

$$S = \frac{e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} = 0.92 ,$$

que no es igual a la unidad. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(k) \neq 1 ,$$

con lo cual p no es una probabilidad.

Ejercicio 1.29.
Las asignaciones de probabilidad a espacios muestrales finitos e infinitos numerables, consistentes en dar a los sucesos elementales valores de probabilidad no negativos cuya suma sea la unidad, pueden generalizarse a otras situaciones. En concreto, a espacios muestrales a los que se les asocian σ-álgebras generadas por un número finito o infinito numerable de átomos. Así, cualquier asignación consistente en dar a los átomos valores de probabilidad no negativos que sumen uno es realmente una probabilidad.

En el ejercicio 1.5 se obtuvo la σ-álgebra generada por los siguientes átomos:

$$A = \{3\},$$
$$B = \{2,4\} \quad \text{y}$$
$$C = \{1\}.$$

Si a cada uno de los tres átomos le damos un valor de probabilidad igual a $1/3$,

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{3},$$

tendremos asignada una probabilidad sobre la σ-álgebra, pudiéndose hallar la probabilidad de cualquier suceso, al ser éste la unión de un cierto número de átomos. Así, por ejemplo,

$$p(\{1,2,4\}) = p(B \cup C) = p(B) + p(C) = \frac{2}{3}.$$

Obsérvese que, aunque no podemos hablar de probabilidad de los sucesos elementales (por ejemplo, $p(2)$ no existe, no está definida) y, por tanto, tampoco de equiprobabilidad, la probabilidad asignada es, en cierto modo, incompatible con la idea de equiprobabilidad. Así, mientras que los sucesos $\{1\}$ y $\{3\}$ tienen la misma probabilidad, $1/3$, el suceso $\{2,4\}$ no tiene el doble. Si quisiera respetarse esta idea de equiprobabilidad, la asignación que debería hacerse sería:

$$p'(A) = p'(C) = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad p'(B) = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.30.
Dado el espacio muestral $\Omega = (0,1)$, consideremos la σ-álgebra que contiene todos los subintervalos abiertos de $(0,1)$. Dicha σ-álgebra (de la que hablaremos con más detalle en el capítulo 3) contiene todas las uniones, intersecciones y complementarios de dichos subintervalos.

En particular, el suceso *elegir el punto* 0.5, $\{0.5\}$, pertenece a la σ-álgebra, pues puede expresarse como

$$\{0.5\} = \overline{(0,0.5) \cup (0.5,1)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} p(0.5) &= p[\overline{(0,0.5) \cup (0.5,1)}] = 1 - p[(0,0.5) \cup (0.5,1)] = \\ &= 1 - p[(0,0.5)] - p[(0.5,1)] = 1 - 0.5 - 0.5 = 0, \end{aligned}$$

resultado razonable teniendo en cuenta que un punto no tiene longitud.

Ejercicio 1.31.
La figura 1.3 describe geométricamente la probabilidad del subintervalo (a, b) como el área de un rectángulo de lados $b - a$ y 1.

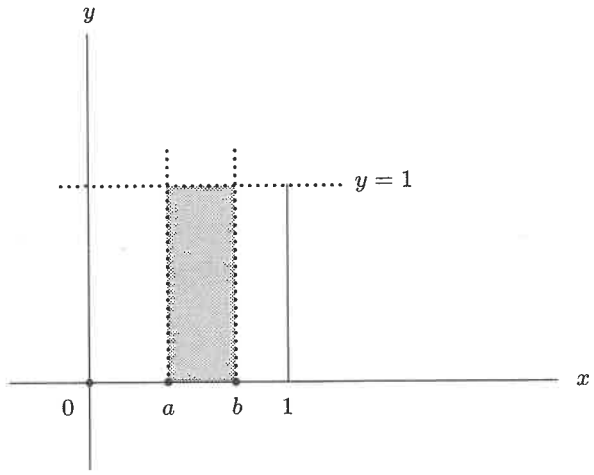


FIG. 1.3.

Por tanto,

$$p[(a, b)] = (b - a) \cdot 1 = b - a.$$

Entonces,

$$p\left[\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Obsérvese que la probabilidad definida en este ejercicio coincide con la del ejercicio anterior.

Resolución de los ejercicios de Combinatoria

C.1.
En las posibles clasificaciones:

— Cada caballo sólo puede aparecer una vez.
— Influye el orden de llegada.
— Se incluyen sólo cuatro de los diez caballos.

Por tanto se trata de variaciones sin repetición, cuyo número será:

$$V_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040 \text{ clasificaciones.}$$

C.2.
En cada posible grupo de colores para el logotipo:

— Los colores no se repiten.
— No influye el orden.
— Se incluyen 3 de los 6 colores.

Por tanto, el número de posibles grupos es el de combinaciones sin repetición de 6 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = 20 \text{ grupos de colores}.$$

C.3.
En cada palabra:

— No se repiten las letras.
— Influye el orden de colocación de las mismas.
— Las cuatro letras forman parte de la misma.

Por tanto, se trata de permutaciones, cuyo número será $P_4 = 4! = 24$ palabras.

C.4.
En cada posible elección:

— Se consideran dos alumnos distintos.
— Influye el orden (no es lo mismo el alumno A de delegado y el B de subdelegado, que el B de delegado y el A de subdelegado).
— Se eligen 2 de los 50 alumnos.

Entonces, el número de formas distintas de elegir delegado y subdelegado es el de variaciones sin repetición de 50 elementos tomados de 2 en 2, esto es,

$$V_{50,2} = 50 \cdot 49 = 2\,450 \text{ posibles elecciones}.$$

C.5.
En cada comité:

— No se repiten las personas.
— No influye el orden de las mismas.
— Sólo están incluidas cinco de las once personas.

Por tanto, se trata de combinaciones sin repetición, cuyo número será:

$$C_{11,5} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{6! \cdot 5!} = 66 \text{ comités}.$$

C.6.
En cualquiera de las distintas colocaciones de los 15 cuentos (de hecho, 13, pues dos están fijos):

— Todos los cuentos son distintos.
— Sólo influye el orden de su colocación.
— En cada colocación se consideran los 13 cuentos.

El número de estas posibles colocaciones es el de las permutaciones sin repetición de 13 elementos,

$$P_{13} = 13! = 6\,227\,020\,800 \text{ colocaciones}.$$

C.7.
En cada carácter:

— Los puntos y rayas pueden repetirse.
— Influye el orden en que se disponen.
— No tienen por qué entrar los dos elementos, punto y raya.

En consecuencia, el número de caracteres que podemos formar es:

$$\begin{aligned} &\text{Con 3 signos, } VR_{2,3} = 2^3 = 8. \\ &\text{Con 2 signos, } VR_{2,2} = 2^2 = 4. \\ &\text{Con 1 signo, } VR_{2,1} = 2^1 = 2. \end{aligned}$$

En definitiva, el número total de caracteres es: $8 + 4 + 2 = 14$.

C.8.
El número de boletos con cuatro cifras es el de variaciones con repetición de 10 elementos tomados de 4 en 4, ya que:

— Se pueden repetir las cifras (el boleto 1 445, por ejemplo, tiene dos cifras repetidas).
— Influye el orden de las mismas (los boletos 1 586 y 8 561 son distintos).
— Se consideran grupos de cuatro cifras del total de 10 (el cero, el uno, ..., el nueve).

Por tanto, el número de boletos de la rifa es

$$VR_{10,4} = 10^4 = 10\,000$$

(téngase en cuenta que en esta contabilización también se han incluido los números con una, dos o tres cifras, por ejemplo, 0008, 0023 y 0149).

El número de boletos premiados se calcula de la misma forma, pero considerando fijas las cifras correspondientes a las unidades y a las decenas; en consecuencia,

$$VR_{10,2} = 10^2 = 100\,,$$

es el número de boletos premiados y, por tanto, el número de botellas de cava a repartir.

C.9.
En cada palabra:

— Se incluyen las mismas letras, repetidas el mismo número de veces.
— Influye el orden de las letras.

Teniendo en cuenta que las letras «s» , «t» , «a» e «i» se incluyen dos veces, el número de palabras se contabilizan como las permutaciones con repetición de once elementos donde cuatro de ellos se presentan dos veces y el resto una vez, es decir:

$$P_{11}^{2,2,2,2,1,1,1} = \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 2\,494\,800 \text{ palabras.}$$

C.10.
En cada modelo de reloj:

— Pueden repetirse los colores.
— No influye el orden de los mismos (se supone que en el reloj de arena son indistinguibles la cubeta superior y la inferior).
— Utiliza dos colores de cuatro posibles.

De acuerdo con esto, el número de modelos distintos es el de las combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 2 en 2, es decir,

$$CR_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = 10 \text{ modelos.}$$

C.11.
En cada ficha, formada por dos puntuaciones del 0 al 6:

— Se puede repetir la puntuación.
— No influye el orden.
— No están todas las 7 posibles puntuaciones.

Se trata de combinaciones con repetición de siete elementos tomados de dos en dos, es decir:

$$CR_{7,2} = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28 \text{ fichas.}$$

C.12.
En cualquiera de los posibles órdenes de entrada para las dieciséis fichas:

— Están incluidas las 16 fichas (4 amarillas, 4 azules, 4 verdes y 4 rojas), cada color repetido siempre el mismo número de veces.
— Sólo influye el orden en que se *meten en casa.*

Cada posible orden de entrada es una permutación con repetición de 16 elementos donde hay 4 grupos de 4 elementos iguales entre sí y diferentes al resto. Entonces, el número de órdenes distintos de entrada de fichas es

$$P_{16}^{4,4,4,4} = \frac{16!}{4!\,4!\,4!\,4!} = 63\,063\,000.$$

Capítulo 2

PROBABILIDAD CONDICIONADA E INDEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Se tiene un espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio. Sabemos que ha ocurrido un determinado suceso y tratamos de hallar la probabilidad de otro, probabilidad que estará influida, o no, por la ocurrencia del primero.

Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y B un suceso de α de probabilidad no nula, $p(B) > 0$. Se denomina probabilidad de un suceso A condicionada por que haya ocurrido el suceso B o, sencillamente, **probabilidad de A condicionada por B**, al número $p(A \mid B)$ definido por

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \ .$$

La probabilidad condicionada es realmente una probabilidad. En consecuencia, todas las propiedades de las probabilidades son válidas, también, para una probabilidad condicionada.

Una importante consecuencia de la definición de probabilidad condicionada es la **regla de la multiplicación**: para n sucesos tales que $p(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$,

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 \mid A_1) \ldots p(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \ .$$

Dos herramientas importantes para el cálculo de probabilidades son los llamados **teorema de la probabilidad total** y **teorema de Bayes** que enunciamos conjuntamente a continuación.

Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una partición de Ω formada por una colección infinita numerable de sucesos de probabilidad no nula, es decir, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $p(A_i) > 0$ para todo i.

1. *Si B es un suceso cualquiera,*

$$p(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) \cdot p(B \mid A_i) \ .$$

2. *Si B es un suceso de probabilidad no nula,*

$$p(A_j \mid B) = \frac{p(A_j) \cdot p(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) \cdot p(B \mid A_i)} \qquad j = 1, \ldots, n, \ldots$$

Estos teoremas son igualmente válidos para una colección finita, $\{A_i\}_{i=1}^{n}$.

La ocurrencia de un suceso puede que influya, o no, en la de otro. Se dice que A y B son dos **sucesos estadísticamente independientes** si

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \ .$$

La independencia de sucesos se puede caracterizar en términos de probabilidad condicionada. Así, *dos sucesos, A y B, son independientes si, o bien uno de ellos es de probabilidad nula, o bien $p(B \mid A) = p(B)$.*

El concepto de independencia puede extenderse a más de dos sucesos. Se dice que $A_1, \ldots, A_n$ son **sucesos mutuamente independientes** si, para cada subconjunto $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ de estos sucesos $(k = 2, 3, \ldots, n)$, se verifica

$$p(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = p(A_{i_1}) \ldots p(A_{i_k}) \ ,$$

donde $i_1, \ldots, i_k$ varían entre 1 y n y son distintos entre sí.

Si n sucesos son mutuamente independientes, son independientes dos a dos, no siendo cierta la proposición recíproca.

Con frecuencia, consideraremos varios experimentos que se realizan de forma sucesiva, estando interesados en el resultado global de los mismos. En esta situación, las condiciones en que se realiza cada uno de ellos pueden estar influidas, o no, por los resultados de los experimentos precedentes.

Sean dos experimentos aleatorios que designaremos simbólicamente por E_1 y E_2. El **experimento compuesto** de E_1 y E_2, que denotaremos por $E = E_1 \times E_2$, es el consistente en la realización de ambos de acuerdo con el mecanismo que los relaciona. El espacio muestral producto de los espacios muestrales de E_1 y de E_2, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, es el espacio muestral asociado al experimento aleatorio compuesto $E = E_1 \times E_2$.

En aquellas situaciones en las que pueda suponerse que los dos experimentos son independientes, es decir, que el resultado de uno de ellos no influirá sobre el otro, se define la probabilidad en el experimento compuesto de la siguiente forma:

> Sean $(\Omega_1, \alpha_1, p_1)$ y $(\Omega_2, \alpha_2, p_2)$ los espacios probabilísticos asociados a E_1 y E_2, respectivamente, con Ω_1 y Ω_2 finitos o infinito numerables, $\alpha_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ y $\alpha_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$. Sea (Ω, α) el espacio probabilizable asociado a E, con

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ y $\alpha = \mathcal{P}(\Omega)$. Si E_1 y E_2 son **experimentos independientes**, la probabilidad, p, sobre α, se define como aquella que verifica

$$p[(\omega_i, \tau_j)] = p_1(\omega_i) \cdot p_2(\tau_j) \qquad i = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots$$

En cambio, no existe una técnica universal que permita asignar una probabilidad razonable a un experimento compuesto de **experimentos dependientes**. Con todo, muchas veces los experimentos se desarrollan sucesivamente en el tiempo y la relación tiene un sentido unidireccional (el resultado del primer experimento modifica las condiciones en las que se realiza posteriormente el segundo). En estas situaciones, se conoce la probabilidad p_1 asociada a Ω_1 y una colección de probabilidades sobre Ω_2, $\{p_{\omega_i},\ \omega_i \in \Omega_1\}$, donde $p_{\omega_i}(\tau_j)$ es la probabilidad de obtener τ_j en el segundo experimento cuando el resultado del primero ha sido ω_i. Estas probabilidades se denominan **probabilidades de transición**. Así, podemos definir una probabilidad en el experimento compuesto en la forma siguiente:

Sea $(\Omega_1, \alpha_1, p_1)$ el espacio probabilístico asociado a E_1 y, para cada $\omega_i \in \Omega_1$, sea $(\Omega_2, \alpha_2, p_{\omega_i})$ el espacio probabilístico asociado a E_2 conocido el resultado ω_i del experimento E_1. Se define, entonces, una probabilidad, p, en $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \alpha = \mathcal{P}(\Omega))$ como

$$p[(\omega_i, \tau_j)] = p_1(\omega_i) \cdot p_{\omega_i}(\tau_j)\ ,$$

donde (ω_i, τ_j) es un resultado cualquiera de Ω, pudiéndose demostrar que

$$p_{\omega_i}(\tau_j) = p(\tau_j \mid \omega_i)\ .$$

Ejercicios propuestos

2.1. Si los sucesos A y C cumplen que $A \cap B = C \cap B$, siendo B un suceso de probabilidad no nula, demuéstrese que

$$p(A \mid B) = p(C \mid B)\ .$$

2.2. Sean A y B dos sucesos tales que $p(B) = 0.3$, $p(A \mid B) = 0.5$ y $p(A \cup B) = 0.6$. Calcúlese la probabilidad del suceso A.

2.3. Los sucesos A y B verifican que $p(A) = 1/4$, $p(B \mid A) = 1/2$ y $p(A \mid B) = 1/4$. Razónese si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

a) A y B son mutuamente excluyentes.

b) $p(\overline{A} \mid \overline{B}) = 3/4$.

c) $p(A \mid B) + p(A \mid \overline{B}) = 1$.

2.4. Si A, B y C son tres sucesos tales que $p(B \mid A) \geq p(B)$ y $p(C \mid B) \geq p(C)$, pruébese con un ejemplo que la relación $p(C \mid A) \geq p(C)$ no tiene por qué ser cierta. (Sugerencia: considérese el experimento de lanzar un dado normal.)

2.5. Un individuo se dispone a realizar un viaje en avión desde Madrid a Damasco. Temeroso, se dirige a la compañía y pregunta cuál es la probabilidad de que haya al menos una bomba en el avión. Siendo dicha probabilidad 0.1, y angustiado ante el riesgo, pregunta cuál sería la probabilidad de que haya al menos dos bombas, contestándosele que sería de 0.01. Más aliviado por la respuesta, decide llevar en su equipaje una bomba. ¿Qué opinión estadística merece dicha decisión?

2.6. El 40 % de los alumnos y alumnas de COU son de ciencias, el 25 % de letras y el resto recibe enseñanza mixta. El porcentaje de mujeres en cada uno de estos grupos es 40, 60 y 55, respectivamente. Para elaborar una encuesta docente, se elige al azar un estudiante de COU:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que reciba enseñanza de ciencias y sea mujer?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) Si se eligió a una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo de ciencias?

2.7. Sean A y B sucesos tales que $p(A) = 0.3$, $p(A \cup B) = 0.8$ y $p(B) = p$.

a) ¿Para qué valor de p son A y B independientes?

b) Obténgase una condición necesaria para que A y B sean disjuntos.

2.8. Sean A y B dos sucesos disjuntos y de probabilidad no nula. Demuéstrese que A y B son sucesos dependientes.

2.9. Se elige una carta al azar de una baraja española. Considérense los sucesos F, *sacar figura*, R, *sacar rey*, E, *sacar espadas*, y O, *sacar oros*. Estúdiese la independencia entre los sucesos R y F, R y E, y E y O, si:

a) La baraja es normal.

b) La baraja ha perdido el as de espadas.

2.10. Sean A y B dos sucesos independientes. Demuéstrese que A y $\overline{B}$ también lo son.

2.11. Sean dos sucesos A y B tal que $0 < p(B) < 1$. Demuéstrese que A y B son independientes si y sólo si

$$p(A \mid B) = p(A \mid \overline{B}) .$$

2.12. Sean A y B dos sucesos independientes con probabilidad no nula. Compruébese que para cualquier suceso C se verifica la relación

$$p(C \mid A) = p(B) \cdot p(C \mid A \cap B) + p(\overline{B}) \cdot p(C \mid A \cap \overline{B}) .$$

2.13. Sean A, B y C sucesos mutuamente independientes. Pruébese que:

a) A y $B \cup C$ son independientes.

b) A y $B \cap C$ son independientes.

2.14. Se considera el espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, finito y equiprobable. Demuéstrese que los sucesos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ y $C = \{1, 4\}$ son independientes dos a dos, pero no mutuamente independientes.

2.15. Sean A, B, C y D cuatro sucesos mutuamente independientes. Demuéstrese que también lo son:

a) $A \cap C$ y $B \cup \overline{D}$.

b) $A \cap B$, C y $\overline{D}$.

2.16. En el espacio muestral $\Omega = (0, 1)$, consideremos la familia de sucesos formada por los subintervalos de $(0, 1)$ de la forma (a, b), siendo a y b números reales tales que $0 < a < b < 1$.

Si la probabilidad de un suceso de este tipo viene dada por la amplitud del subintervalo, es decir, $p[(a, b)] = b - a$, hállense dos sucesos que sean independientes.

2.17. Sea $\Omega = (0, 2)$ un espacio muestral en el que se define la probabilidad de un subintervalo (a, b) de Ω como el área comprendida entre el propio subintervalo (a, b) y la recta $2y = x$.

Encuéntrense dos sucesos, cuya probabilidad sea mayor que cero y menor que uno, que sean independientes.

¶ 2.18. Dados dos experimentos independientes, E_1 y E_2, con espacios probabilísticos asociados $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), p_1)$ y $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_2)$, siendo Ω_1 y Ω_2 infinito numerables, la probabilidad en el experimento compuesto, E, se define en $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega))$ como

$$p[(\omega_i, \tau_j)] = p_1(\omega_i) \cdot p_2(\tau_j), \quad \text{para todo} \quad (\omega_i, \tau_j) \in \Omega .$$

Demuéstrese que ésta es la única probabilidad que verifica que

$$\begin{aligned} &p(A') = p_1(A) , \\ &p(B') = p_2(B) \quad \text{y} \\ &p(A' \cap B') = p(A') \cdot p(B') , \end{aligned}$$

donde $A' = A \times \Omega_2$ y $B' = \Omega_1 \times B$ para cualquier suceso A de Ω_1 y B de Ω_2.

¶ **2.19.** Sea $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), p_1)$ el espacio probabilístico asociado al experimento E_1 y sea $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_{\omega_i})$ el espacio asociado a E_2 conocido el resultado, ω_i, de E_1, con Ω_1 y Ω_2 infinito numerables. En el experimento compuesto, E, se define una probabilidad en $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega))$ como

$$p[(\omega_i, \tau_j)] = p_1(\omega_i) \cdot p_{\omega_i}(\tau_j), \quad \text{para todo } (\omega_i, \tau_j) \in \Omega\,.$$

Demuéstrese que ésta es la única probabilidad que verifica que

$$p(A') = p_1(A)\,,$$

donde $A' = A \times \Omega_2$ para cualquier suceso A de Ω, y

$$p(\tau_j \,|\, \omega_i) = p_{\omega_i}(\tau_j)$$

para cualquier $\omega_i \in \Omega_1$ y $\tau_j \in \Omega_2$.

2.20. Se tiene una urna con dos bolas blancas y tres negras y se realizan dos extracciones, observando el resultado obtenido.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una bola blanca?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca en la primera extracción?

c) Si la primera bola extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que lo sea la segunda?

¶ **2.21.** Sean A y B dos sucesos cualesquiera de $(\Omega_1, \alpha_1, p_1)$ y $(\Omega_2, \alpha_2, p_2)$, espacios probabilísticos correspondientes a dos experimentos independientes. Sea (Ω, α, p) el espacio probabilístico asociado al experimento compuesto. Demuéstrese que

$$p(A \times B) = p_1(A) \cdot p_2(B)\,.$$

2.22. La constructora Cementasa trata de determinar si debería presentar una oferta para la construcción de una nueva autovía. Su principal competidora, la constructora Arenal, se ha presentado a un 70 % de las contrataciones en el pasado. Si Arenal no presenta una oferta, la probabilidad de que su rival obtenga la obra es 0.5; si presenta oferta, la probabilidad de que Cementasa reciba el contrato es 0.25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la constructora Cementasa gane el contrato?

b) Si la constructora Cementasa gana el contrato, ¿cuál es la probabilidad de que la constructora Arenal no haya presentado oferta?

2.23. Tres compañías de seguros copan el mercado de una determinada ciudad. El 30 % de las pólizas suscritas corresponden a la compañía A, el 25 % a la B y el

45 % restante a la C. El porcentaje de pólizas de seguros de vida en cada una de ellas es del 15, 20 y 25 %, respectivamente.

a) ¿Qué proporción de las pólizas suscritas corresponde a seguros de vida?

b) Un individuo ha suscrito un seguro de vida. ¿Cuál es la probabilidad de que su póliza sea de la primera entidad?

2.24. Juan dice la verdad nueve veces de cada diez, y Pedro siete veces de cada nueve. Se extrajo una bola al azar de una bolsa que contenía cinco bolas blancas y veinte negras. Ambos dijeron que la bola extraída era blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída fuera realmente blanca?

2.25. Un auditor ha sido informado de la existencia de un error deliberado en uno de los documentos del departamento de contabilidad de una empresa.

La probabilidad de que el error se encuentre en un lote de 10 documentos es 0.05, siendo igualmente probable que el defecto esté en cualquiera de estos documentos. Si ha inspeccionado ya 9 sin detectar el fallo, ¿cuál es la probabilidad de que el fraude no se encuentre en dicho lote?

2.26. Una moneda está trucada de modo que la probabilidad de cara es el doble que la de cruz. Hállese la probabilidad de no obtener ninguna cara en una serie de 10 tiradas con dicha moneda.

2.27. En una urna hay un total de 12 bolas entre blancas y negras. Sabiendo que la probabilidad de elegir dos bolas blancas en dos extracciones sin reemplazamiento es 1/11, ¿cuántas bolas negras hay en la urna?

2.28. En un cajón hay 10 bombillas, 4 de ellas fundidas. Una lámpara de dos focos alumbra sólo cuando ambas bombillas están en buen estado. ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara no funcione tras haberle colocado dos bombillas elegidas al azar del cajón?

2.29. Se lanzan tres monedas perfectas y se consideran los sucesos A, *obtener el mismo resultado, al menos, con la primera y la segunda*, B, *obtener el mismo resultado, al menos, con la segunda y la tercera*, y C, *obtener el mismo resultado, al menos, con la primera y la tercera*. Demuéstrese que los sucesos A, B y C son independientes dos a dos, pero no mutuamente independientes.

2.30. Se sabe que en la mujeres embarazadas el resultado de la prueba de la rana es negativo el 5 % de los casos. Habiendo obtenido positivo, una mujer sospecha que está embarazada con probabilidad 0.95. ¿Qué juicio merece esta sospecha?

2.31. En una pecera hay 10 peces rojos y 8 verdes. Un niño travieso captura con una red 5 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 4 del mismo color?

2.32. Una empresa cuenta con tres máquinas. La máquina A no tiene ningún sistema de seguridad, dejando de funcionar cuando se presenta el primer fallo en el mecanismo. En cambio, las máquinas B y C tienen un sistema de seguridad que les permite resistir uno o dos fallos, respectivamente, antes de dejar de funcionar. Se supone que la resistencia al fallo es la misma en las tres máquinas. Sabiendo que hasta el momento sólo se ha detectado un fallo en la máquina B, ¿cuál es la probabilidad de que la primera máquina que deje de funcionar sea la C?

2.33. En una estantería hay 50 libros de Historia y 62 de Estadística. Se eligen dos libros al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de Estadística? Si sabemos que uno es de Estadística, ¿cuál es la probabilidad de que ambos lo sean?

2.34. Demuéstrese que es más probable obtener por lo menos un as con cuatro dados, que por lo menos un doble as en veinticuatro tiradas de dos dados (paradoja de Méré).

2.35. Una urna contiene seis bolas blancas, tres negras y dos rojas. Dos de las bolas blancas están numeradas. Se sacan dos bolas de la urna:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean del mismo color?

b) Si son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad que sean blancas?

c) Si son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una esté numerada?

2.36. Se tira un dado normal dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones sea un número par? ¿Y la probabilidad de que al menos una de las puntuaciones sea mayor que cuatro?

2.37. Tres aventureros deben elegir a uno de ellos para una misión arriesgada. Para ello, toman una urna con dos bolas blancas y una negra y extraen cada uno sucesivamente una bola sin reemplazamiento. El elegido será el que escoja la bola negra. Demuéstrese que todos tienen la misma probabilidad de que les toque, sea cual sea el orden en que efectúen las extracciones.

2.38. Una empresa tiene preferencia por los varones a la hora de elegir sus empleados; en concreto, en el 70 % de las contrataciones se ha elegido un varón. Se ha formado un comité de seguridad e higiene formado por 20 personas elegidas aleatoriamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos la mitad sean hombres?

2.39. Un jugador, de los cinco que van a disputar una partida con una baraja española, reparte todas las cartas. ¿Cuál es probabilidad de que reciba al menos seis cartas del mismo palo?

2.40. Cada vez que un cliente compra un tubo de pasta de dientes, elige la marca A o la marca B. Supóngase que la probabilidad de que elija la misma marca que en la compra anterior es $1/3$. Si la primera marca que adquiere es A, ¿cuál es la probabilidad de que la quinta compra sea de la marca B?

2.41. Un contable tiene sobre su mesa dos grupos de 20 facturas cada uno. En el primer lote hay dos facturas con errores de cálculo y en el segundo tres.

Una corriente de aire hace que las facturas caigan de la mesa y, al recogerlas, una del primer grupo se confunde entre las del segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que, al revisar una factura del segundo grupo, encuentre un error?

2.42. Un test rápido sobre el contenido alcohólico en la sangre de un conductor, realizado por la policía en la carretera, es fiable en el 80 % de las ocasiones. Los conductores que dan positivo son sometidos por un médico a un test más preciso, que nunca falla en un conductor sobrio, pero que tiene un 10 % de error en los embriagados.

Sabiendo que el 5 % de los conductores detenidos por la policía está embriagado:

a) ¿Qué proporción de conductores detenidos será sometida a un segundo test?

b) Un conductor dio negativo en el segundo test. ¿Cuál es la probabilidad de que condujese con un contenido de alcohol en sangre mayor del legal?

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 2.1.
Sin más que tener en cuenta la definición,

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(C \cap B)}{p(B)} = p(C \mid B)\,.$$

Este resultado ilustra el hecho de que la probabilidad condicionada, $p(A \mid B)$, depende sólo de los sucesos B y $A \cap B$.

Ejercicio 2.2.
La probabilidad de A se relaciona con la de $A \cup B$ en la forma,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)\,.$$

Calculemos previamente la probabilidad de $A \cap B$ por la regla de la multiplicación:

$$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A \mid B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15\,.$$

Entonces,

$$p(A) = p(A \cup B) - p(B) + p(A \cap B) = 0.6 - 0.3 + 0.15 = 0.45\,.$$

Ejercicio 2.3.
a) Esta afirmación es falsa. Aplicando la regla de la multiplicación,

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B \mid A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq 0\,,$$

de donde se deduce que $A \cap B \neq \emptyset$, es decir, A y B no son mutuamente excluyentes.

b) La segunda afirmación es verdadera. Desarrollemos la expresión:

$$p(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = \frac{p(\overline{A}\cap\overline{B})}{p(\overline{B})} = \frac{p(\overline{A\cup B})}{p(\overline{B})} = \frac{1-p(A\cup B)}{1-p(B)} = \\ = \frac{1-[p(A)+p(B)-p(A\cap B)]}{1-p(B)}\,.$$

Sabemos que $p(A)=1/4$ y $p(A\cap B)=1/8$ (calculada en el apartado anterior). Sólo falta obtener la probabilidad de B. Ahora bien,

$$p(A\,|\,B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}\,,$$

de donde

$$p(B) = \frac{p(A\cap B)}{p(A\,|\,B)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}\,.$$

Sin más que sustituir,

$$p(\overline{A}\,|\,\overline{B}) = \frac{1-(1/4+1/2-1/8)}{1-1/2} = \frac{3}{4}\,.$$

c) La afirmación es falsa. Así, considerando que, como se vio en el apartado anterior, $p(\overline{A}\,|\,\overline{B})=3/4$,

$$p(A\,|\,B)+p(A\,|\,\overline{B}) = p(A\,|\,B)+\left[1-p(\overline{A}\,|\,\overline{B})\right] = \frac{1}{4}+\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\neq 1\,.$$

Ejercicio 2.4.
Siguiendo la sugerencia, consideremos el espacio muestral $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, finito y equiprobable, asociado al experimento de lanzar un dado normal. Consideremos los sucesos A, *obtener par*, B, *obtener un dos*, y C, *obtener un número primo*, es decir,

$$A=\{2,4,6\}\,,\quad B=\{2\}\quad\text{y}\quad C=\{1,2,3,5\}\,.$$

Entonces, la ocurrencia de B se da en un caso entre seis y, por la regla de LAPLACE,

$$p(B)=\frac{1}{6}\,.$$

Asimismo, la ocurrencia de B sabiendo que ocurrió A se produce en un caso entre tres,

$$p(B\,|\,A)=\frac{1}{3}\,.$$

Por tanto,

$$p(B\,|\,A)\geq p(B)\,.$$

Igualmente,

$$p(C) = \frac{4}{6}$$

y, dado que, si ocurre B, también ocurre C,

$$p(C \mid B) = 1\,,$$

entonces,

$$p(C \mid B) \geq p(C)\,.$$

Sin embargo, sabiendo que ocurrió A, la ocurrencia de C se produce en un caso de tres,

$$p(C \mid A) = \frac{1}{3}$$

y, por consiguiente,

$$p(C \mid A) < p(C)\,.$$

En otras palabras, la ocurrencia de *par* aumenta la ocurrencia de *dos* y ésta aumenta la de *primos*; en cambio, la ocurrencia de *par* no aumenta, sino que disminuye, la ocurrencia de *primos*. (El lector puede calcular las distintas probabilidades condicionadas como cociente entre la probabilidad de la intersección y la de la condición, cálculos éstos más farragosos.)

Ejercicio 2.5.
Sabemos que la probabilidad de que *el avión lleve al menos una bomba* es 0.1,

$$p(A) = 0.1\,,$$

siendo 0.01 la probabilidad de que *el avión lleve al menos dos bombas*,

$$p(B) = 0.01\,.$$

Entonces, sabiendo que hay *al menos una bomba* (la que lleve el pasajero), la probabilidad de que haya *al menos otra* es

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(B)}{p(A)} = \frac{0.01}{0.1} = 0.1\,.$$

Por tanto,

$$p(B \mid A) = p(A)\,,$$

con lo cual el hecho de que el pasajero miedoso lleve su propia bomba (¡que suponemos no hará explotar!), no reducirá el riesgo de explosión. En otras palabras, el viajero, no muy avezado en Estadística, confunde $p(B)$ con $p(B \mid A)$.

Ejercicio 2.6.
El espacio muestral asociado al experimento de elegir a un estudiante de COU y observar si es mujer u hombre y qué tipo de enseñanza recibe, está formado por 6 puntos muestrales:

ω_1, *ser mujer y recibir enseñanza de ciencias,*
ω_2, *ser mujer y recibir enseñanza de letras,*
ω_3, *ser mujer y recibir enseñanza mixta,*
ω_4, *ser hombre y recibir enseñanza de ciencias,*
ω_5, *ser hombre y recibir enseñanza de letras,* y
ω_6, *ser hombre y recibir enseñanza mixta.*

Designemos por C, L, X y M a los sucesos *recibir enseñanza de ciencias*, *enseñanza de letras*, *enseñanza mixta* y *ser mujer*, respectivamente. Entonces,

$$C = \{\omega_1, \omega_4\},$$
$$L = \{\omega_2, \omega_5\},$$
$$X = \{\omega_3, \omega_6\} \quad \text{y}$$
$$M = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Las probabilidades que conocemos relativas a estos sucesos son:

$$p(C) = 0.40, \quad p(L) = 0.25, \quad p(X) = 0.35,$$
$$p(M \mid C) = 0.40, \quad p(M \mid L) = 0.60 \quad \text{y} \quad p(M \mid X) = 0.55.$$

a) A partir de la información anterior se desea conocer la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea *de ciencias y mujer*. Por la regla de la multiplicación,

$$p(\omega_1) = p(C \cap M) = p(C) \cdot p(M \mid C) = 0.40 \cdot 0.40 = 0.16.$$

b) Para hallar la probabilidad de que *sea mujer* se aplica el teorema de la probabilidad total, esto es,

$$p(M) = p(C) \cdot p(M \mid C) + p(L) \cdot p(M \mid L) + p(X) \cdot p(M \mid X) = 0.5025,$$

es decir, el 50.25 % de los alumnos de COU son mujeres.

c) Si el estudiante elegido es mujer, aplicando el teorema de BAYES puede calcularse la probabilidad de que sea del grupo de ciencias,

$$p(C \mid M) = \frac{p(C) \cdot p(M \mid C)}{p(C) \cdot p(M \mid C) + p(L) \cdot p(M \mid L) + p(X) \cdot p(M \mid X)} = 0.3184,$$

esto es, el 31.84 % de las estudiantes de COU ha elegido la opción de ciencias.

Este problema se puede plantear de forma más cómoda y natural modelizando el experimento como un experimento compuesto: un primer experimento que recoja la observación del tipo de enseñanza del alumno elegido y un segundo experimento que recoja el sexo del mismo. Así, nos referiremos al suceso del experimento compuesto *ser de ciencias y mujer* como (C, M) o, sencillamente, $(C\,M)$, calculando ésta y otras probabilidades

con los mismos razonamientos y consiguiendo, obviamente, los mismos resultados. Así,

$$p(C\,M) = p(C) \cdot p(C \mid M) = 0.40 \cdot 0.40 = 0.16\,,$$

si bien, aunque sólo sea formalmente, en el primer planteamiento, C y M son sucesos de un mismo espacio y $p(C \mid M)$ la probabilidad de C condicionada por M, mientras que en el segundo planteamiento, C es un suceso del primer experimento y M del segundo, siendo $p(C \mid M)$ la probabilidad de C cuando en el primer experimento ocurrió M, es decir, una probabilidad de transición.

En los sucesivos ejercicios de este tipo seguiremos este segundo planteamiento, sin detenernos en consideraciones formales.

Ejercicio 2.7.

a) Si A y B son independientes, la probabilidad de $A \cup B$ es:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B)\,.$$

Sustituyendo,

$$0.8 = 0.3 + p - 0.3p\,,$$

de donde se deduce el valor de p para el cual A y B son independientes: $p = 0.71$.

b) Si A y B son disjuntos,

$$p(A \cap B) = 0\,.$$

Por tanto,

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)\,,$$

es decir,

$$p(B) = p(A \cup B) - p(A) = 0.5\,.$$

En consecuencia, la condición necesaria, pero no suficiente, para que A y B sean disjuntos es que $p(B)$ sea 0.5.

Ejercicio 2.8.

Como A y B son disjuntos,

$$p(A \cap B) = 0\,.$$

Al ser ambos de probabilidad no nula,

$$p(A) \cdot p(B) \neq 0\,.$$

Por tanto, $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$, esto es, A y B son sucesos dependientes.

Ejercicio 2.9.

a) Dado que podemos suponer que el espacio muestral es finito (40 cartas) y equiprobable, calcularemos las probabilidades de los distintos sucesos utilizando la regla de LAPLACE:

$$p(F) = \frac{12}{40}, \qquad p(R) = \frac{4}{40}, \qquad p(E) = \frac{10}{40} \quad \text{y} \quad p(O) = \frac{10}{40}\,.$$

Si hallamos las probabilidades condicionadas y las comparamos con las anteriores,

$$p(R \mid F) = \frac{4}{12} \neq p(R) = \frac{4}{40}\,,$$

$$p(R \mid E) = \frac{1}{10} = p(R) = \frac{4}{40} \quad \text{y}$$

$$p(E \mid O) = 0 \neq p(E) = \frac{10}{40}\,.$$

De aquí se deduce que los sucesos R y E son independientes, mientras que, tanto los sucesos R y F, como los sucesos E y O, son dependientes. En concreto, la ocurrencia de *rey* resulta favorecida por la de *figura*, en cambio, la ocurrencia de *espada* resulta perjudicada por la de *oros* (aún más, la ocurrencia de *oros* hace imposible la del suceso *espadas*).

Estos resultados pueden obtenerse, también, estudiando si la probabilidad de la intersección de los dos sucesos es igual o no al producto de sus probabilidades. Por ejemplo,

$$p(R \cap E) = \frac{1}{40}$$

y, por tanto,

$$p(R \cap E) = p(R) \cdot p(E)\,,$$

es decir, R y E son independientes.

Obsérvese, por otro lado, que los sucesos R y E son independientes pero no disjuntos, mientras que E y O son disjuntos pero dependientes.

b) Si la baraja ha perdido el as de espadas, el espacio muestral está formado por las 39 cartas restantes, con lo cual

$$p(F) = \frac{12}{39}, \qquad p(R) = \frac{4}{39}, \qquad p(E) = \frac{9}{39} \quad \text{y} \quad p(O) = \frac{10}{39}\,.$$

Calculando las correspondientes probabilidades condicionadas,

$$p(R \mid F) = \frac{4}{12} \neq p(R) = \frac{4}{39}\,,$$

$$p(R \mid E) = \frac{1}{9} \neq p(R) = \frac{4}{39} \quad \text{y}$$

$$p(E \mid O) = 0 \neq p(E) = \frac{9}{39}$$

comprobamos que, en este caso, todos los pares de sucesos son dependientes, incluso los sucesos R y E que no lo eran en la baraja normal.

Este ejercicio pone de manifiesto la idea de que la independencia de los sucesos no depende de la naturaleza de los mismos, sino de sus probabilidades.

Ejercicio 2.10.
Si A es de probabilidad nula, A y $\overline{B}$ son, obviamente, independientes, pues un suceso de probabilidad nula es independiente de cualquier otro.

Si A no es de probabilidad nula,

$$p(\overline{B} \mid A) = 1 - p(B \mid A) = 1 - p(B) = p(\overline{B}),$$

pues, al ser A y B independientes, $p(B \mid A) = p(B)$. Por tanto, en ambos casos, A y $\overline{B}$ son independientes.

De lo anterior se deduce que también son independientes $\overline{A}$ y $\overline{B}$, sin más que aplicar a A y a $\overline{B}$ el resultado demostrado.

En particular, los sucesos imposible, $\emptyset$, y seguro, Ω, son independientes de cualquier otro; el primero por ser de probabilidad nula y el segundo por ser el complementario de éste.

Ejercicio 2.11.
Si A y B son independientes, también lo son A y $\overline{B}$, como se prueba en el ejercicio anterior; entonces,

$$p(A \mid B) = p(A)$$

y

$$p(A \mid \overline{B}) = p(A),$$

esto es,

$$p(A \mid B) = p(A \mid \overline{B}).$$

Demostremos la implicación contraria. Así, si se verifica la anterior igualdad, se deduce que

$$\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A \cap \overline{B})}{1 - p(B)}$$

o lo que es lo mismo,

$$p(A \cap B) - p(A \cap B) \cdot p(B) = p(A \cap \overline{B}) \cdot p(B).$$

De esta forma,

$$p(A \cap B) = [p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})] \cdot p(B)$$

y, teniendo en cuenta que A puede descomponerse en la unión de sucesos disjuntos,

$$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B),$$

se obtiene que

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)\,,$$

es decir, A y B son independientes.

Ejercicio 2.12.
Desarrollando el segundo término de la expresión, se obtiene:

$$p(B) \cdot p(C \mid A \cap B) + p(\overline{B}) \cdot p(C \mid A \cap \overline{B}) = p(B) \cdot \frac{p(A \cap B \cap C)}{p(A) \cdot p(B)} + p(\overline{B}) \cdot \frac{p(A \cap \overline{B} \cap C)}{p(A) \cdot p(\overline{B})}\,,$$

sin más que considerar la independencia de A y B y, por tanto, la de A y $\overline{B}$. Simplificando en la última expresión,

$$\frac{p(A \cap B \cap C)}{p(A)} + \frac{p(A \cap \overline{B} \cap C)}{p(A)} = \frac{p(A \cap C)}{p(A)} = p(C \mid A)\,,$$

dado que el suceso $A \cap C$ se puede poner como unión disjunta de $A \cap B \cap C$ y $A \cap \overline{B} \cap C$. Por tanto,

$$p(C \mid A) = p(B) \cdot p(C \mid A \cap B) + p(\overline{B}) \cdot p(C \mid A \cap \overline{B})\,.$$

Ejercicio 2.13.
a) Para que A y $B \cup C$ sean independientes han de cumplir que

$$p[A \cap (B \cup C)] = p(A) \cdot p(B \cup C)\,.$$

Desarrollemos el primer término de la expresión anterior:

$$p[A \cap (B \cup C)] = p[(A \cap B) \cup (A \cap C)] = p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C)\,.$$

Dado que A, B y C son mutuamente independientes, la última parte de la igualdad puede ponerse como

$$\begin{aligned} p(A) \cdot p(B) + p(A) \cdot p(C) - p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \quad &= p(A) \cdot [p(B) + p(C) - p(B \cap C)] = \\ &= p(A) \cdot p(B \cup C)\,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p[A \cap (B \cup C)] = p(A) \cdot p(B \cup C)\,,$$

según queríamos demostrar.

b) Teniendo en cuenta la mutua independencia de A, B y C,

$$p[A \cap (B \cap C)] = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = p(A) \cdot p(B \cap C)\,,$$

de donde se deduce que A y $B \cap C$ son independientes.

Ejercicio 2.14.
Evidentemente, todas las posibles intersecciones de estos sucesos coinciden,

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{1\}\,,$$

siendo las probabilidades de éstos y de sus intersecciones:

$$p(A) = p(B) = p(C) = \frac{1}{2}\,,$$
$$p(A \cap B) = p(A \cap C) = p(B \cap C) = \frac{1}{4} \quad \text{y}$$
$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}\,.$$

Se concluye, entonces, que A, B y C son independientes dos a dos, pues

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)\,,$$
$$p(A \cap C) = p(A) \cdot p(C) \quad \text{y}$$
$$p(B \cap C) = p(B) \cdot p(C)\,,$$

pero no son mutuamente independientes, ya que

$$p(A \cap B \cap C) \neq p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)\,.$$

Ejercicio 2.15.
Dado que A, B, C y D son sucesos mutuamente independientes, la probabilidad de la intersección de cualquier grupo de dichos sucesos es el producto de las probabilidades de los mismos.

a) Hemos de demostrar que

$$p[(A \cap C) \cap (B \cup \overline{D})] = p(A \cap C) \cdot p(B \cup \overline{D})\,.$$

Desarrollando la expresión de la izquierda,

$$\begin{aligned} p[(A \cap C) \cap (B \cup \overline{D})] \; &= \\ &= p[(A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap \overline{D})] = \\ &= p(A \cap C \cap B) + p(A \cap C \cap \overline{D}) - p(A \cap C \cap B \cap \overline{D}) = \\ &= p(A) \cdot p(C) \cdot p(B) + p(A) \cdot p(C) \cdot p(\overline{D}) - p(A) \cdot p(C) \cdot p(B) \cdot p(\overline{D}) = \\ &= p(A) \cdot p(C) \cdot [p(B) + p(\overline{D}) - p(B \cap \overline{D})] = p(A \cap C) \cdot p(B \cup \overline{D})\,, \end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta que, si el suceso D es independiente de otro suceso, también lo es su complementario, $\overline{D}$.

b) La misma independencia de A, B, C y D permite comprobar de modo inmediato que

$$p[(A \cap B) \cap C] = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) = p(A \cap B) \cdot p(C) \,,$$
$$p[(A \cap B) \cap \overline{D}] = p(A) \cdot p(B) \cdot p(\overline{D}) = p(A \cap B) \cdot p(\overline{D}) \quad \text{y}$$
$$p[C \cap \overline{D}] = p(C) \cdot p(\overline{D}) \,,$$

es decir, la probabilidad de la intersección de cualquier grupo de dos sucesos es el producto de sus probabilidades.

Además, siguiendo el mismo razonamiento,

$$p[(A \cap B) \cap C \cap \overline{D}] = p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) \cdot p(\overline{D}) = p(A \cap B) \cdot p(C) \cdot p(\overline{D}) \,.$$

Por tanto, $A \cap B, C$ y $\overline{D}$ son mutuamente independientes.

Ejercicio 2.16.
Busquemos dos subintervalos de una cierta amplitud, por ejemplo $1/2$ y $1/3$, cuya intersección tenga una amplitud y, por tanto, una probabilidad, de $1/2 \cdot 1/3 = 1/6$.

Así, los subintervalos $A = (\frac{1}{6}, \frac{4}{6})$ y $B = (\frac{3}{6}, \frac{5}{6})$, con probabilidades $1/2$ y $1/3$, respectivamente, tienen una intersección, $A \cap B = (\frac{3}{6}, \frac{4}{6})$, cuya probabilidad es $1/6$. Por tanto,

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \,,$$

es decir, A y B son independientes.

Ejercicio 2.17.
La figura 2.1 describe la probabilidad de un subintervalo como el área del trapecio comprendida entre dicho subintervalo y la recta $2y = x$.

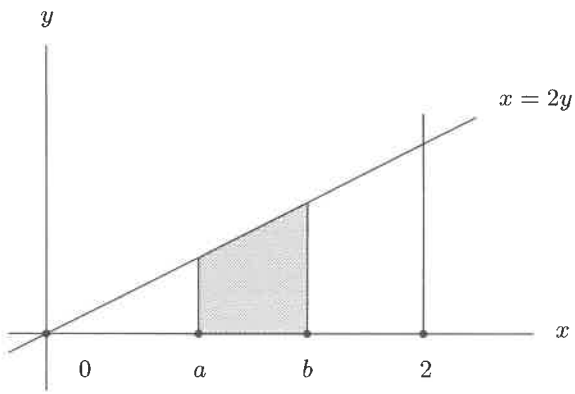


FIG. 2.1.

Por tanto, dado que el área de un trapecio es el producto de la altura por la semisuma de las bases,

$$p[(a,b)] = (b-a)\cdot\left(\frac{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}}{2}\right) = \frac{b^2-a^2}{4}.$$

Busquemos dos trapecios con una cierta área, por ejemplo $1/2$ y $1/4$, cuya intersección tenga un área de $1/2\cdot 1/4 = 1/8$.

Elijamos el primer subintervalo con extremo inferior en cero, esto es, $A = (0,b)$; concretemos el valor de b. Así,

$$p[(0,b)] = \frac{b^2}{4} = \frac{1}{2}$$

y, consecuentemente, $b = \sqrt{2}$. Entonces, $A = (0,\sqrt{2})$.

A continuación, hallemos la intersección de los dos subintervalos con la condición de que su probabilidad sea $1/8$ y su extremo superior $\sqrt{2}$:

$$p(A\cap B) = p[(c,\sqrt{2})] = \frac{2-c^2}{4} = \frac{1}{8},$$

obteniéndose un valor de $c = \sqrt{3/2}$.

Entonces, $A = (0,\sqrt{2})$ y $A\cap B = (\sqrt{3/2},\sqrt{2})$, con lo cual sólo nos queda añadir la parte de B que no está en A, hasta conseguir que $p(B) = 1/4$. De esta forma,

$$p(B) = p[(\sqrt{3/2},d)] = \frac{d^2-\frac{3}{2}}{4} = \frac{1}{4},$$

de donde resulta $d = \sqrt{5/2}$ (véase la figura 2.2).

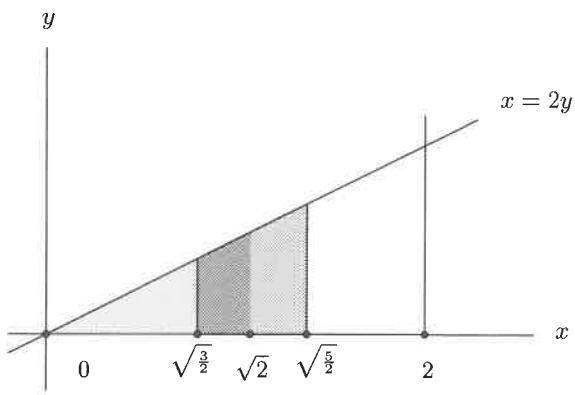


FIG. 2.2.

Por tanto, los sucesos $A = (0, \sqrt{2})$ y $B = (\sqrt{3/2}, \sqrt{5/2})$ son independientes, ya que

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) .$$

Ejercicio 2.18.
Supongamos que existe otra probabilidad, p', distinta a la dada en el enunciado, p, que también verifica

$$\begin{aligned} &p'(A') = p_1(A) , \\ &p'(B') = p_2(B) \quad \text{y} \\ &p'(A' \cap B') = p'(A') \cdot p'(B') . \end{aligned}$$

Entonces, para cualquier $(\omega_i, \tau_j) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} p'[(\omega_i, \tau_j)] \; &= p'[(\{\omega_i\} \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times \{\tau_j\})] = \\ &= p'(\{\omega_i\} \times \Omega_2) \cdot p'(\Omega_1 \times \{\tau_j\}) = p_1(\omega_i) \cdot p_2(\tau_j) , \end{aligned}$$

sin más que aplicar las tres condiciones, que suponemos cumple p', a los sucesos $A = \{\omega_i\}$ y $B = \{\tau_j\}$.

Por tanto, p y p' coinciden, es decir, p es la única que verifica dichas condiciones.

Ejercicio 2.19.
Al igual que en el ejercicio anterior, supongamos que existe otra probabilidad, p', distinta de p, que también verifica:

$$p'(A') = p_1(A)$$

y

$$p'(\tau_j \,|\, \omega_i) = p_{\omega_i}(\tau_j) .$$

Entonces, para cualquier (ω_i, τ_j) de Ω,

$$\begin{aligned} p'[(\omega_i, \tau_j)] \; &= p'[(\{\omega_i\} \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times \{\tau_j\})] = \\ &= p'(\{\omega_i\} \times \Omega_2) \cdot p'(\Omega_1 \times \{\tau_j\} \,|\, \{\omega_i\} \times \Omega_2) = \\ &= p_1(\omega_i) \cdot p'(\tau_j \,|\, \omega_i) = p_1(\omega_i) \cdot p_{\omega_i}(\tau_j) , \end{aligned}$$

sin más que aplicar la primera de las condiciones, $p'(A') = p_1(A)$, al suceso $A = \{\omega_i\}$.

Por tanto, p' coincide con p, es decir, p es única.

Ejercicio 2.20.
Parece lógico que el hecho de que se devuelvan, o no, las bolas a la urna, va a modificar las probabilidades de los distintos sucesos. Es por ello que resolveremos este ejercicio distinguiendo ambas situaciones.

Extracciones con reemplazamiento. Para entender mejor el proceso diferenciaremos las dos etapas en que puede descomponerse el experimento. Consideremos un primer

experimento, E_1, consistente en la primera extracción. El espacio muestral asociado a dicho experimento es

$$\Omega_1 = \{b_1, n_1\} ,$$

donde b_1 y n_1 son los dos posibles resultados de dicho experimento: obtener bola blanca y bola negra, respectivamente. Los subíndices, de los que podríamos haber prescindido, recalcan el hecho de que se trata de resultados del primer experimento. Como es habitual en este tipo de situaciones, utilizaremos la σ-álgebra

$$\mathcal{P}(\Omega_1) = \{\emptyset, \{b_1\}, \{n_1\}, \Omega_1\} .$$

Por tanto, $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ es el espacio probabilizable asociado al primer experimento, al que asignaremos una probabilidad p_1 definida por

$$p_1(b_1) = \frac{2}{5}$$

y

$$p_1(n_1) = \frac{3}{5} ,$$

con lo cual tenemos perfectamente determinado $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), p_1)$, espacio probabilístico asociado al primer experimento.

Por otra parte, al segundo experimento, E_2, consistente en la segunda extracción, le asociaremos el espacio muestral

$$\Omega_2 = \{b_2, n_2\} ,$$

donde b_2 y n_2 representan los dos posibles resultados de la segunda extracción. La σ-álgebra es $\mathcal{P}(\Omega_2)$. Por tanto, $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$ es el espacio probabilizable asociado a E_2, al que asignaremos una probabilidad p_2. Dado que devolvemos la bola obtenida en la primera extracción, realizaremos la segunda bajo las mismas condiciones y, consecuentemente,

$$p_2(b_2) = \frac{2}{5}$$

y

$$p_2(n_2) = \frac{3}{5} .$$

Así, queda determinado el espacio probabilístico $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_2)$ asociado al segundo experimento.

Por último, el experimento compuesto, $E = E_1 \times E_2$, recoge conjuntamente la primera y la segunda extracción. El espacio muestral es el producto cartesiano de los espacios muestrales de los experimentos E_1 y E_2; es decir,

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(b_1, b_2), (b_1, n_2), (n_1, b_2), (n_1, n_2)\} ,$$

donde (b_1, b_2) representa el resultado de obtener bola blanca en la primera y segunda extracción, (b_1, n_2) blanca en la primera y negra en la segunda, etc. La σ-álgebra sobre el

espacio producto es $\mathcal{P}(\Omega)$. Esta σ-álgebra contiene $2^4 = 16$ sucesos, incluidos $\emptyset$ y Ω (véase el ejercicio 1.1).

Entonces, $(\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{P}(\Omega))$ es el espacio probabilizable asociado al experimento compuesto. Asignaremos una probabilidad a los cuatro sucesos elementales de E, teniendo en cuenta que los experimentos son físicamente independientes, es decir, que lo que ocurre en la primera extracción no influye en la segunda. Entonces,

$$p[(b_1, b_2)] = p_1(b_1) \cdot p_2(b_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} ,$$

$$p[(b_1, n_2)] = p_1(b_1) \cdot p_2(n_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25} ,$$

$$p[(n_1, b_2)] = p_1(n_1) \cdot p_2(b_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \quad \text{y}$$

$$p[(n_1, n_2)] = p_1(n_1) \cdot p_2(n_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} ,$$

esto es, la probabilidad conjunta queda determinada por el producto de las probabilidades marginales.

a) Una vez asignada la probabilidad a los sucesos elementales, queda determinada la probabilidad de cualquier otro suceso. Así, la probabilidad del suceso *obtener al menos una bola blanca*, $\{(b_1, b_2)\}, (b_1, n_2), (n_1, b_2)\}$, suceso que depende de los dos experimentos, es

$$\begin{aligned} p(\text{obtener al menos una bola blanca}) &= p[(b_1, b_2), (b_1, n_2), (n_1, b_2)] = \\ &= p[(b_1, b_2)] + p[(b_1, n_2)] + p[(n_1, b_2)] = \\ &= \frac{4}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{16}{25} . \end{aligned}$$

b) De la misma forma, la probabilidad de *obtener bola blanca en la primera extracción*, $\{(b_1, b_2), (b_1, n_2)\} = \{b_1\} \times \Omega_2$, es

$$p(\text{obtener bola blanca en la primera extracción}) = p[(b_1, b_2), (b_1, n_2)] = \frac{10}{25} .$$

Adviértase que este suceso sólo depende del primer experimento, con lo cual podemos calcular su probabilidad en dicho experimento, es decir,

$$p_1(b_1) = \frac{2}{5} .$$

c) Por último, la probabilidad de *obtener bola blanca en la segunda extracción*, habiendo *obtenido bola blanca en la primera* es

$$p[\{(b_1, b_2), (n_1, b_2)\} \mid \{(b_1, b_2), (b_1, n_2)\}] = \frac{p[(b_1, b_2)]}{p[(b_1, b_2), (b_1, n_2)]} = \frac{4/25}{10/25} = \frac{2}{5} ,$$

probabilidad que coincide con la de *obtener bola blanca en la segunda extracción*,

$$p[(b_1, b_2), (n_1, b_2)] = \frac{2}{5}$$

o

$$p_2(b_2) = \frac{2}{5}.$$

Por tanto, los sucesos *obtener bola blanca en la primera extracción* y *obtener bola blanca en la segunda* son independientes, pues el primero sólo depende del experimento E_1 y el segundo del E_2, experimentos éstos independientes.

Extracciones sin reemplazamiento. Si realizáramos las dos extracciones sin reemplazamiento no cambiaría la descomposición del experimento en dos, así como los espacios probabilizables asociados a E_1, E_2 y $E = E_1 \times E_2$. Además, el cálculo de probabilidades identifica el experimento en el que las dos bolas se extraen de forma sucesiva sin reemplazamiento, con aquel en el que las bolas se extraen simultáneamente, siendo preferible asumir la primera opción al ser más clarificadora. En los problemas 2.31 y 2.33 utilizaremos nuevamente esta idea.

El primer experimento, E_1, tiene asignada la misma probabilidad,

$$p_1(b_1) = \frac{2}{5}$$

y

$$p_1(n_1) = \frac{3}{5},$$

pues en esta fase inicial no influye la relación entre la primera y la segunda extracción; es decir, el hecho de que no devolvamos la bola obtenida en la primera, cambia la composición de la urna para la segunda extracción, pero no influye en la determinación del espacio probabilístico en esta fase inicial. De esta forma queda determinado $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), p_1)$, espacio probabilístico asociado a E_1.

A continuación, parecería lógico que tratásemos de determinar la probabilidad asociada al experimento E_2. Ahora bien, a la hora de asignar esta probabilidad debemos tener en cuenta que las condiciones en que se realiza este experimento vienen determinadas por lo ocurrido en el primer experimento. Es decir, tendremos que considerar los dos experimentos de forma conjunta. Por tanto, abordaremos, previamente, la asignación de probabilidad en el experimento compuesto, $E = E_1 \times E_2$.

Al igual que cuando las extracciones se realizaban con devolución, determinaremos las probabilidades de los cuatro sucesos elementales. Previamente, tendremos en cuenta las probabilidades de transición, es decir, las probabilidades de la segunda extracción dependiendo de lo ocurrido en la primera. La naturaleza del experimento y la secuencia temporal del mismo, permiten calcular estas probabilidades de forma sencilla. Así, cuando sale bola blanca en la primera extracción, la urna en la que se realiza la segunda está compuesta por una bola blanca y tres negras. Entonces,

$$p_{b_1}(b_2) = \frac{1}{4}$$

y

$$p_{b_1}(n_2) = \frac{3}{4} .$$

Lógicamente, esta probabilidad de transición está definida sobre $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$, es decir, constituye el espacio probabilístico $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_{b_1})$.

Si sale bola negra en la primera extracción, las probabilidades de transición son

$$p_{n_1}(b_2) = \frac{2}{4}$$

y

$$p_{n_1}(n_2) = \frac{2}{4} ,$$

concretándose el espacio probabilístico $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_{n_1})$.

Halladas estas probabilidades, podemos calcular ya las de los sucesos elementales del experimento compuesto:

$$p[(b_1, b_2)] = p_1(b_1) \cdot p_{b_1}(b_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} ,$$

$$p[(b_1, n_2)] = p_1(b_1) \cdot p_{b_1}(n_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} ,$$

$$p[(n_1, b_2)] = p_1(n_1) \cdot p_{n_1}(b_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} \quad \text{y}$$

$$p[(n_1, n_2)] = p_1(n_1) \cdot p_{n_1}(n_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} ,$$

probabilidades conjuntas que se obtienen, cada una de ellas, mediante el producto de una probabilidad marginal por una probabilidad de transición.

Una vez determinado el espacio probabilístico, $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$, en el experimento compuesto, podemos calcular las probabilidades en el segundo experimento, E_2. La coherencia que debe exigirse a estas asignaciones de probabilidad obliga a definir la probabilidad de un suceso en E_2 a partir de la probabilidad del mismo suceso en E. De esta forma,

$$p_2(b_2) = p[(b_1, b_2), (n_1, b_2)] = \frac{8}{20}$$

y

$$p_2(n_2) = p[(b_1, n_2), (n_1, n_2)] = \frac{12}{20} .$$

De este modo determinamos el espacio probabilístico asociado al segundo experimento, $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), p_2)$.

a) Entonces, la probabilidad de *obtener al menos una bola blanca* es

$$p(\text{obtener al menos una bola blanca}) = p[(b_1, b_2), (b_1, n_2), (n_1, b_2)] =$$

$$= p[(b_1, b_2)] + p[(b_1, n_2)] + p[(n_1, b_2)] =$$

$$= \frac{2}{20} + \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{7}{10} .$$

b) De igual forma, la probabilidad de *obtener bola blanca en la primera extracción* es

$$p(\text{obtener bola blanca en la primera extracción}) = p[(b_1, b_2), (b_1, n_2)] = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} .$$

Dado que este último suceso sólo depende del primer experimento, su probabilidad puede calcularse, también, en E_1:

$$p_1(b_1) = \frac{2}{5} .$$

c) Para concluir, hallemos la probabilidad de *obtener bola blanca en la segunda extracción*, habiendo *obtenido blanca en la primera*,

$$p[\Omega_1 \times \{b_2\} \mid \{b_1\} \times \Omega_2] = \frac{p[(\Omega_1 \times \{b_2\}) \cap (\{b_1\} \times \Omega_2)]}{p[\{b_1\} \times \Omega_2]} = \frac{p[(b_1, b_2)]}{p[(b_1, b_2), (b_1, n_2)]} =$$

$$= \frac{2/20}{8/20} = \frac{1}{4} = p_{b_1}(b_2) .$$

La complejidad de las notaciones obliga a simplificarlas, siempre que ello no induzca a confusión. Así, la probabilidad de *obtener bola blanca en la primera extracción y negra en la segunda* puede escribirse como

$$p[(b_1, n_2)] = p(b_1) \cdot p(n_2 \mid b_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} ,$$

que no es otra cosa que el resultado de aplicar la regla de la multiplicación en el experimento compuesto, simplificando las notaciones de sucesos y probabilidades, al designar por $p(b_1)$ a $p_1(b_1)$ o, lo que es lo mismo, a $p[\{b_1\} \times \Omega_2]$, y por $p(n_2 \mid b_1)$ a $p_{b_1}(n_2)$ o, lo que es igual, a $p[\Omega_1 \times \{n_2\} \mid \{b_1\} \times \Omega_2]$.

De igual modo, si sabemos que se ha *obtenido bola negra en la segunda extracción*, la probabilidad de que en *la primera saliese blanca* es

$$p(b_1 \mid n_2) = \frac{p[(b_1, n_2)]}{p(n_2)} = \frac{p(b_1) \cdot p(n_2 \mid b_1)}{p(b_1) \cdot p(n_2 \mid b_1) + p(n_1) \cdot p(n_2 \mid n_1)} = \frac{1}{2} ,$$

sin más que aplicar el teorema de BAYES a los sucesos del experimento compuesto.

En todos los ejercicios posteriores, para clarificar los procesos sin pérdida de formalización, utilizaremos estas notaciones simplificadas u otras similares (por ejemplo, al suceso (b_1, n_1) podremos designarlo también, como $(B_1 N_1)$ o, simplemente, $(B\,N)$).

Ejercicio 2.21.
Teniendo en cuenta que $A \times B = \{(\omega_i, \tau_j) \,|\, \omega_i \in A \quad \text{y} \quad \tau_j \in B\}$ y la independencia de los dos experimentos,

$$p(A \times B) = \sum_{\omega_i \in A} \sum_{\tau_j \in B} p[(\omega_i, \tau_j)] = \sum_{\omega_i \in A} \sum_{\tau_j \in B} p_1(\omega_i) \cdot p_2(\tau_j) =$$
$$= \sum_{\omega_i \in A} p_1(\omega_i) \sum_{\tau_j \in B} p_2(\tau_j) = p_1(A) \cdot p_2(B)\,,$$

según queríamos demostrar.

Ejercicio 2.22.
Designamos por A y C a los sucesos *Arenal presenta oferta* y *Cementasa gana el contrato*, respectivamente. La información de que disponemos sobre estos sucesos es:

$$p(A) = 0.70, \quad p(C \,|\, \overline{A}) = 0.5 \quad \text{y} \quad p(C \,|\, A) = 0.25\,.$$

a) La probabilidad de que *Cementasa gane el contrato*, se presente o no Arenal, es

$$p(C) = p(\overline{A}) \cdot p(C \,|\, \overline{A}) + p(A) \cdot p(C \,|\, A) = 0.325\,,$$

resultado de aplicar al suceso C el teorema de la probabilidad total.

b) Si *Cementasa gana el contrato*, la probabilidad de que *Arenal no haya presentado oferta* es

$$p(\overline{A} \,|\, C) = \frac{p(\overline{A}\, C)}{p(C)} = \frac{p(\overline{A}) \cdot p(C \,|\, \overline{A})}{p(\overline{A}) \cdot p(C \,|\, \overline{A}) + p(A) \cdot p(C \,|\, A)} = 0.46\,,$$

resultado proporcionado por el teorema de Bayes.

Ejercicio 2.23.
Denotemos por A, B y C a los sucesos *tener suscrita una póliza en la compañía A, en la B* y *en la C*, respectivamente, y por V al suceso *la póliza suscrita es de seguros de vida.* Entonces, sabemos que

$$p(A) = 0.30\,, \quad p(B) = 0.25\,, \quad p(C) = 0.45\,,$$

$$p(V \,|\, A) = 0.15\,, \quad p(V \,|\, B) = 0.20 \quad \text{y} \quad p(V \,|\, C) = 0.25\,.$$

a) La proporción de *pólizas de seguros de vida* se obtiene aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$p(V) = p(A) \cdot p(V \,|\, A) + p(B) \cdot p(V \,|\, B) + p(C) \cdot p(V \,|\, C) = 0.21\,.$$

b) La probabilidad de que *un seguro de vida suscrito sea de la compañía A* es

$$p(A \,|\, V) = \frac{p(A) \cdot p(V \,|\, A)}{p(V)} = 0.22\,.$$

Ejercicio 2.24.
Designemos por B el suceso *extraer bola blanca* y por J y P los sucesos *Juan afirma que la bola extraída es blanca* y *Pedro afirma que es blanca*, respectivamente. Aplicando el teorema de BAYES, se calcula la probabilidad de que sea blanca si ambos así lo afirmaron:

$$p(B \mid J, P) = \frac{p(B) \cdot p(J, P \mid B)}{p(B) \cdot p(J, P \mid B) + p(\overline{B}) \cdot p(J, P \mid \overline{B})}.$$

Las probabilidades de *obtener bola blanca* y de *obtener bola negra* son 5/25 y 20/25, respectivamente. Por otro lado, la probabilidad de que *Juan y Pedro digan que la bola es blanca* cuando la *bola obtenida es blanca* es la probabilidad de que *ambos digan la verdad* que, suponiendo que sus afirmaciones son independientes, es $(9/10) \cdot (7/9)$, es decir, 7/10. De igual forma, la probabilidad de que *Juan y Pedro digan que es blanca* cuando la *bola es negra*, esto es, la probabilidad de que *ambos mientan* es $(1/10) \cdot (2/9) = 1/45$.

De esta forma,

$$p(B \mid J, P) = \frac{\frac{5}{25} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{5}{25} \cdot \frac{7}{10} + \frac{20}{25} \cdot \frac{1}{45}} = 0.89.$$

Ejercicio 2.25.
Sea D_i el suceso *el error está en el i-ésimo documento del lote* $(i = 1, \ldots, 10)$. Entonces, la probabilidad de que el error no esté en el lote una vez se han inspeccionado los nueve documentos sin encontrarlo, es

$$p(\overline{D}_{10} \mid \overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_9) = \frac{p(\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_{10})}{p(\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_9)}.$$

Obviamente el suceso $\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_{10}$, *no encontrarse el error en ninguno de los diez documentos*, coincide con el suceso $\overline{L}$, *no encontrarse en el lote*, por lo que

$$p(\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_{10}) = p(\overline{L}) = 1 - p(L) = 0.95.$$

Por otra parte, por el teorema de la probabilidad total,

$$\begin{aligned} p(\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_9) &= p(L) \cdot p(\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_9 \mid L) + p(\overline{L}) \cdot p(\overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_9 \mid \overline{L}) = \\ &= 0.05 \cdot 0.1 + 0.95 \cdot 1 = 0.955, \end{aligned}$$

pues si el error está en el lote, la probabilidad de que no esté en los 9 primeros documentos es la de que esté en el décimo.

Por tanto,

$$p(\overline{D}_{10} \mid \overline{D}_1\, \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_9) = \frac{0.95}{0.955} = 0.995.$$

Ejercicio 2.26.
Calculemos, en primer lugar, la probabilidad de *obtener cara*, c, y de *obtener cruz*, z, con esta moneda; obviamente,

$$p(c) + p(z) = 2 \cdot p(z) + p(z) = 1,$$

de donde se deduce que $p(z) = 1/3$ y $p(c) = 2/3$.

Hallemos, ahora, la probabilidad de *no obtener ninguna cara al tirar* 10 *veces la moneda*, sin más que tener en cuenta que el resultado de una tirada no influye en las otras. Entonces,

$$p[(z_1, z_2, \ldots, z_{10})] = p(z_1) \cdot p(z_2) \cdots p(z_{10}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 1.693 \cdot 10^{-5},$$

siendo z_i el suceso elemental *obtener cruz en el i-ésimo lanzamiento*, $(i = 1, \ldots, 10)$.

Ejercicio 2.27.
Designando por B_i y N_i a los sucesos *obtener bola blanca* y *obtener bola negra*, sabemos que

$$p(B_1\, B_2) = \frac{1}{11}.$$

Ahora bien, de las 12 bolas de la urna, n_B son blancas y n_N negras $(n_B + n_N = 12)$. Entonces, teniendo en cuenta que las extracciones son sin reemplazamiento,

$$p(B_1\, B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2 \mid B_1) = \frac{n_B}{12} \cdot \frac{n_B - 1}{11}.$$

De las dos igualdades anteriores se deduce que

$$n_B \cdot (n_B - 1) = 12$$

o, lo que es lo mismo,

$$n_B^2 - n_B - 12 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, resulta que el número de bolas blancas que hay en la urna, n_B, es 4 (la otra solución de la ecuación, -3, no tiene, obviamente, sentido). Por tanto, hay 8 bolas negras en la urna.

Ejercicio 2.28.
La probabilidad del suceso complementario, esto es, de que *la lámpara funcione*, es la de *elegir dos bombillas en buen estado*:

$$p(\text{la lámpara funcione}) = p(\overline{F}_1\, \overline{F}_2),$$

donde designamos por F_i al suceso elemental *elegir una bombilla fundida* en la i-ésima elección $(i = 1, 2)$. Las dos elecciones son dependientes; en otros términos, elegimos sin reemplazamiento, dado que ha de haber dos bombillas en la lámpara. Entonces,

$$p(\overline{F}_1\, \overline{F}_2) = p(\overline{F}_1) \cdot p(\overline{F}_2 \mid \overline{F}_1) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, la probabilidad de que la lámpara no funcione es

$$p(\text{la lámpara no funcione}) = 1 - p(\overline{F}_1\, \overline{F}_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio 2.29.
Calculemos la probabilidad de A, *obtener el mismo resultado, al menos con, la primera y la segunda moneda*:

$$A = \{(c_1, c_2, c_3),\ (c_1, c_2, z_3),\ (z_1, z_2, c_3),\ (z_1, z_2, z_3)\},$$

donde c_i y z_i designan los resultados *obtener cara* y *obtener cruz* con la i-ésima moneda ($i = 1, 2, 3$). Por tanto, y teniendo en cuenta que los resultados del lanzamiento de cada una de las monedas son independientes,

$$p(A) = p[(c_1, c_2, c_3)] + p[(c_1, c_2, z_3)] + p[(z_1, z_2, c_3)] + p[(z_1, z_2, z_3)] = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

De la misma manera, obtendríamos las probabilidades

$$B = \{(c_1, c_2, c_3),\ (z_1, c_2, c_3),\ (c_1, z_2, z_3),\ (z_1, z_2, z_3)\}$$

y

$$C = \{(c_1, c_2, c_3),\ (c_1, z_2, c_3),\ (z_1, c_2, z_3),\ (z_1, z_2, z_3)\},$$

que son:

$$p(B) = p(C) = \frac{1}{2}.$$

A continuación, calculemos las intersecciones dos a dos,

$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \{(c_1, c_2, c_3),\ (z_1, z_2, z_3)\},$$

cuyas probabilidades son

$$p(A \cap B) = p(B \cap C) = p(C \cap A) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Evidentemente,

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= p(A) \cdot p(B), \\ p(B \cap C) &= p(B) \cdot p(C) \quad \text{y} \\ p(C \cap A) &= p(C) \cdot p(A). \end{aligned}$$

De esta forma hemos demostrado que A, B y C son sucesos independientes dos a dos.

Por el contrario, como

$$A \cap B \cap C = \{(c_1, c_2, c_3),\ (z_1, z_2, z_3)\}$$

y

$$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4},$$

los sucesos no son mutuamente independientes, pues

$$p(A \cap B \cap C) \neq p(A) \cdot p(B) \cdot p(C) .$$

Ejercicio 2.30.
Podemos considerar dos experimentos: la prueba de la rana y el estado de embarazo, o no, de la mujer. El primer experimento sólo admite dos posibles resultados, dar *positivo*, P, o *negativo*, $\overline{P}$, al igual que el segundo, *estar embarazada*, E, o *no estarlo*, $\overline{E}$. Sabemos que, entre las mujeres embarazadas, la prueba da negativo (por tanto, falla) en el 5 % de los casos, es decir,

$$p(\overline{P} \mid E) = 0.05 .$$

De este dato, lo único que puede deducirse es que la probabilidad de que la prueba sea positiva en una mujer embarazada es 0.95,

$$p(P \mid E) = 0.95 ,$$

pero nunca podremos deducir que, habiendo dado positivo, la probabilidad de estar embarazada sea 0.95. De hecho, no tenemos información sobre $p(E \mid P)$ y, en general,

$$p(E \mid P) \neq p(P \mid E) .$$

Ejercicio 2.31.
De acuerdo con el comentario realizado en el ejercicio 2.20, puede considerarse que el niño hace 5 extracciones sin reemplazamiento (ningún pez capturado es devuelto), en una pecera con un total de 18 peces, 10 rojos y 8 verdes. Entonces, la probabilidad de *capturar exactamente* 4 *peces del mismo color* es

$$p(4 \text{ del mismo color}) = p(4 \text{ rojos}) + p(4 \text{ verdes}) .$$

Calculemos, en primer lugar, la probabilidad de *capturar* 4 *peces rojos y* 1 *verde*; uno de los posibles sucesos es aquel en que las cuatro primeras capturas son de pez rojo y la última de pez verde. Designando por R_i y V_i a los sucesos *capturar pez rojo* y *capturar pez verde* en la i-ésima extracción ($i = 1, 2, 3, 4, 5$),

$$\begin{aligned} p(R_1 R_2 R_3 R_4 V_5) &= \\ &= p(R_1) \cdot p(R_2 \mid R_1) \cdot p(R_3 \mid R_1 R_2) \cdot p(R_4 \mid R_1 R_2 R_3) \cdot p(V_5 \mid R_1 R_2 R_3 R_4) = \\ &= \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{14} = \frac{2}{51} , \end{aligned}$$

dado que las extracciones son sin devolución, es decir, dependientes. Ahora bien, no es ésta la única forma de obtener 4 peces rojos y 1 verde; hay tantos sucesos, todos con la misma probabilidad, como posibles ordenaciones en la captura de los 4 peces rojos y el único pez verde, esto es, $P_5^{4,1} = 5$. Entonces,

$$p(4 \text{ rojos}) = 5 \cdot \frac{2}{51} .$$

Esta probabilidad puede obtenerse, también, aplicando la regla de LAPLACE, siendo el número de casos posibles $\binom{18}{5}$ y el de casos favorables $\binom{8}{1}\binom{10}{4}$.

De la misma forma hallaríamos la probabilidad de *capturar 4 peces verdes y 1 rojo*, obteniéndose

$$p(4 \text{ verdes}) = 5 \cdot \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = 5 \cdot \frac{5}{306},$$

probabilidad que, al igual que en el caso anterior, es posible calcular mediante la regla de LAPLACE, como puede comprobar el lector.

Por tanto, la probabilidad de *capturar cuatro peces del mismo color* es

$$p(4 \text{ del mismo color}) = \frac{85}{306} = 0.278.$$

Ejercicio 2.32.
Como la máquina B ha fallado ya una vez, la única posibilidad de que sea C la primera máquina que deje de funcionar es que A no falle y B no vuelva a fallar antes de que C falle tres veces. Podemos suponer que, tanto los fallos de cada una de las máquinas como los fallos sucesivos de una misma máquina, son independientes. Además, suponemos que la resistencia al fallo es la misma en las tres máquinas, es decir, que la probabilidad de que sea A, B o C la que falle en primero, segundo, ... lugar es la misma y, por tanto, igual a $1/3$ para cada máquina, siempre que consideremos que, tarde o temprano, las máquinas fallarán. Entonces, la probabilidad de que *C sea la primera máquina que deja de funcionar* condicionada a que *el primer fallo se detectó en B* es

$$p(B_1\, C_2\, C_3\, C_4 \mid B_1) = \frac{p(B_1\, C_2\, C_3\, C_4)}{p(B_1)} = \frac{p(B_1) \cdot p(C_2) \cdot p(C_3) \cdot p(C_4)}{p(B_1)} =$$
$$= p(C_2) \cdot p(C_3) \cdot p(C_4) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

donde B_1 denota el suceso *el primer fallo se detectó en B* y C_i el suceso *el i-ésimo fallo se detectó en C* $(i = 2, 3, 4)$.

Ejercicio 2.33.
Como se indicó en la resolución del ejercicio 2.20, puede considerarse que los libros se eligen sucesivamente. Por tanto, el experimento puede descomponerse en dos experimentos simples: la elección del primer libro y la elección del segundo. Al primer experimento le asociamos el espacio muestral $\Omega_1 = \{e_1, h_1\}$, donde e_1 y h_1 representan los posibles resultados: *elegir un libro de Estadística* y *elegirlo de Historia*. Igualmente, al segundo experimento le asociamos el espacio muestral $\Omega_2 = \{e_2, h_2\}$. Obviamente, el espacio muestral asociado al experimento compuesto es

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(e_1, e_2), (h_1, e_2), (e_1, h_2), (h_1, h_2)\}.$$

Si se toman dos libros de la estantería (elección sin reemplazamiento) en la que hay un total de 112 libros, la probabilidad de que *ambos sean de Estadística* es:

$$p[(e_1\,, e_2)] = p(e_1) \cdot p(e_2 \mid e_1) = \frac{62}{112} \cdot \frac{61}{111} = 0.30.$$

Esta probabilidad podría también hallarse mediante la regla de LAPLACE. Así, el número de casos posibles es $\binom{112}{2}$, las formas de escoger 2 libros distintos de entre 112, siendo el número de casos favorables $\binom{50}{0} \cdot \binom{62}{2}$. El lector comprobará que el resultado es el mismo,

pudiendo realizar este razonamiento para el cálculo del resto de las probabilidades de este ejercicio.

Igualmente obtendríamos la probabilidad de los otros sucesos elementales del experimento compuesto:

$$p[(h_1, e_2)] = p(h_1) \cdot p(e_2 \mid h_1) = \frac{50}{112} \cdot \frac{62}{111} = 0.25\,,$$

$$p[(e_1, h_2)] = p(e_1) \cdot p(h_2 \mid e_1) = \frac{62}{112} \cdot \frac{50}{111} = 0.25 \quad \text{y}$$

$$p[(h_1, h_2)] = p(h_1) \cdot p(h_2 \mid h_1) = \frac{50}{112} \cdot \frac{49}{111} = 0.20\,.$$

Consideremos el suceso *al menos uno de los dos libros es de Estadística*,

$$E = \{(e_1, e_2), (h_1, e_2), (e_1, h_2)\}\,,$$

cuya probabilidad es

$$p(E) = p[(e_1, e_2)] + p[(h_1, e_2)] + p[(e_1, h_2)] = 0.80\,.$$

Entonces, si *al menos uno de los libros elegidos es de Estadística*, la probabilidad de que *los dos lo sean* resulta:

$$p[(e_1, e_2) \mid E] = \frac{p[(e_1, e_2)]}{p(E)} = 0.375\,.$$

Ejercicio 2.34.
Calculemos, en primer lugar, la probabilidad de *obtener por lo menos un as con cuatro dados*. Supondremos que los dados son normales y las tiradas de cada uno de ellos independientes; por tanto, el espacio muestral formado por las distintas puntuaciones de los cuatro dados es finito y equiprobable, pudiendo calcularse las probabilidades por la regla de LAPLACE.

Así, para facilitar los cálculos,

$$p(\text{al menos 1 as}) = 1 - p(\text{ningún as})\,.$$

El número de casos posibles (puntos muestrales) es el de variaciones con repetición de 6 elementos (las seis posibles puntuaciones de un dado) tomados de 4 en 4; esto es, $VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$. De la misma forma, el número de casos favorables al suceso *no obtener ningún as* es el de variaciones con repetición de 5 elementos (las puntuaciones del dado excluido el as) tomados de 4 en 4, $VR_{5,4} = 5^4 = 625$.

Denotando por A_i el suceso *obtener un as* en la i-ésima tirada ($i = 1, \ldots, 5$), la probabilidad de *no obtener ningún as* podría calcularse, también, como:

$$p(\text{ningún as}) = p(\overline{A}_1, \ldots \overline{A}_5) = p(\overline{A}_1) \cdots p(\overline{A}_5) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{625}{1\,296}\,,$$

ya que los experimentos son independientes.

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$p(\text{al menos 1 as}) = 1 - \frac{625}{1\,296} = 0.518\,.$$

Hallemos ahora la probabilidad de *obtener por lo menos un doble as en veinticuatro tiradas de dos dados*. Previamente, calculemos la probabilidad de *obtener un doble as al tirar una vez dos dados*. De nuevo nos encontramos con un espacio muestral finito ($VR_{6,2} = 6^2 = 36$ puntos muestrales) y equiprobable. Entonces, la probabilidad de *obtener un doble as* es $1/36$, dado que sólo existe un suceso favorable.

Designando por D_i el suceso *obtener un doble as* en la i-ésima tirada de los dos dados ($i = 1, \ldots, 24$), la probabilidad de *no obtener un doble as* puede hallarse, también, como:

$$p(\text{ningún doble as}) = p(\overline{D}_1, \ldots \overline{D}_{24}) = p(\overline{D}_1) \cdots p(\overline{D}_{24}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}.$$

Volviendo a la probabilidad pedida,

$$p(\text{al menos un doble as}) = 1 - p(\text{ningún doble as}),$$

estamos, también, ante un espacio muestral finito y equiprobable, cuyo número de puntos muestrales (los casos posibles) es el de variaciones con repetición de 36 elementos (los distintos resultados de una tirada de dos dados) tomados de 24 en 24, es decir, $VR_{36,24}$. Asimismo, el número de casos favorables al suceso *no obtener ningún doble as* es $VR_{35,24}$. En definitiva,

$$p(\text{al menos un doble as}) = 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} = 0.491,$$

con lo que concluimos que es cierta la afirmación del enunciado.

Ejercicio 2.35.
Sacamos dos bolas (se entiende que sin reemplazamiento) de una urna con 11 bolas, 6 blancas, 3 negras y 2 rojas. Designamos por B_i, N_i y R_i a los sucesos *sacar bola blanca, negra* y *roja* en la i-ésima extracción ($i = 1, 2$).

a) Puesto que los dos experimentos (las dos extracciones) son dependientes, la probabilidad de *extraer dos bolas del mismo color*, C, es

$$\begin{aligned} p(C) &= p(B_1\,B_2) + p(N_1\,N_2) + p(R_1\,R_2) = \\ &= p(B_1) \cdot p(B_2 \mid B_1) + p(N_1) \cdot p(N_2 \mid N_1) + p(R_1) \cdot p(R_2 \mid R_1) = \\ &= \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} + \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{38}{110} = 0.35. \end{aligned}$$

b) Calculemos la probabilidad de que *las dos bolas sean blancas*, $B_1\,B_2$, condicionada a que *las dos sean del mismo color*, C:

$$p(B_1\,B_2 \mid C) = \frac{p(B_1\,B_2) \cdot p(C \mid B_1\,B_2)}{p(C)} = \frac{\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \cdot 1}{\frac{38}{110}} = \frac{30}{38} = 0.79.$$

c) Dado que sabemos que han salido dos bolas blancas, sólo tendremos en cuenta éstas, de las cuales 2 están numeradas y el resto, 4, no. Para no complicar la notación,

supondremos que la urna sólo contiene ya las 6 bolas blancas. Entonces, si N_i es el suceso *extraer una bola numerada* en la i-ésima extracción $(i = 1, 2)$,

$$\begin{aligned} p(\text{al menos una numerada}) &= 1 - p(\text{ninguna numerada}) = 1 - p(\overline{N}_1\,\overline{N}_2) = \\ &= 1 - p(\overline{N}_1) \cdot p(\overline{N}_2 \mid \overline{N}_1) = \\ &= 1 - \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = 0.6\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.36.
El espacio muestral que describe el lanzamiento de un dado normal dos veces es finito y equiprobable, siendo el número de sus puntos muestrales el de variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 2 en 2, $VR_{6,2} = 36$:

$$\Omega = \{(i,\, j)\,;\ i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, 2, \ldots, 6\}\,.$$

Para que $i + j$ sea par, las dos puntuaciones, i y j, tienen que ser ambas pares o ambas impares. Si las dos son pares, el número de casos es $VR_{3,2} = 3^2 = 9$, considerando las tres posibles puntuaciones pares de un dado; si ambas puntuaciones son impares, también habrá 9 casos. Por tanto, aplicando la regla de LAPLACE,

$$p(\text{suma de puntuaciones par}) = \frac{9 + 9}{36} = 0.5\,.$$

Por otra parte,

$$p(\text{al menos una puntuación mayor que 4}) = 1 - p(\text{ninguna mayor que 4})\,,$$

siendo el número de casos favorables a este último suceso el de las variaciones con repetición de 4 elementos (las puntuaciones 1, 2, 3 y 4) tomadas de 2 en 2, $VR_{4,2} = 16$. Entonces,

$$p(\text{al menos una puntuación mayor que 4}) = 1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}\,.$$

Ejercicio 2.37.
Hallemos la probabilidad de que *el elegido para realizar la misión sea el que primero realiza la extracción*, esto es, la probabilidad de *escoger negra en el primer intento*,

$$p(N_1) = \frac{1}{3}\,.$$

A continuación, calculemos la probabilidad de que *sea elegido el segundo en realizar la extracción*, es decir, la probabilidad de *escoger bola negra en el segundo intento*,

$$\begin{aligned} p(N_2) = p(N_1\,N_2) + p(B_1\,N_2) &= p(N_1) \cdot p(N_2 \mid N_1) + p(B_1) \cdot p(N_2 \mid B_1) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

El primero de los sucesos, $N_1\,N_2$, es prescindible, dado que es un suceso imposible (una vez que el primer aventurero extrae bola negra, no hay opción para una segunda extracción).

De la misma forma obtendríamos la probabilidad de que *sea elegido el tercero en realizar la extracción*,

$$p(N_3) = p(B_1\, B_2\, N_3) = p(B_1) \cdot p(B_2 \mid B_1) \cdot p(N_3 \mid B_1\, B_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3}\,.$$

Por tanto, los tres aventureros tienen la misma probabilidad de ser elegidos para la misión arriesgada.

Ejercicio 2.38.
Dada la preferencia por los varones que tiene la empresa a la hora de contratar a sus empleados, su plantilla se compone de un 70 % de hombres y un 30 % de mujeres. Se eligen al azar 20 miembros de esta plantilla para formar el comité de seguridad e higiene; hemos de hallar la probabilidad de que *al menos la mitad sean hombres*, es decir,

$$p(\text{al menos la mitad sean hombres}) = p[10\,\text{h. y}\,10\,\text{m.}] + p[11\,\text{h. y}\,9\,\text{m.}] + \cdots + p[20\,\text{h. y}\,0\,\text{m.}]\,.$$

Para calcular la probabilidad de que *el comité esté formado por* 10 *hombres y* 10 *mujeres*, calculemos previamente la probabilidad de que las diez primeras elecciones sean de hombres y las diez siguientes de mujeres,

$$p[(h_1, \ldots, h_{10}, m_{11}, \ldots, m_{20})]\,,$$

donde h y m indican los resultados *elegir hombre* y *elegir mujer*, respectivamente, y por el subíndice, el orden en que han sido elegidos. Se trata, por tanto, de la probabilidad de un suceso elemental del experimento compuesto de veinte experimentos simples, cada una de las elecciones. Para hallar esta probabilidad tendremos que ver si los experimentos son, o no, independientes. Obviamente, como los veinte empleados que forman el comité han de ser distintos, las elecciones de sus miembros son sin reemplazamiento y, por tanto, los experimentos son dependientes. Ahora bien, dado que no sabemos el número de empleados de la empresa, y tampoco el de hombres y mujeres, no podremos, en principio, calcular la probabilidad pedida.

Sin embargo, suponiendo que se trata de una empresa de gran tamaño, cada una de las elecciones de miembros del comité no cambiará sensiblemente la relación entre hombres y mujeres del resto de los empleados que aún no han sido elegidos. En otros términos, si el número de empleados es grande podemos considerar que las distintas elecciones de miembros para formar el comité son independientes o, equivalentemente, que las elecciones se realizan con reemplazamiento.

Entonces,

$$p[(h_1, \ldots, h_{10}, m_{11}, \ldots, m_{20})] = p(h_1) \cdots p(h_{10}) \cdot p(m_{11}) \cdots p(m_{20}) = 0.7^{10} \cdot 0.3^{10}\,.$$

Pero ésta no es la única forma de elegir 10 hombres y 10 mujeres para formar el comité; hay tantas formas, todas ellas igualmente probables, como posibles ordenaciones de los 10 hombres y las 10 mujeres, es decir, hay

$$P_{20}^{10,10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} \quad \text{posibles ordenaciones}\,.$$

Así,

$$p(\text{elegir 10 hombres y 10 mujeres}) = P_{20}^{10,10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^{10}\,.$$

Por el mismo razonamiento, se halla la probabilidad de *obtener un comité con* k *hombres y* $20-k$ *mujeres* ($k=10,\ldots,20$),

$$p(\text{elegir } k \text{ hombres y } 20-k \text{ mujeres}) = P_{20}^{k,20-k}\cdot 0.7^k\cdot 0.3^{20-k}.$$

De este modo, la probabilidad de que *al menos la mitad del comité sean hombres* es

$$\begin{aligned} p(\text{al menos la mitad hombres}) &= \textstyle\sum_{k=10}^{20} p(k \text{ h. y } 20-k \text{ m.}) = \\ &= \textstyle\sum_{k=10}^{20} P_{20}^{k,20-k}\cdot 0.7^k\cdot 0.3^{20-k} = 0.9829. \end{aligned}$$

Los farragosos cálculos de esta probabilidad se simplificarán con la ayuda de unas tablas cuyo uso se describirá en el capítulo 8.

Ejercicio 2.39.
Puesto que la baraja española está formada por 40 cartas, cada jugador recibirá 8. Calculemos, en primer lugar, la probabilidad de que el jugador que reparte *reciba al menos* 6 *oros*, es decir, que *se lleve* 6, 7 *u* 8 *oros*. Así,

$$p(\text{recibir exactamente 6 oros}) = P_8^{6,2}\cdot p(O_1O_2O_3O_4O_5O_6\overline{O}_7\overline{O}_8),$$

donde O designa el suceso *obtener una carta de oros* y el subíndice el orden en que se ha obtenido; al igual que en el ejercicio anterior, las permutaciones con repetición de 8 elementos contabilizan el número de sucesos, todos igualmente probables, en que aparecen exactamente 6 oros. Entonces, aplicando la regla de la multiplicación,

$$\begin{aligned} p(O_1O_2O_3O_4O_5O_6\overline{O}_7\overline{O}_8) &= p(O_1)\cdot p(O_2\,|\,O_1)\cdots p(\overline{O}_8\,|\,O_1\ldots O_6\overline{O}_7) = \\ &= \frac{10}{40}\cdot\frac{9}{39}\cdot\frac{8}{38}\cdot\frac{7}{37}\cdot\frac{6}{36}\cdot\frac{5}{35}\cdot\frac{30}{34}\cdot\frac{29}{33} = 0.000042. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p(\text{recibir exactamente 6 oros}) = 0.0012.$$

De igual forma calcularíamos las siguientes probabilidades:

$$p(\text{recibir exactamente 7 oros}) = P_8^{7,1}\cdot p(O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7\overline{O}_8) = 0.000047$$

y

$$p(\text{recibir exactamente 8 oros}) = p(O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8) = 0.00000058.$$

Por consiguiente, la probabilidad de *recibir al menos* 6 *oros* es la suma de las probabilidades anteriores, esto es,

$$p(\text{recibir al menos 6 oros}) = 0.0012.$$

El mismo razonamiento para cada uno de los restantes palos de la baraja (copas, espadas y bastos), conduce a idéntico resultado. Entonces,

$$p(\text{recibir al menos 6 cartas del mismo palo}) = 4 \cdot 0.0012 = 0.0049 .$$

Este ejercicio puede resolverse, también, tomando el espacio muestral Ω_1 formado por $V_{40,8}$ resultados posibles. De esta forma se consideran resultados distintos los proporcionados por las mismas cartas obtenidas en distinto orden. Aunque la probabilidad que queremos calcular se refiere a las cartas recibidas, y no al orden en que se reciben, puede ser conveniente suponer este orden para hallar las probabilidades de los resultados simples y, a partir de éstas, las probabilidades de cualquier suceso. El espacio Ω_1 es equiprobable, pues cualquier suceso elemental tiene la misma probabilidad. Así, la probabilidad de recibir, por ejemplo, el as de copas, el dos de copas, ..., el siete de copas y la sota de copas, en este orden, es

$$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdots \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{V_{40,8}} ,$$

probabilidad que, obviamente, resulta ser la unidad dividida entre el número de posibles resultados.

Aplicando la regla de LAPLACE, pueden calcularse las distintas probabilidades. Así,

$$p(\text{recibir exactamente 6 oros}) = \frac{{P_8}^{6,2} \cdot V_{10,6} \cdot V_{30,2}}{V_{40,8}} ,$$

donde los casos favorables se han contabilizado teniendo en cuenta el número de maneras de obtener 6 oros ($V_{10,6}$), multiplicado por el de obtener 2 cartas que no sean oros ($V_{30,2}$), así como por el número de las posibles ordenaciones de los 6 oros y los 2 que no lo son (${P_8}^{6,2}$). Realizando el mismo razonamiento,

$$\begin{aligned} p(\text{recibir al menos 6 oros}) &= p(6 \text{ oros}) + p(7 \text{ oros}) + p(8 \text{ oros}) = \\ &= \frac{{P_8}^{6,2} \cdot V_{10,6} \cdot V_{30,2}}{V_{40,8}} + \frac{{P_8}^{7,1} \cdot V_{10,7} \cdot V_{30,1}}{V_{40,8}} + \frac{V_{10,8}}{V_{40,8}} = \\ &= 0.0012 . \end{aligned}$$

Igual resultado se obtiene cuando se calcula la probabilidad de recibir al menos 6 cartas de cualquier otro palo (copas, espadas y bastos); por tanto, la probabilidad de *recibir al menos* 6 *cartas del mismo palo* es $4 \cdot 0.0012$, es decir, 0.0049.

Por último, también podría hacerse el cálculo de esta probabilidad considerando el espacio muestral Ω_2 formado por 76 904 685 resultados posibles, el número de combinaciones sin repetición de 40 elementos tomados de 8 en 8; es decir, suponiendo que dos resultados son distintos cuando difieren en alguna carta, pero no en el orden en que se reciben. Este espacio muestral también es equiprobable, pues las probabilidades de cada uno de los resultados simples coinciden; por ejemplo, la probabilidad de recibir el as de copas, el dos de copas, ..., el siete de copas y la sota de copas, en cualquier orden, es

$$P_8 \cdot \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{39} \cdots \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{33} = \frac{P_8}{V_{40,8}} = \frac{1}{C_{40,8}} ,$$

es decir, la unidad dividida entre el número de casos posibles. Entonces,

$$p(\text{recibir al menos 6 oros}) = p(6 \text{ oros}) + p(7 \text{ oros}) + p(8 \text{ oros}) =$$

$$= \frac{C_{10,6} \cdot C_{30,2}}{C_{40,8}} + \frac{C_{10,7} \cdot C_{30,1}}{C_{40,8}} + \frac{C_{10,8}}{C_{40,8}} = 0.0012\,,$$

siendo la probabilidad de *recibir al menos 6 cartas del mismo palo* el cuádruple, es decir, 0.0049.

Ejercicio 2.40.
Para comprender mejor las distintas etapas en que se descompone el experimento utilizaremos una técnica gráfica conocida como diagrama de árbol, que esquematizará el proceso.

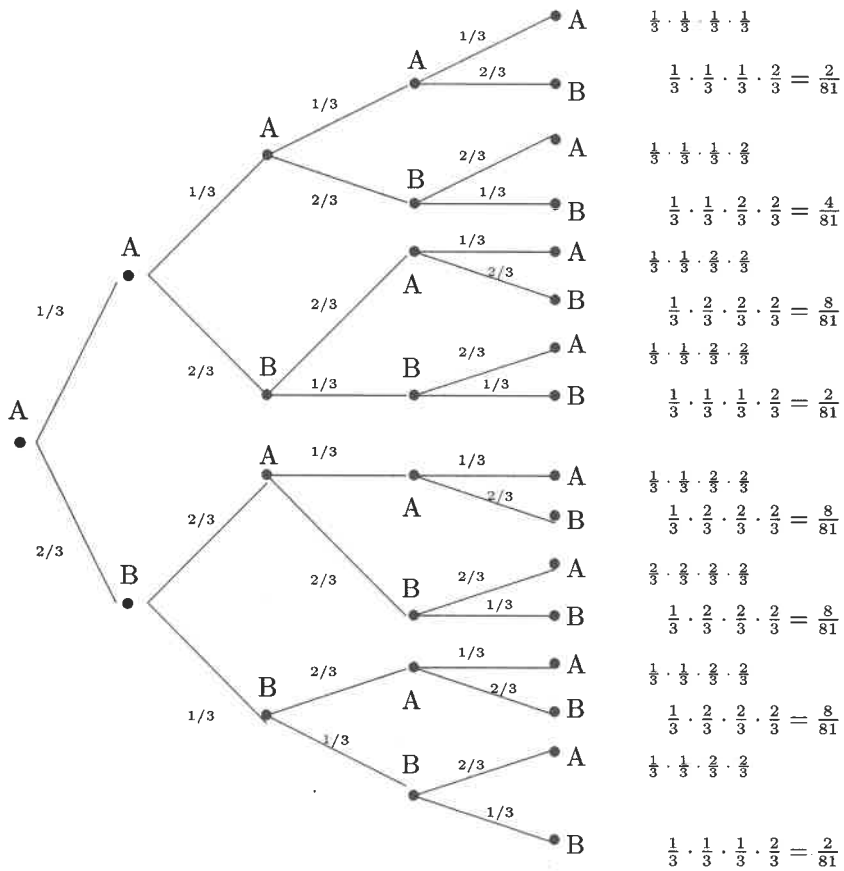


FIG. 2.3.

El suceso *adquirir la marca B en la quinta compra*, B_5, incluye todas las secuencias de compras que empiezan por la compra del dentífrico A, A_1, y acaban con la de B, B_5; es decir,

$$(A_1, -, -, -, B_5)\,,$$

pudiendo adquirir en las compras intermedias cualquiera de los dos dentífricos. Para hallar la probabilidad de *adquirir la marca B en la quinta compra*, sumemos la probabilidad de cada una de estas secuencias de compra; así,

$$p(A_2\,A_3\,A_4\,B_5) = p(A_2)\cdot p(A_3 \mid A_2)\cdot p(A_4 \mid A_3)\cdot p(B_5 \mid A_4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{81}\,.$$

Obsérvese que no se considera la primera adquisición, la del dentífrico A, pues éste es un suceso seguro; asimismo, sólo se condiciona cada nueva compra a la inmediatamente anterior, ya que es la única de la que depende.

Mediante el diagrama de árbol (véase la figura 2.3), puede calcularse sin dificultad la probabilidad de todas las secuencias que concluyen con la compra de B. Entonces,

$$p(B_5) = \frac{2}{81} + \frac{2}{81} + \frac{8}{81} + \frac{2}{81} + \frac{8}{81} + \frac{8}{81} + \frac{8}{81} + \frac{2}{81} = \frac{40}{81} = 0.494\,.$$

Ejercicio 2.41.

La figura 2.4, en la que e simboliza una factura con errores y $\bar{e}$ una factura sin ellos, ayudará a comprender la situación.

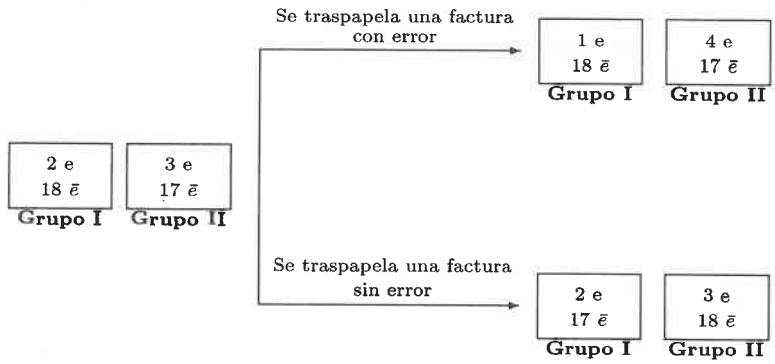


FIG. 2.4.

El proceso descrito en el diagrama puede entenderse como una doble extracción. En primer lugar, existe una extracción involuntaria, el traspapeleo producido por la corriente de aire, de una factura del primer grupo, que se introduce en el segundo; en segundo lugar, se realiza una extracción deliberada de una factura del segundo grupo para su revisión. Designemos por E_1, al suceso *extraer una factura con error en el primer grupo*, es decir,

traspapelar una factura con error, y por E_2 al suceso *extraer una factura con error en el segundo grupo*, esto es, *revisar una factura con error en el segundo grupo*. Entonces,

$$p(E_2) = p(E_1\,E_2) + p(\overline{E}_1\,E_2) \quad = p(E_1)\cdot p(E_2 \mid E_1) + p(\overline{E}_1)\cdot p(E_2 \mid \overline{E}_1) =$$

$$= \frac{2}{20}\cdot\frac{4}{21} + \frac{18}{20}\cdot\frac{3}{21} = \frac{62}{420} = 0.148\,.$$

Ejercicio 2.42.
El diagrama de árbol de la figura 2.5 clarifica el proceso.

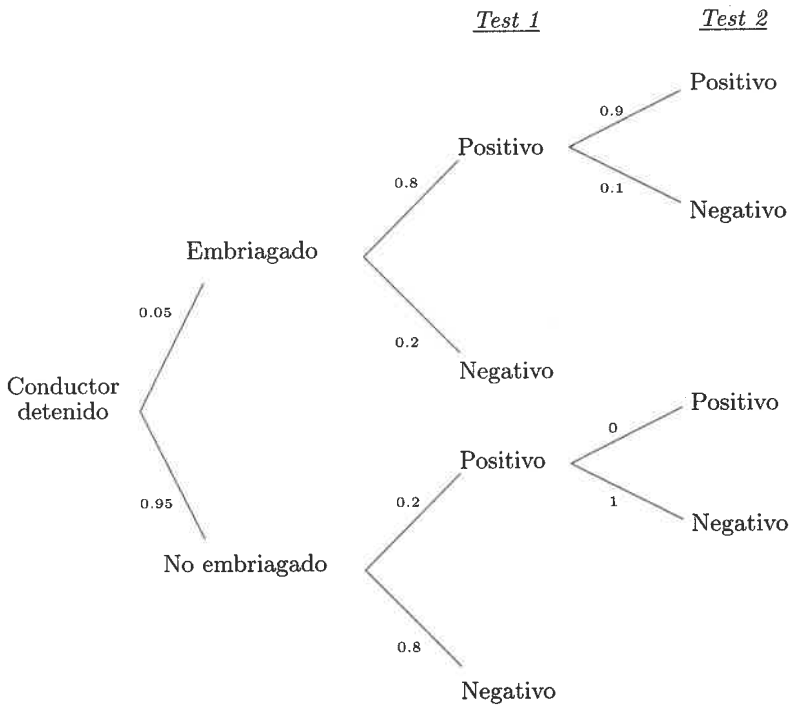


FIG. 2.5.

Designemos por E al suceso *estar embriagado* y por P_i al suceso *dar positivo* en el i-ésimo test ($i = 1, 2$).

a) Los conductores detenidos que son sometidos al segundo test son aquellos que dan positivo en el primero, ya sea porque realmente estén embriagados, ya sea porque, no estándolo, falle el test:

$$p(P_1) = p(E\,P_1) + p(\overline{E}\,P_1) \quad = p(E)\cdot p(P_1 \mid E) + p(\overline{E})\cdot p(P_1 \mid \overline{E}) =$$

$$= 0.05\cdot 0.80 + 0.95\cdot 0.20 = 0.23\,,$$

luego el 23 % de los conductores detenidos será sometido a un segundo test.

b) Tenemos que calcular la probabilidad de *estar embriagado* habiendo dado *negativo* en el segundo test,

$$p(E \mid \overline{P}_2) = \frac{p(E\,\overline{P}_2)}{p(\overline{P}_2)}\,.$$

Siguiendo el diagrama de árbol, la probabilidad de *dar negativo en el segundo test* es

$$p(\overline{P}_2) = p(EP_1\overline{P}_2) + p(\overline{E}P_1\overline{P}_2) = 0.05 \cdot 0.80 \cdot 0.10 + 0.95 \cdot 0.20 \cdot 1 = 0.194\,,$$

y la de *estar embriagado y dar negativo en el segundo test*,

$$p(E\overline{P}_2) = p(EP_1\overline{P}_2) = 0.05 \cdot 0.80 \cdot 0.10 = 0.004\,.$$

Por tanto,

$$p(E \mid \overline{P}_2) = \frac{0.004}{0.194} = 0.021\,.$$

Capítulo 3

VARIABLES ALEATORIAS UNIDIMENSIONALES

Con frecuencia, no interesa estudiar los propios sucesos de una σ-álgebra, sino una o varias características numéricas ligadas a los resultados posibles del experimento; dichas características reciben el nombre de variables aleatorias. Así, dado un espacio probabilístico, (Ω, α, p), una aplicación X, de Ω en $\mathbb{R}$, se denomina **variable aleatoria** si

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \alpha \text{ para todo número real } x;$$

al conjunto $X^{-1}((-\infty, x])$ lo denotamos, de forma más sencilla e intuitiva, como $[X \leq x]$.

Una variable aleatoria se puede caracterizar no sólo por intervalos de la forma $(-\infty, x]$, sino por cualquier tipo de intervalo real. Ello permitirá definir una variable aleatoria como una aplicación de Ω en $\mathbb{R}$ que verifica que $X^{-1}(I) \in \alpha$, para todo intervalo real I.

La condición que define una variable aleatoria permite trasladar la probabilidad de los sucesos de Ω a ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$, entre los que están, al menos, todos los tipos de intervalos, así como cada uno de los puntos de $\mathbb{R}$. De hecho, la probabilidad puede trasladarse a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que pertenecen a una cierta σ-álgebra, denominada de **Borel**, β, que es la σ-álgebra *más pequeña* que contiene a los intervalos de $\mathbb{R}$, entendiendo la expresión *más pequeña* en el sentido de que toda σ-álgebra a la que pertenezcan los intervalos contiene a la de Borel.

Así, dados un espacio probabilístico (Ω, α, p) y una variable aleatoria X, podemos definir una probabilidad sobre los subconjuntos de Borel de la recta real, que se denomina **probabilidad inducida** por X, como la aplicación p_X, de β en $\mathbb{R}$, tal que, para todo B perteneciente a β,

$$p_X(B) = p(X^{-1}(B)) \, .$$

Esta probabilidad suele escribirse como $p[X \in B]$.

La probabilidad inducida, como función que aplica conjuntos en números reales, resulta difícil de manejar. En cambio, podemos definir una nueva función, la

función de distribución de una variable aleatoria, función numérica (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) y que permite, también, calcular las probabilidades sobre X. Se llama **función de distribución** de X a la función F_X, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, donde

$$F_X(x) = p[X \leq x] \text{ , para todo número real } x.$$

Suprimiremos el subíndice X, si ello no induce a confusión.

La función de distribución describe la acumulación de probabilidad provocada por la variable a lo largo de la recta real.

Las propiedades más importantes de la función de distribución son:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, para todo número real x.
2. F es monótona creciente.
3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ y $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
4. $p[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$.
5. F es continua por la derecha.

La función de distribución no tiene por qué ser continua por la izquierda; de hecho,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} F(x-\varepsilon) = F(x) - p[X = x] \,.$$

Este resultado permite completar la propiedad **4** anterior, para otro tipo de intervalos.

Las propiedades 2, 3 y 5 caracterizan a las funciones de distribución de una **distribución univariante de probabilidad**.

Por último, se dice que dos o más variables aletorias están **igual o idénticamente distribuidas** si tienen la misma función de distribución.

La utilización de las funciones de distribución para calcular probabilidades es muy engorrosa. Sin embargo, en la mayor parte de las situaciones prácticas, las variables aleatorias que se presentan son de tal forma que disponemos de otros recursos más sencillos para calcular probabilidades. Ello ocurre, en particular, cuando las variables aleatorias son, o bien de las denominadas discretas, o bien de las denominadas continuas.

- Se dice que X es una **variable aleatoria discreta** si el conjunto

$$X(\Omega) = \{X(\omega), \text{ para todo } \omega \in \Omega\}$$

es finito o infinito numerable. Entonces, su **función de probabilidad** es una aplicación f_X, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida como

$$f_X(x) = p[X = x] \,, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \,.$$

El subíndice X puede suprimirse cuando no lleve a confusión.

Esta nueva función, que describe la probabilidad de cada punto, permite calcular las probabilidades para una variable aleatoria discreta. Así, si B es un subconjunto de $\mathbb{R}$,

$$p[X \in B] = \sum_{x_i \in B} f(x_i) \, .$$

Las funciones de distribución y de probabilidad de una variable aleatoria discreta se relacionan de la siguiente forma:

1. $F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$, para $k = 2, 3, \ldots$ y $f(x_1) = F(x_1)$.

La función de probabilidad verifica dos propiedades que, a su vez, la caracterizan:

1. $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1$.

• El segundo tipo de variables aleatorias de tratamiento aceptablemente sencillo, es el que se presenta con el nombre de variables continuas.

Sea X una variable aleatoria y F su función de distribución. Se dice que X es una **variable aleatoria continua** si

1. F es una función continua.
2. Su derivada, F', existe y es continua salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos.

Al igual que para las variables discretas, existe una nueva función que va a facilitar el cálculo de las probabilidades en X. Se llama **función de densidad** de una variable aleatoria continua a una aplicación f, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, definida como

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) \, ,$$

donde F es la función de distribución de X.

La función de densidad en un punto x no es la probabilidad de ese punto (de hecho, $p[X = x] = 0$), sino la probabilidad por unidad de longitud en un intervalo *infinitesimal* alrededor de x. Es decir, expresa la densidad de probabilidad en torno al punto.

Las funciones de distribución y de densidad de una variable aleatoria continua se relacionan del siguiente modo:

1. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Algunas propiedades de la función de densidad son:

1. $f(x) \geq 0$, para todo $x \in R$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.
3. $p[a < X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$.
4. $p[X \in B] = \int_B f(x)\,dx$, para todo subconjunto de Borel B.

Las dos primeras propiedades caracterizan a una función de densidad, para una función, f, continua salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos.

• A veces se plantean situaciones en que una variable es continua en un intervalo, pero ciertos puntos tienen probabilidades distintas de cero. Estas situaciones dan lugar a las denominadas **variables mixtas**, cuya función de distribución, F, es una combinación lineal convexa de las funciones de distribución correspondientes a una variable aleatoria discreta, F_d, y a una variable aleatoria continua, F_c. Es decir,

$$F(x) = \alpha \cdot F_d(x) + (1-\alpha) \cdot F_c(x) \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 1\,.$$

En tales casos, se define la **función de probabilidad/densidad** de la variable, que recoge la función de probabilidad en la parte discreta y la función de densidad en la continua.

Con frecuencia, se desea utilizar una variable aleatoria dentro de un campo de variación más limitado que el que establece su propia definición. Se trata, por tanto, de construir una nueva variable aleatoria, cuya función de probabilidad, o de densidad, se obtiene a partir de la correspondiente a la variable primitiva: esta nueva función vale cero fuera del campo de interés y, dentro del mismo, presenta un perfil semejante al de la función inicial. La técnica que permite realizar este trabajo se denomina **truncamiento** de la variable aleatoria.

En ocasiones, dada la distribución de una variable aleatoria X, estaremos interesados en la distribución de una variable Y, función de X, $Y = h(X)$; esto es, realizado un **cambio de variable**, se trata de hallar la distribución de la transformada.

En principio, $Y = h(X)$ no es necesariamente variable aleatoria; lo será, entre otros casos, siempre que h sea biyectiva y monótona. Con todo, para la mayor parte de las funciones de uso habitual, queda garantizado que lo es, ya que, si X es variable aleatoria y h es continua, $Y = h(X)$ es variable aleatoria.

Si X es una variable aleatoria discreta, cualquier transformación de X, $Y = h(X)$, es variable aleatoria y es discreta, pudiendo calcularse de forma sencilla las funciones de distribución y de probabilidad de Y a partir de la función de probabilidad de X:

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = \sum_{x_i \mid h(x_i) \leq y} p[X = x_i] = \sum_{x_i \mid h(x_i) \leq y} f_X(x_i)$$

y

$$f_Y(y) = p[Y = y] = \sum_{x_i \mid h(x_i)=y} p[X = x_i] = \sum_{x_i \mid h(x_i)=y} f_X(x_i) .$$

Cuando X es una variable aleatoria continua, la situación es diferente. En primer lugar, no toda transformada de X tiene por qué ser variable aleatoria, si bien es cierto que lo será en la mayor parte de los casos. En segundo lugar, cuando $Y = h(X)$ sea variable aleatoria, puede que sea discreta, continua o mixta, dependiendo de la aplicación h.

Si $Y = h(X)$ es una variable aleatoria, formalmente siempre es posible hallar su función de distribución a partir de la función de densidad de X, f_X. Así,

$$F_Y(y) = \int_{h^{-1}((-\infty,y])} f_X(x)\, dx .$$

En la mayoría de las situaciones de interés, $Y = h(X)$ es una variable aleatoria continua; existe un resultado, denominado **teorema del cambio de variable** que, aunque no es general, permite, en muchos casos, obtener directamente su función de densidad sin hallar previamente su función de distribución.

Sea $y = h(x)$ una aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, estrictamente monótona y derivable, tal que su derivada, $h'(x)$, no se anula, y sea Y la transformada de X por h, $Y = h(X)$; entonces, Y es una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| .$$

Una importante transformación de una variable aleatoria X es la transformación lineal, $Y = a \cdot X + b$, y dentro de ésta, un caso particular: el cambio de origen y de escala. Así, Y es la transformada de X por un cambio de origen y de escala, si

$$Y = \frac{X - o}{e} ,$$

donde o y e ($e > 0$) son dos constantes cualesquiera. El cambio de origen *mueve* el conjunto de valores de la variable, manteniéndose la posición relativa y la distancia entre los mismos; el cambio de escala hace que los valores se *acerquen* ($e > 1$) o se *alejen* ($e < 1$).

Ejercicios propuestos

3.1. En el espacio muestral $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ se define la siguiente aplicación:

$$X(\omega_1) = X(\omega_3) = 1 \quad \text{y} \quad X(\omega_2) = 2 .$$

¿Cuál es la σ-álgebra más pequeña sobre Ω, α, para la cual X es variable aleatoria?

3.2. Se considera el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado normal dos veces. Sea X el número de pares obtenidos. Búsquese la σ-álgebra más pequeña en Ω para que X sea una variable aleatoria.

3.3. Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y A un subconjunto de Ω. Se define la función indicador de A como la aplicación $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

¿Qué debe exigirse para que I_A sea variable aleatoria?

3.4. Sea un espacio probabilístico (Ω, α, p) y X una aplicación de Ω en $\mathbb{R}$. Demuéstrese:

a) Si X es constante, X es una variable aleatoria sea cual sea la σ-álgebra α.

b) Si $\alpha = \{\emptyset, \Omega\}$, X es una variable aleatoria si y sólo si es una aplicación constante.

¶ **3.5.** Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y X una aplicación de Ω en $\mathbb{R}$.

a) Demuéstrese que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad (-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right].$$

b) Pruébese que las condiciones siguientes son equivalentes:

1. $X^{-1}((-\infty, x]) \in \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. $X^{-1}((-\infty, x)) \in \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $X^{-1}((x, \infty)) \in \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. $X^{-1}([x, \infty)) \in \alpha$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Pruébese que también son equivalentes las siguientes condiciones:

i) $X^{-1}((-\infty, x]) \in \alpha$, para todo x real.
ii) $X^{-1}([a, b]) \in \alpha$, para cualesquiera a y b reales con $a < b$.
iii) $X^{-1}((a, b]) \in \alpha$, para cualesquiera a y b reales con $a < b$.
iv) $X^{-1}((a, b)) \in \alpha$, para cualesquiera a y b reales con $a < b$.
v) $X^{-1}([a, b)) \in \alpha$, para cualesquiera a y b reales con $a < b$.

3.6. Compruébese que, dada una variable aleatoria X sobre un espacio probabilístico (Ω, α, p), para todo $x \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

se puede probabilizar, y hállese esta probabilidad, en función de las probabilidades de intervalos de $\mathbb{R}$.

3.7. Dadas las siguientes funciones:

a)

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

b)

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot e^x & x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

c)

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - e^{-2k} & k \leq x < k+1, \text{ para } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

d)

$$F_4(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ x & |x| \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

analícese si son, o no, funciones de distribución y calcúlese, en caso afirmativo, su función de probabilidad o de densidad.

3.8. Se lanza dos veces una moneda equilibrada:

a) Defínase la aplicación X, número de caras obtenidas.

b) Descríbanse los sucesos $[X = 1]$ y $[X < 2]$, y calcúlense sus probabilidades.

c) Hállense las funciones de distribución y de probabilidad de X.

3.9. Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot x & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Hállese el valor de k y la función de distribución de X.

b) Calcúlese la probabilidad de que X tome un valor par.

3.10. Un examen tipo test consta de cinco preguntas con tres posibles opciones cada una. Un alumno contesta al azar las cinco cuestiones. Suponiendo que cada respuesta acertada vale dos puntos, hállese la distribución del número de puntos obtenidos por el alumno.

3.11. Resuélvase el ejercicio anterior, en el supuesto de que al alumno se le reste un punto por cada respuesta errónea.

3.12. El número de errores por factura que un contable comete es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad:

$$p[X = x] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \qquad \text{si} \quad x = 0, 1, \ldots \quad (\lambda > 0) \, .$$

a) Calcúlese la probabilidad de que no cometa ningún error.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que cometa algún error?

c) Sabiendo que ha cometido al menos un error, ¿cuál es la probabilidad de que no cometa más de cinco?

3.13. Sea X la variable aleatoria que designa el número de coches vendidos cada semana en un establecimiento. Se sabe que X tiene la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8 o más
$p[X = x]$	0.04	0.04	k	0.11	0.3	0.23	0.1	0.05	0.03

a) Hállese el valor de k.

b) Determínese la función de distribución de X.

c) Calcúlese: $p[2 < X \leq 5]$, $p[X \geq 7]$ y $p[X \leq 6 \mid X > 3]$.

3.14. Un fontanero guarda en su caja de herramientas diez pares de distinto tamaño de tornillos y tuercas, de modo que los elementos de una pareja no son intercambiables con los de otra, y elige dos tornillos y dos tuercas.

a) Hállese la distribución del número de pares acertados.

b) Dibújese la función de probabilidad y de distribución de dicha variable.

3.15. Un ratón de laboratorio tiene dos posibles caminos para salir de un laberinto. Si toma el primero, caminará 15 centímetros hasta encontrar una bifurcación, siendo 30 y 20 centímetros, respectivamente, las distancias que habrá de recorrer si elige una u otra posibilidad. Si por el contrario se decide por el segundo camino, éste le conducirá a la salida, tras recorrer 60 centímetros. Como el investigador ha impregnado la entrada del segundo camino con un atrayente olor a queso, el ratón elegirá esta opción un 85 % de las veces. Hállese la distribución de la variable que expresa la longitud que recorrerá el ratón hasta llegar a la salida.

¶ **3.16.** Sea g una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que se anula salvo en un conjunto finito, o infinito numerable, $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ y cumple:

i) $0 \leq g(x_i) \leq 1$, para todo x_i.

ii) $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) = 1$.

Sea $G(x) = \sum_{x_i \leq x} g(x_i)$. Demuéstrese que G es la función de distribución de una variable aleatoria discreta.

3.17. Estúdiese si cada una de las siguientes funciones es, o no, de densidad:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 3x(x-1)/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |1-x| & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

3.18. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & 1 \leq x \leq e \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Demuéstrese que es función de densidad.

b) Hállese la función de distribución.

3.19. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es simétrica respecto de a. Demuéstrese que, para todo número real x,

$$F_X(a-x) = 1 - F_X(a+x) \, .$$

3.20. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Represéntese gráficamente dicha función.

b) Hállese y dibújese la función de distribución.

c) Calcúlense las siguientes probabilidades: $p[X \geq 0]$ y $p[|X| < 1/2]$.

3.21. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty .$$

Calcúlese $p[|X| > 2]$.

3.22. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ a(1+x) & 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Obténgase:

a) El valor de a para que f sea función de densidad.

b) $p[0.5 < X \leq 1.5]$.

3.23. Sea X la variable aleatoria que recoge el número de días que un paciente está inscrito en el primer lugar de una lista de espera de la Seguridad Social para ser operado. La función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot x} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuál será el mínimo número de días que tendrá que esperar para ser intervenido con una probabilidad de 0.95?

b) Si un paciente lleva inscrito 10 días en el primer lugar de la lista, ¿cuál será la probabilidad de que espere, a lo sumo, tres días más?

¶ **3.24.** Sea g una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos, y tal que

i) $g(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$.

Sea $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$. Demuéstrese que G es una función de distribución de una variable aleatoria continua.

3.25. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/2 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ (x+1)/4 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

a) Demuéstrese que F es función de distribución.

b) Calcúlense las siguientes probabilidades: $p[X = 1/2]$, $p[X < 1]$, $p[X > 2]$, $p[X = 1]$, $p[1/2 < X < 5/2]$ y $p[X = 1 \mid X < 2]$.

3.26. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} \cdot x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(2x+1) & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Compruébese que es, realmente, una función de distribución.

b) Hállese la función de probabilidad/densidad.

c) Exprésese F como combinación lineal convexa de una función de distribución discreta y una continua.

3.27. Una máquina fabrica bolas de rodamiento de 5 centímetros de diámetro. Desajustes en la misma hacen que las bolas tengan distintos tamaños. Se ha estimado que los errores en el diámetro siguen una distribución cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|} \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

Son desechadas todas las bolas que tengan un error superior a ± 0.5 centímetros.

a) Hállese la distribución de probabilidad (función de distribución o de densidad) de los errores en el diámetro de las bolas no rechazadas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una bola aceptada tenga un diámetro mayor que 5.2 centímetros?

3.28. Se ha estimado que el tiempo de vida, en horas, de un cierto componente electrónico sigue una distribución de probabilidad cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{8} \cdot e^{-x/8} & x \geq 0 \end{cases}$$

El departamento de control de calidad rechaza todos los componentes que fallen en las primeras tres horas, comercializándose el resto.

a) Hállese la distribución del tiempo de vida de los componentes comercializados.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente no rechazado permanezca en funcionamiento más de 12 horas?

3.29. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio probabilizable (Ω, α).

a) Demuéstrese que $|X|$ es una variable aleatoria.

b) Sea X la variable aleatoria que toma los valores -1, 0 y 1 con probabilidades 0.1, 0.3 y 0.6, respectivamente. Hállese la distribución de la variable $Y = |X|$.

3.30. El número de pacientes, X, que requieren diariamente los servicios de la unidad coronaria en una determinada comarca, se ajusta a la siguiente función de probabilidad:

$$p[X = x] = e^{-5} \cdot \frac{5^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

El hospital comarcal solamente tiene capacidad para recibir tres de estos pacientes, desviando el resto a una clínica de la capital.

Hállese la distribución de probabilidad del número de ingresos en la unidad coronaria del hospital comarcal.

3.31. Sea X una variable aleatoria continua e $Y = aX + b$, donde a y b son números reales con $a \neq 0$. Hállese la función de densidad de Y.

3.32. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese la distribución de $Y = e^{-X}$ y de $Z = \ln(X+1)$.

3.33. Obténgase la distribución de $Y = 1/X$, donde X es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

3.34. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} \cdot e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese la función de densidad de la variable X^2.

3.35. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Hállese la distribución de probabilidad de la variable $Y = [X]$ donde $[\cdot]$ es la función *parte entera*, que a cada número real le hace corresponder el número entero inmediatamente anterior.

3.36. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de distribución, F_X, es estrictamente monótona creciente. Obténgase la distribución de la variable $Y = F_X(X)$.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 3.1.
El conjunto de valores de la variable X es

$$X(\Omega) = \{1, 2\}\,.$$

Para que X sea variable aleatoria debe cumplirse que $X^{-1}((-\infty, x])$ pertenezca a la σ-álgebra, α, para todo número real x. Basta, por tanto, con hallar las contraimágenes por X de los intervalos $(-\infty, x]$ para conocer qué conjuntos deben pertenecer a α. Así,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 1 \\ \{\omega_1, \omega_3\} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \Omega & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La σ-álgebra buscada es la que engendran los tres anteriores sucesos de Ω. Puede comprobar el lector con las técnicas empleadas en el capítulo 1 (véase el ejercicio 1.5) que resulta

$$\alpha = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\} ,$$

donde $A = \{\omega_1, \omega_3\}$.

Claro está que, para cualquier σ-álgebra mayor que α, es decir, para cualquier σ-álgebra que contenga a los sucesos $\emptyset$, A, $\bar{A}$ y Ω, se cumple que $X^{-1}((-\infty, x])$ es un suceso para todo número real x y, consecuentemente, para cualquier σ-álgebra mayor que α, X es, también, una variable aleatoria.

Ejercicio 3.2.
El espacio muestral asociado al experimento es

$$\Omega = \{(i, j); i = 1, \ldots, 6, j = 1, \ldots, 6\} .$$

La variable aleatoria X es una aplicación de Ω en $\mathbb{R}$ que toma el valor cero cuando no se obtiene número par en ninguno de los lanzamientos; el valor uno, si sale número par en sólo uno de ellos, y el valor dos cuando el resultado es par en ambos lanzamientos. Es decir,

$$\begin{aligned} &X[(i,j)] = 0 \quad \text{si } i = 1,3,5,\ j = 1,3,5 , \\ &X[(i,j)] = 1 \quad \text{si } i = 1,3,5,\ j = 2,4,6 \quad \text{o} \quad \text{si } i = 2,4,6,\ j = 1,3,5 \quad \text{y} \\ &X[(i,j)] = 2 \quad \text{si } i = 2,4,6,\ j = 2,4,6 . \end{aligned}$$

Para que X sea variable aleatoria, las contraimágenes por X de los intervalos $(-\infty, x]$ tienen que pertenecer a la σ-álgebra α, con lo cual, conociendo dichas contraimágenes, sabremos qué conjuntos estarán incluidos, de modo obligado, en α. Así, el suceso $[X \leq x]$, esto es, $X^{-1}((-\infty, x])$, vale

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ A & 0 \leq x < 1 \\ B & 1 \leq x < 2 \\ \Omega & x \geq 2 \end{cases}$$

donde

$$A = \{(i, j); i = 1, 3, 5, j = 1, 3, 5\}$$

y

$$B = \{(i,j);\quad i = 1,3,5,\ j = 1,3,5 \quad \text{o}$$
$$i = 1,3,5,\ j = 2,4,6 \quad \text{o}$$
$$i = 2,4,6,\ j = 1,3,5\}\ ,$$

es decir,

$$\bar{B} = \{(i,j);\ i = 2,4,6,\ j = 2,4,6\}\ .$$

Como los sucesos $\emptyset$ y Ω están necesariamente en cualquier σ-álgebra, debemos hallar la mínima σ-álgebra que contiene a los sucesos A y B. En el ejercicio 1.6 vimos que una forma sencilla de generar una σ-álgebra es a través de los átomos, es decir, de una partición de Ω formada por elementos de la σ-álgebra. En este caso, los átomos son

$$A_1 = X^{-1}(\{0\}) = \{(i,j); i = 1,3,5, j = 1,3,5\}\ ,$$
$$A_2 = X^{-1}(\{1\}) = \{(i,j); i = 1,3,5, j = 2,4,6 \text{ o } i = 2,4,6, j = 1,3,5\} \quad \text{y}$$
$$A_3 = X^{-1}(\{2\}) = \{(i,j); i = 2,4,6, j = 2,4,6\}\ .$$

Realizando todas las posibles uniones de estos átomos y añadiendo el suceso imposible, se obtiene la mínima σ-álgebra buscada:

$$\alpha = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, \Omega\}.$$

Como puede observar el lector, la mínima σ-álgebra para la cual X es variable aleatoria tiene por átomos los sucesos $X^{-1}(\{0\})$, $X^{-1}(\{1\})$ y $X^{-1}(\{2\})$ o, con notación más simplificada, $[X = 0]$, $[X = 1]$ y $[X = 2]$. Esta idea es general, pero sólo para variables aleatorias que toman una cantidad finita o infinita numerable de valores. Así, si

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}\ ,$$

los sucesos de Ω,

$$[X = x_1], [X = x_2], \ldots, [X = x_n], \ldots,$$

son una partición finita o infinita numerable de Ω y constituyen los átomos de la σ-álgebra más pequeña para la cual X es variable aleatoria.

Ejercicio 3.3.
Aplicando la definición de variable aleatoria, calculamos las contraimágenes por la función indicador de A de los intervalos $(-\infty, x]$, para todo número real x. Es decir,

$$I_A^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \bar{A} & 0 \le x < 1 \\ \Omega & x \ge 1 \end{cases}$$

Puesto que los sucesos $\emptyset$ y Ω pertenecen a α, para que la función indicador de A sea una variable aleatoria, el conjunto $\bar{A}$, complementario de A, debe estar, también, incluido

en α o, lo que es equivalente por la definición de σ-álgebra, para que I_A sea variable aleatoria debe exigirse que el conjunto A pertenezca a la σ-álgebra α.

Ejercicio 3.4.

a) Si X es constante, existe un valor k, tal que

$$X(\omega) = k \ ,$$

para todo $\omega \in \Omega$. Por tanto,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset & x < k \\ \Omega & x \geq k \end{cases}$$

Como los sucesos $\emptyset$ y Ω están en cualquier σ-álgebra, X es siempre variable aleatoria.

b) Como acabamos de demostrar, si X es constante, X es variable aleatoria sea cual sea la σ-álgebra; en concreto, X es variable aleatoria siendo $\alpha = \{\emptyset, \Omega\}$.

Veamos ahora que, si X es una variable aleatoria siendo $\alpha = \{\emptyset, \Omega\}$, entonces X es constante. Puesto que X es una variable aleatoria, para todo número real x se cumple que

$$[X \leq x] \in \alpha = \{\emptyset, \Omega\} \ ,$$

lo cual significa que, o $X^{-1}[(-\infty, x]) = \emptyset$, o $X^{-1}[(-\infty, x]) = \Omega$, es decir, o bien

$$X(\omega) > x \ , \quad \text{para todo } \omega \in \Omega \ ,$$

o bien,

$$X(\omega) \leq x \ , \quad \text{para todo } \omega \in \Omega \ .$$

Razonemos por reducción al absurdo, considerando que X no fuese constante; en ese caso, tomaría, al menos, dos valores distintos, esto es, existirían dos elementos del espacio muestral, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, tales que $X(\omega_1) \neq X(\omega_2)$. Supongamos que $X(\omega_1) < X(\omega_2)$ (si $X(\omega_1) > X(\omega_2)$ la demostración sería análoga) y sea x_0 un número real tal que $X(\omega_1) \leq x_0 < X(\omega_2)$. Obviamente, x_0 no cumple ninguna de las expresiones anteriores, es decir, $\omega_1 \in [X \leq x_0]$ y $\omega_2 \notin [X \leq x_0]$, con lo que $[X \leq x_0]$ no podría ser, ni $\emptyset$, ni Ω, y X no sería variable aleatoria. Por consiguiente, X es constante.

Ejercicio 3.5.

a) Demostraremos estas dos igualdades de conjuntos comprobando que cada elemento de uno de los conjuntos que forma la igualdad está contenido en el otro.

Sea $a \in (-\infty, x]$, entonces, $-\infty < a < x + \frac{1}{n}$, para cualquier n, y, por tanto, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)$.

Recíprocamente, si a pertenece a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)$, se verifica que, para cualquier n, $a \in \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right)$, es decir, $-\infty < a < x + \frac{1}{n}$. Esto implica que $-\infty < a \leq x$, ya que, si se cumpliera que $a > x$, entonces habría un n tal que $a > x + \frac{1}{n}$, existiendo contradicción.

Obsérvese, también, que, como $a < x + \frac{1}{n}$, para todo n, tomando límites cuando n tiende a infinito, $a \leq \lim_{n \to \infty} \left(x + \frac{1}{n}\right) = x$.

Veamos la segunda igualdad. Sea $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$. Entonces, existe algún n tal que a pertenece al intervalo $\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$, esto es, $-\infty < a \leq x - \frac{1}{n} < x$ o, lo que es lo mismo, $a \in (-\infty, x)$.

Recíprocamente, si $a \in (-\infty, x)$, es decir, $-\infty < a < x$, entonces, $x - a > 0$, con lo que existe un n lo suficientemente grande tal que $\frac{1}{n} \leq x - a$ y, por tanto, a pertenece al intervalo $\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$, para algún n, verificándose, así, que $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$.

b) Dado que la imagen recíproca de X, X^{-1}, conserva las uniones, intersecciones y complementarios,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \overline{X^{-1}((x, \infty))}$$

y

$$X^{-1}((-\infty, x)) = \overline{X^{-1}([x, \infty))}\,,$$

las condiciones 1) y 3) son equivalentes entre sí, y también son equivalentes entre sí las condiciones 2) y 4), puesto que si un suceso pertenece a α, también pertenece su complementario.

Probemos que son equivalentes las condiciones 1) y 2), con lo cual quedará demostrado este apartado. Supongamos que se cumple 1). De acuerdo con el apartado a),

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$$

y, por tanto,

$$X^{-1}((-\infty, x)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}\left(\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right)\,.$$

Pero, teniendo en cuenta la condición 1), para todo número natural, n, se verifica

$$X^{-1}\left(\left(-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) \in \alpha$$

y, consecuentemente, $X^{-1}((-\infty, x)) \in \alpha$, por ser unión numerable de sucesos de la σ-álgebra.

De forma similar se demuestra que la condición 2) implica 1). Los detalles los dejamos a cargo del lector.

c) Veamos, en primer lugar, que las condiciones i) e iii) son equivalentes. Como $(-\infty, b] = (-\infty, a] \cup (a, b]$, para $a < b$, entonces, $X^{-1}((-\infty, b]) = X^{-1}((-\infty, a]) \cup X^{-1}((a, b])$, con lo cual, si se cumple la condición i), también se cumple la condición iii), ya que $X^{-1}((a, b]) = X^{-1}((-\infty, b]) - X^{-1}((-\infty, a])$ pertenece a α, al poder expresarse como diferencia de sucesos de α.

Recíprocamente, $(-\infty, x] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x - n, x]$ y, por tanto, $X^{-1}((-\infty, x])$ resulta ser $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}((x - n, x])$, con lo cual, si se cumple iii), el suceso $X^{-1}((-\infty, x])$ estará en α, pues puede escribirse como unión de una colección infinita numerable de sucesos de α.

De modo análogo se demostraría la equivalencia entre las condiciones i) y iv). Así, si se verifica la condición i), también la condición iv), ya que es posible expresar el in-

tervalo (a,b) como intersección de los intervalos $(-\infty,b)$ y (a,∞) y, consecuentemente, $X^{-1}((a,b)) \in \alpha$ por ser intersección de los sucesos $X^{-1}((-\infty,b))$ y $X^{-1}((a,\infty))$ que, por la equivalencia de las condiciones 1), 2) y 3) del apartado anterior, están en α.

Por otro lado, cuando se cumple la condición iv), se cumple la i) porque $(x,\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(x,x+n)$, esto es, $X^{-1}((x,\infty)) \in \alpha$, pues es unión de una colección infinita numerable de sucesos, $\{X^{-1}((x,x+n))\}_{n=1}^{\infty}$, que pertenecen a α. Entonces, si $X^{-1}((x,\infty))$ pertenece a α, también pertenecerá su complementario, $\overline{X^{-1}((x,\infty))} = X^{-1}((-\infty,x])$.

También son equivalentes las condiciones i) y v), ya que el intervalo $[a,b)$ puede escribirse como intersección de los intervalos $(-\infty,b)$ y $[a,\infty)$ con lo que, si se verifica la condición i), tanto $X^{-1}((-\infty,b))$ como $X^{-1}([a,\infty))$ estarán en α por la equivalencia de las condiciones 1), 2) y 4) del apartado anterior, y, por consiguiente, $X^{-1}([a,b)) \in \alpha$.

Cuando se cumple la condición v), se cumple la condición i) puesto que, en tal caso, el suceso $X^{-1}([x,\infty))$ estará en α, pues es posible escribirlo como $\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}([x,x+n))$, es decir, como unión de una colección infinita numerable de sucesos de α. Si $X^{-1}([x,\infty)) \in \alpha$, también $X^{-1}((-\infty,x])$ pertenece a α por la equivalencia entre las condiciones 1 y 4 del apartado anterior.

Para cerrar esta cadena de equivalencias, hemos de observar que la condición i) implica la ii) porque el suceso $X^{-1}([a,b])$ puede expresarse como intersección de dos sucesos de la σ-álgebra, $X^{-1}((-\infty,b])$ y $X^{-1}([a,\infty))$, suceso que pertenece a α por la equivalencia entre las condiciones 1 y 4 del apartado anterior.

Por último, la condición ii) implica la v) y, por tanto, la i), pues, si $X^{-1}([a,b])$ y $X^{-1}([b,c]) \in \alpha$, también $X^{-1}([a,b]) \cap X^{-1}([b,c]) = X^{-1}(\{b\}) \in \alpha$, con lo cual se tiene que $X^{-1}([a,b]) - X^{-1}(\{b\}) = X^{-1}([a,b))$ pertenece a α.

Ejercicio 3.6.

Para que el conjunto $[X = x]$ pueda probabilizarse ha de pertenecer a la σ-álgebra α. Ahora bien, para cualquier número real x, se verifica

$$[X = x] = [X \leq x] - [X < x] ,$$

esto es, $[X = x]$ puede expresarse como diferencia de dos sucesos que pertenecen a α, con lo cual, también está en α. Por consiguiente, y puesto que el suceso $[X < x]$ está contenido en el suceso $[X \leq x]$, se cumple que

$$p[X = x] = p[X \leq x] - p[X < x] ,$$

sin más que aplicar las propiedades que se deducen de la definición de probabilidad.

Ejercicio 3.7.

a) Advertirá el lector que la simple observación de la figura 3.1 pone en evidencia las tres propiedades que caracterizan a una función de distribución.

Demostremos estas tres condiciones.

1. F_1 es una función monótona creciente. Evidentemente, para los números negativos es constante (vale cero).

Si $x_1 < 0 < x_2$,

$$F_1(x_1) = 0 < 1 - e^{-x_2} = F_1(x_2) .$$

Si $0 < x_1 < x_2$, $e^{-x_1} > e^{-x_2}$ y, por tanto,

$$F_1(x_1) = 1 - e^{-x_1} < 1 - e^{-x_2} = F_1(x_2) .$$

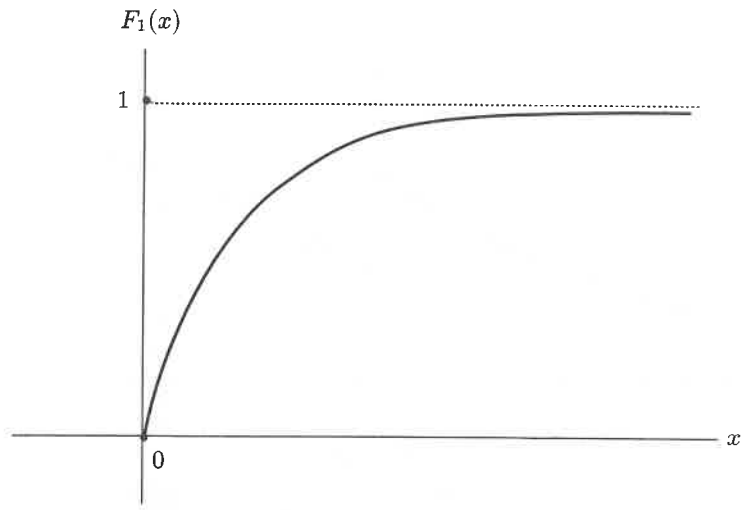


FIG. 3.1.

2. Obviamente,

$$\lim_{x \to -\infty} F_1(x) = 0$$

y

$$\lim_{x \to \infty} F_1(x) = \lim_{x \to \infty} (1 - e^{-x}) = 1 - \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 1 .$$

3. F_1 es continua por la derecha. Más aún, es continua en toda la recta. El lector puede comprobar que en el único punto conflictivo, $x = 0$, coinciden los límites por la derecha y por la izquierda, siendo su valor igual a $F_1(0)$.

En definitiva, F_1 es la función de distribución de una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f_1(x) = \frac{dF_1(x)}{dx} = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) La representación gráfica de esta función (véase la figura 3.2) muestra que no es monótona creciente; por ejemplo, $F_2(-0.1) = 0.604$ y $F_2(0.1) = 0.397$, lo cual basta para probar que F_2 no es función de distribución.

Pero, además, F_2 tampoco es continua por la derecha en el cero, ya que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F_2(0 + \varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \left(1 - \frac{2}{3} \cdot e^{-\varepsilon}\right) = \frac{1}{3} ,$$

siendo $F_2(0) = \frac{2}{3}$. Por tanto, F_2 no es función de distribución.

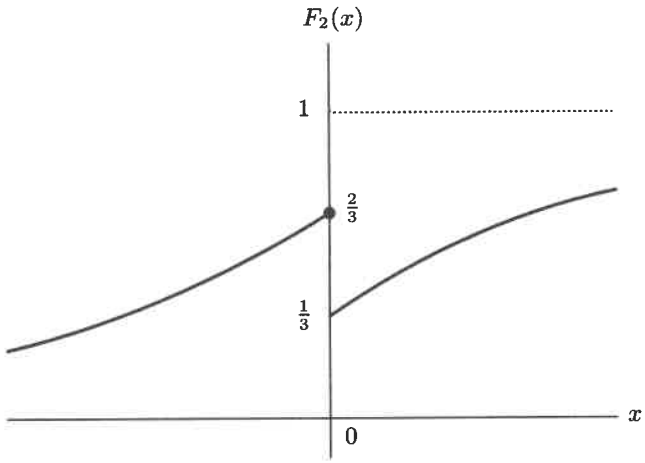


FIG. 3.2.

c) De nuevo, la gráfica de la función pone en evidencia las tres propiedades que caracterizan a una función de distribución (véase la figura 3.3).

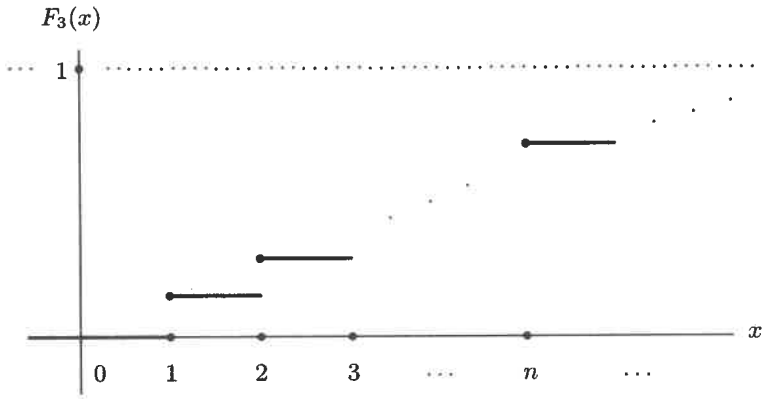


FIG. 3.3.

Así, la función es monótona creciente, pues es constante hasta el 1 y en los intervalos $(k, k+1)$ con $k = 1, 2, \ldots$, y crece estrictamente entre dos intervalos consecutivos, dado que, si x_1 y x_2 verifican que $k \leq x_1 < k+1$ y $k+1 \leq x_2 < k+2$,

$$F_3(x_1) = 1 - e^{-2k} < 1 - e^{-2(k+1)} = F_3(x_2)\,.$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to-\infty} F_3(x) = 0$$

y

$$\lim_{x\to\infty} F_3(x) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\in z}} 1 - e^{-2k} = 1 .$$

Por último, la función es continua salvo en los números enteros positivos, donde es continua por la derecha (obsérvese que, si se cambiara el orden de las desigualdades que definen los intervalos donde F_3 no se anula, la función no sería continua por la derecha).

Por tanto, F_3 es la función de distribución de una variable discreta, pues es numerablemente escalonada (constante en los intervalos que no aportan probabilidad y discontinua por la izquierda en los valores de la variable). La función de probabilidad es el *salto* de la función de distribución en los puntos de discontinuidad. Así,

$$f_3(k) = p[X = k] = F_3(k) - F_3(k-1) = (1 - e^{-2k}) - (1 - e^{-2(k-1)}) = e^{-2k}(e^2 - 1) ,$$

para $k = 1, 2, \ldots$, anulándose en el resto.

d) Si representamos gráficamente la función F_4 (véase la figura 3.4), vemos que no es monótona creciente; por ejemplo, $F_4(-1.1) = 0$ y $F_4(-0.7) = -0.7$.

Por otro lado, para todo número real x tal que $-1 \leq x < 0$, se cumple que $F_4(x) = x < 0$, es decir, F_4 es negativa en dicho intervalo de valores. Consecuentemente, F_4 no es función de distribución.

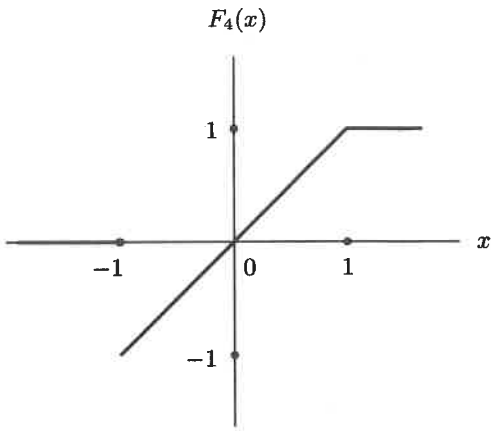


FIG. 3.4.

Ejercicio 3.8.

a) El espacio muestral asociado al experimento consistente en lanzar una moneda equilibrada dos veces y observar el resultado es

$$\Omega = \{(c,c),(c,z),(z,c),(z,z)\} ,$$

donde c designa el resultado *obtener cara* y z, *obtener cruz.*

La aplicación X, *número de caras obtenidas*, hace corresponder a cada resultado del experimento un número real, el número de caras que se observan:

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & (c,c) & \hookrightarrow & 2 \\ & (c,z) & \hookrightarrow & 1 \\ & (z,c) & \hookrightarrow & 1 \\ & (z,z) & \hookrightarrow & 0 \end{array}$$

El conjunto de valores de la variable X es

$$X(\Omega) = \{0,1,2\} .$$

b) Teniendo en cuenta la naturaleza de la moneda, podemos suponer que todos los resultados son igualmente probables, es decir,

$$p[(c,c)] = p[(c,z)] = p[(z,c)] = p[(z,z)] = 1/4 ,$$

lo que implica que estamos trabajando con la σ-álgebra $\alpha = \mathcal{P}(\Omega)$.

Por tanto, para cualquier número real x, la contraimagen por X del intervalo $(-\infty, x]$,

$$X^{-1}((-\infty,x]) = [X \leq x] = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{(z,z)\} & 0 \leq x < 1 \\ \{(z,z),(c,z),(z,c)\} & 1 \leq x < 2 \\ \Omega & x \geq 2 \end{cases}$$

pertenece a la σ-álgebra, $\alpha = \mathcal{P}(\Omega)$, con lo cual X es variable aleatoria.

El suceso $[X = 1]$, *obtener una cara*, es el conjunto de resultados del experimento en los que se observa una sola cara, esto es,

$$[X = 1] = X^{-1}(\{1\}) = \{(c,z),(z,c)\} ,$$

por lo que la probabilidad de obtener una cara es

$$p[X = 1] = p[(c,z),(z,c)] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} .$$

De igual forma hallaríamos la probabilidad del suceso $[X < 2]$, *obtener un número de caras inferior a* 2,

$$p[X < 2] = p[(z,z),(c,z),(z,c)] = \frac{3}{4} .$$

Puede comprobar el lector que si consideramos el espacio probabilístico (Ω, α', p'), siendo $\alpha' = \{\emptyset, C, \overline{C}, \Omega\}$, con $\overline{C} = \{(z,z)\}$ y $p'(\overline{C}) = \frac{1}{4}$, la aplicación X, *número de caras obtenidas*, no es una variable aleatoria, no pudiendo calcularse, por ejemplo, la probabilidad del suceso $[X = 1]$.

c) Hallemos la función de distribución teniendo en cuenta cuáles son los sucesos $[X \leq x]$, ya descritos en el anterior apartado, para los distintos valores de x. Entonces,

$$F_X(x) = p[X \leq x] = \begin{cases} p(\emptyset) = 0 & x < 0 \\ p[(z,z)] = 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ p[(z,z),(c,z),(z,c)] = 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ p(\Omega) = 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Por su parte, la función de probabilidad, $f_X(x) = p[X = x]$, puede hallarse directamente, o calculando los *saltos* de la función de distribución en sus puntos de discontinuidad, es decir,

$$f_X(x) = p[X = x] = F_X(x) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F_X(x - \varepsilon) \, .$$

Por cualquiera de los procedimientos, el resultado es inmediato:

$$f_X(x) = p[X = x] = \begin{cases} 1/4 & x = 0 \\ 2/4 & x = 1 \\ 1/4 & x = 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio 3.9.

a) Para hallar el valor de k hemos de tener en cuenta que f es una función de probabilidad y, por consiguiente,

$$\sum_{x=1}^{n} f(x) = \sum_{x=1}^{n} k \cdot x = k \cdot \sum_{x=1}^{n} x = k \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n = 1 \, ,$$

donde la penúltima igualdad es el resultado de sumar los n primeros números naturales. Sin más que despejar, se obtiene que k es igual a $\frac{2}{n(n+1)}$. Por tanto,

$$f(x) = p[X = x] = \begin{cases} \dfrac{2x}{n(n+1)} & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calculemos la función de distribución, $F(x) = p[X \leq x]$, para los distintos valores de x. Así, para $x < 1$, $F(x) = 0$, pues el primer valor de la variable es el uno.

Para $1 \leq x < 2$,

$$F(x) = p[X \leq x] = p[X = 1] = \frac{2}{n(n+1)} \, .$$

Para $2 \leq x < 3$,

$$F(x) = p[X \leq x] = p[X = 1] + p[X = 2] = \frac{6}{n(n+1)} .$$

En general, para un valor x tal que $k \leq x < k+1$, siendo k un número entero positivo menor que n,

$$F(x) = p[X \leq x] = \sum_{x=1}^{k} p[X = x] = \frac{2}{n(n+1)} (1 + 2 + \cdots + k) = \frac{k(k+1)}{n(n+1)} .$$

Por último, para $x \geq n$, se ha acumulado toda la probabilidad y, por tanto, $F(x) = 1$. En resumen,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{k(k+1)}{n(n+1)} & k \leq x < k+1, \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

b) El cálculo de la probabilidad pedida obliga a distinguir si n es par o es impar. Si n es par, la probabilidad buscada es

$$\sum_{i=1}^{n/2} p[X = 2i] = \sum_{i=1}^{n/2} \frac{2}{n(n+1)} \cdot 2i = \frac{4}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n/2} i =$$

$$= \frac{4}{n(n+1)} \cdot \frac{1 + \frac{n}{2}}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{2+n}{2(1+n)} .$$

Por el contrario, si n es impar, la probabilidad de que la variable X tome un valor par es

$$\sum_{i=1}^{(n-1)/2} p[X = 2i] = \sum_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{2}{n(n+1)} \cdot 2i = \frac{4}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{(n-1)/2} i =$$

$$= \frac{4}{n(n+1)} \cdot \frac{1 + \frac{n-1}{2}}{2} \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2n} .$$

Ejercicio 3.10.

Consideremos la variable aleatoria X, *número de respuestas acertadas por el alumno*. Esta variable discreta toma los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5. La variable aleatoria Y, *número de puntos obtenidos*, puede expresarse como $Y = 2 \cdot X$, y sus valores son, por tanto, 0, 2, 4, 6, 8 y 10, según el número de respuestas acertadas. El hecho de que Y sea función de X permite conocer la función de probabilidad de la variable Y calculando la de X.

Teniendo en cuenta que las elecciones de respuesta en cada pregunta son experimentos independientes, la función de probabilidad de X en el punto cero o, equivalentemente, la

función de probabilidad de la variable Y en el punto cero, es la probabilidad de que el alumno no obtenga ningún punto, esto es,

$$f_Y(0) = p[Y = 0] = p[X = 0] = p(\bar{A}_1 \dots \bar{A}_5) = p(\bar{A}_1) \cdots p(\bar{A}_5) ,$$

donde A_i es el suceso *acertar en la pregunta i-ésima*, $i = 1, \dots, 5$. Como $p(A_i) = \frac{1}{3}$ para cualquiera de las preguntas, entonces,

$$f_Y(0) = \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5 .$$

Para calcular la función de probabilidad de la variable Y en el punto dos, esto es, la probabilidad de que el alumno dé con la respuesta correcta en una sola de las preguntas, hemos de considerar que ésta puede ser una cualquiera de las cinco. Si, por ejemplo, fuera la primera pregunta la que responde correctamente, tendríamos

$$p(A_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_5) = p(A_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdots p(\bar{A}_5) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 .$$

Puesto que son cinco las posibles preguntas que el alumno puede responder correctamente, la función de probabilidad de la variable Y en el punto dos es

$$f_Y(2) = p[Y = 2] = p[X = 1] = 5 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 .$$

En general, para calcular la función de probabilidad de la variable X en el punto x, donde $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, hemos de tener en cuenta que hay x respuestas acertadas y $5 - x$ incorrectas. Un suceso en el que se presente esta situación es el que resulta de acertar las x primeras preguntas y fallar en las $5 - x$ restantes,

$$A_1 \dots A_x \bar{A}_{x+1} \dots \bar{A}_5 ,$$

cuya probabilidad es

$$p(A_1 \dots A_x \bar{A}_{x+1} \dots \bar{A}_5) = p(A_1) \cdots p(A_x) \cdot p(\bar{A}_{x+1}) \cdots p(\bar{A}_5) = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} .$$

El número de sucesos en los que A aparece x veces y $\bar{A}$ aparece $n - x$ veces es el número combinatorio

$$P_5^{x,5-x} = \frac{5!}{x! \cdot (5-x)!} = \binom{5}{x} .$$

En definitiva, la función de probabilidad de la variable X en el punto x, donde $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, es

$$f_X(x) = p[X = x] = \binom{5}{x} \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} ,$$

por lo que la función de probabilidad de la variable Y en el punto y es

$$f_Y(y) = p[Y = y] = p\left[X = \frac{y}{2}\right] = \binom{5}{\frac{y}{2}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-\frac{y}{2}} ,$$

con $y = 0, 2, 4, 6, 8, 10$. En el capítulo 8 estudiaremos una versión más general de la distribución de la variable X, denominada *binomial*.

Ejercicio 3.11.
Siguiendo con la notación del ejercicio 3.10, si X es la variable aleatoria que designa el *número de respuestas acertadas*, $5 - X$ es la variable *número de respuestas erróneas*. Considerando que el alumno tiene dos puntos por respuesta correcta y un punto menos por respuesta incorrecta, la variable Z, *número de puntos obtenidos* por el alumno en el examen, responde a la expresión $Z = 2 \cdot X - 1 \cdot (5 - X) = 3 \cdot X - 5$. Así, la función de probabilidad de la variable Z se obtiene a partir de la de X:

$$f_Z(z) = p[Z = z] = p\left[X = \frac{z+5}{3}\right] = \binom{5}{\frac{z+5}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{z+5}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^{5-\frac{z+5}{3}} ,$$

para $z = -5, -2, 1, 4, 7, 10$.

Ejercicio 3.12.
a) La probabilidad de que el contable *no cometa ningún error* es la función de probabilidad de la variable X en el punto cero, es decir,

$$p[X = 0] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} .$$

b) La probabilidad de *cometer algún error* es la probabilidad de que la variable X tome valores mayores o iguales que la unidad:

$$p[X \geq 1] = 1 - p[X < 1] = 1 - p[X = 0] = 1 - e^{-\lambda} .$$

c) Hemos de calcular la probabilidad de que *no cometa más de cinco errores* condicionada por el suceso consistente en *haber cometido al menos un error*, esto es, $p[X \leq 5 \mid X \geq 1]$, probabilidad que, aplicando la definición de probabilidad condicionada, resulta

$$p[X \leq 5 \mid X \geq 1] = \frac{p[1 \leq X \leq 5]}{p[X \geq 1]} = \frac{\sum_{x=1}^{5} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!}}{1 - e^{-\lambda}} .$$

En el capítulo 8 estudiaremos la función de probabilidad propuesta en este ejercicio, que se denomina de *Poisson*.

Ejercicio 3.13.
a) Puesto que X es variable aleatoria, su función de probabilidad ha de verificar

$$\sum_{x=0}^{\infty} p[X = x] = 1 ,$$

es decir,

$$0.04 + 0.04 + k + 0.11 + 0.3 + 0.23 + 0.1 + 0.05 + 0.03 = 1 ,$$

donde el último sumando, 0.03, es $\sum_{x=8}^{\infty} p[X = x]$. En consecuencia, k es igual a 0.1.

b) Hemos de hallar $p[X \leq x]$, para todo número real x. Por ejemplo, si $2 \leq x < 3$, la función de distribución en el punto x es

$$F(x) = p[X \leq x] = p[X = 0] + p[X = 1] + p[X = 2] = 0.04 + 0.04 + 0.1 = 0.18 .$$

Análogamente se calcularía la función de distribución para cualquier otro número real, obteniéndose

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.04 & 0 \leq x < 1 \\ 0.08 & 1 \leq x < 2 \\ 0.18 & 2 \leq x < 3 \\ 0.29 & 3 \leq x < 4 \\ 0.59 & 4 \leq x < 5 \\ 0.82 & 5 \leq x < 6 \\ 0.92 & 6 \leq x < 7 \\ 0.97 & 7 \leq x < 8 \end{cases}$$

Como puede observarse, no es posible hallar completamente la función de distribución, ya que la función de probabilidad no está totalmente especificada; ignoramos las probabilidades con las que se venden 8 coches, 9, 10, etc., y, por tanto, a partir de $x = 8$ desconocemos, también, los valores de la función de distribución.

c) Utilizando la función calculada en el apartado anterior, podemos hallar la primera de las probabilidades,

$$p[2 < X \leq 5] = F(5) - F(2) = 0.82 - 0.18 = 0.64 .$$

En cuanto a la segunda probabilidad pedida, puede calcularse considerando que

$$p[X \geq 7] = p[X = 7] + p[X \geq 8] = 0.05 + 0.03 = 0.08 ,$$

o bien, utilizando la función de distribución:

$$p[X \geq 7] = 1 - p[X \leq 6] = 1 - F(6) = 1 - 0.92 = 0.08 .$$

Por último, aplicando la definición de probabilidad condicionada,

$$p[X \leq 6 \mid X > 3] = \frac{p[3 < X \leq 6]}{p[X > 3]} = \frac{F(6) - F(3)}{1 - F(3)} = \frac{0.92 - 0.29}{1 - 0.29} = 0.8873 .$$

Ejercicio 3.14.

a) La variable aleatoria X, *número de pares acertados*, toma los valores 0, 1 y 2. Para hallar la función de probabilidad en estos valores aplicaremos la regla de LAPLACE, contabilizando los casos posibles y los favorables, en cada una de las tres situaciones.

Para calcular el número de casos posibles basta considerar que, por cada una de las $\binom{10}{2}$ elecciones posibles de dos tuercas (número de combinaciones sin repetición de 10 elementos tomados de dos en dos), el fontanero podrá seleccionar, a su vez, $\binom{10}{2}$ grupos de dos tornillos. Por tanto, el número de casos posibles es

$$CP = \binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2} = 2\,025 \,.$$

Los casos favorables a que el fontanero no consiga ninguna pareja con sus dos tornillos y sus dos tuercas, se determinan teniendo en cuenta que, por cada una de las $\binom{10}{2}$ posibles elecciones de dos tornillos, únicamente podrá seleccionar las dos tuercas entre las ocho que no se emparejan con los tornillos elegidos. Así,

$$CF_0 = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} = 1\,260 \,,$$

donde CF_0 indica el número de casos favorables a que consiga cero parejas.

De este modo, la función de probabilidad de la variable aleatoria X en el punto cero es

$$f(0) = p[X = 0] = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2}} = \frac{28}{45} \,.$$

Los casos favorables a la consecución de una sola pareja, CF_1, se obtienen considerando que, por cada una de las $\binom{10}{2}$ elecciones de dos tornillos, hay que tomar una de las tuercas entre las dos que coincidan y la otra entre las ocho restantes; en consecuencia,

$$CF_1 = \binom{10}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{1} = 720 \,,$$

con lo cual,

$$f(1) = p[X = 1] = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2}} = \frac{16}{45} \,.$$

Finalmente, si queremos contabilizar los casos en los que se consiguen dos parejas, CF_2, se ha de tener en cuenta que, una vez elegidos los dos tornillos, sólo queda elegir las dos tuercas que se emparejan con ellos. Por tanto,

$$CF_2 = \binom{10}{2} \cdot \binom{2}{2} = 45 \,,$$

con lo que la función de probabilidad en el punto dos es

$$f(2) = p[X = 2] = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{2}{2}}{\binom{10}{2} \cdot \binom{10}{2}} = \frac{1}{45} \,.$$

Resumiendo, la función de probabilidad de la variable X vale

$$f(x) = \begin{cases} 28/45 & x = 0 \\ 16/45 & x = 1 \\ 1/45 & x = 2 \end{cases}$$

b) La figura 3.5 representa la función de probabilidad de la variable X.

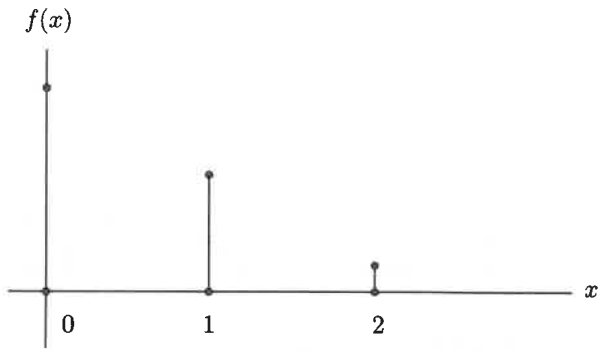


FIG. 3.5.

Como ya es sabido, la función de distribución de una variable aleatoria está definida como $F(x) = p[X \leq x]$, para todo número real x. Así, por ejemplo, si $0 \leq x < 1$,

$$F(x) = p[X \leq x] = p[X = 0] = \frac{28}{45} .$$

Realizando los cálculos para el resto de valores de x se obtiene la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 28/45 & 0 \leq x < 1 \\ 44/45 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

cuya representación gráfica es la mostrada en la figura 3.6.

Adviértase que el *salto* de la función de distribución en cada valor de la variable coincide con la función de probabilidad en dicho punto.

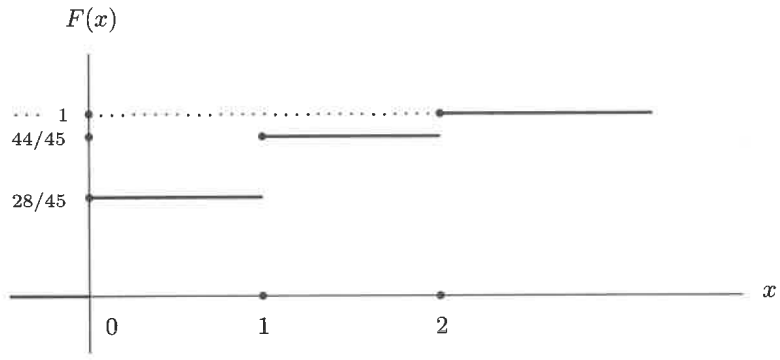


FIG. 3.6.

Ejercicio 3.15.

La variable aleatoria X, *longitud, en centímetros, que el ratón recorre hasta llegar a la salida*, es una variable aleatoria discreta puesto que sólo hay tres recorridos posibles para llegar a ella.

Si el ratón elige el primer camino, lo que hace con probabilidad 0.15, tendrá que recorrer 15 centímetros que, junto a los 20 o 30 que deberá añadir según la dirección que elija en la bifurcación, harán un total de 35 y 45 centímetros, en cada uno de los casos. Suponiendo que la elección de los caminos en la bifurcación sea igualmente probable (nada induce a pensar lo contrario), las distancias 35 y 45 centímetros se recorrerán con una probabilidad de $0.15 \cdot 0.5$, es decir, igual a 0.075, cada una de ellas.

Por el contrario, si el roedor se decide por el segundo camino, tendrá que realizar una distancia de 60 centímetros con probabilidad 0.85.

Consecuentemente, la variable aleatoria X toma los valores 35, 45 y 60 con probabilidades 0.075, 0.075 y 0.85, respectivamente.

Ejercicio 3.16.

Para demostrar que $G(x) = \sum_{x_i \leq x} g(x_i)$ es función de distribución hay que comprobar que cumple las tres propiedades que caracterizan este tipo de funciones, esto es, monotonía creciente, continuidad por la derecha y, además, $G(+\infty) = 1$ y $G(-\infty) = 0$, donde designamos de esta forma los límites de $G(x)$ cuando x tiene a $+\infty$ y a $-\infty$, respectivamente.

Ahora bien, $G(x)$ es monótona creciente, pues si x y x' son dos números reales tales que $x < x'$, entonces,

$$G(x) = \sum_{x_i \leq x} g(x_i) \leq \sum_{x_i \leq x'} g(x_i) = G(x') \,,$$

ya que $g(x_i) \geq 0$ para todo x_i.

También es continua por la derecha:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} G(x+\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \sum_{x_i\le x+\varepsilon} g(x_i) = \sum_{x_i\le x} g(x_i) = G(x)\ ,$$

puesto que g se anula salvo en el conjunto de valores $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$.

Como $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) = 1$, dado un número $\varepsilon > 0$, cualquiera, existe una suma parcial $\sum_{i=1}^{n_0} g(x_i)$, tal que, si $n \ge n_0$,

$$1 - \sum_{i=1}^{n} g(x_i) < \varepsilon\ .$$

Ahora bien, si $x \ge x_{n_0}$,

$$G(x) = \sum_{x_i\le x} g(x_i) \ge \sum_{i=1}^{n_0} g(x_i)\ ,$$

y, por tanto,

$$1 - G(x) \le 1 - \sum_{i=1}^{n_0} g(x_i) < \varepsilon\ .$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = 1\ .$$

Además, si $x < x_1$, entonces,

$$G(x) = \sum_{x_i\le x} g(x_i) = \sum_{x_i<x_1} g(x_i) = 0\ ,$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0\ .$$

En definitiva, G cumple las tres propiedades que caracterizan una función de distribución. Además, es numerablemente escalonada (constante en los intervalos $[x_i, x_{i+1})$ y con discontinuidades en los valores x_i, $i = 1, 2, \ldots$); se trata, consecuentemente, de la función de distribución de una variable aleatoria discreta.

Ejercicio 3.17.

a) La representación gráfica de la función f es la mostrada en la figura 3.7.
Como $f(x)$ es negativa para $0 < x < 1$, f no es función de densidad.

b) Puesto que

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -(1-x) & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

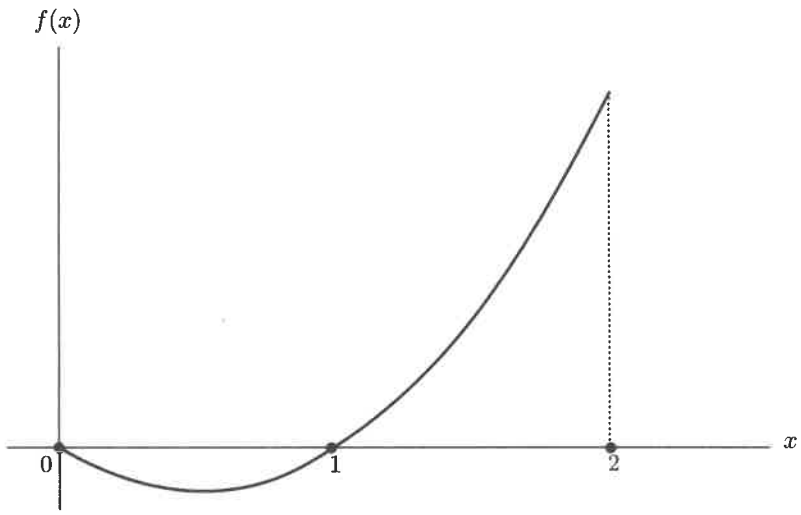


FIG. 3.7.

la función g puede escribirse como

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo su representación gráfica la mostrada en la figura 3.8.

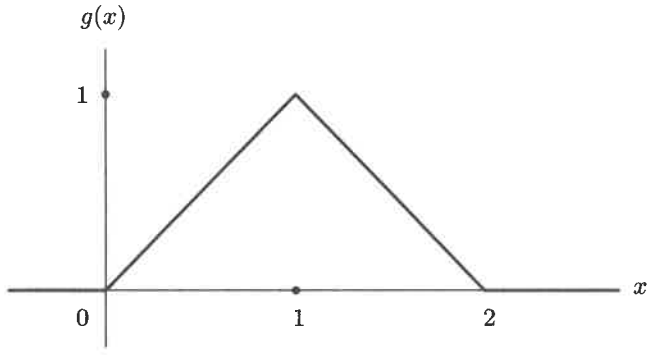


FIG. 3.8.

La función g es positiva para todo número real x. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

Esta propiedad se corrobora geométricamente con el hecho de que el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas es igual a la unidad; en efecto, la superficie de este triángulo de base 2 y altura 1 es igual a $\frac{2\cdot 1}{2} = 1$. Concluimos, así, que g es función de densidad.

Ejercicio 3.18.

a) La función f es no negativa para todo número real. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_{x=1}^{e} = 1\,.$$

Por tanto, f es función de densidad. Obsérvese que las funciones de densidad pueden tomar cualquier valor positivo e, incluso, como en este caso, no estar acotadas.

b) Calculemos $F(x) = p[X \leq x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f se anula en los valores menores que la unidad, entonces, $F(x) = 0$, si $x < 1$. Para $1 \leq x \leq e$,

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{t=1}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \ln x\,.$$

Por último, si $x > e$,

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{t=1}^{e} \frac{1}{t}\,dt = 1\,.$$

Resumiendo, la función de distribución de la variable X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \ln x & 1 \leq x < e \\ 1 & x \geq e \end{cases}$$

Ejercicio 3.19.

En primer lugar, realicemos la demostración para una variable continua, Y, cuya función de densidad es simétrica respecto de cero, $f_Y(-y) = f_Y(y)$, para cualquier y, generalizando posteriormente el resultado. Entonces, tenemos que demostrar que

$$F_Y(-y) = 1 - F_Y(y)\,,$$

para cualquier número real y.

Desarrollemos el primer término de la igualdad:

$$F_Y(-y) = p[Y \leq -y] \quad = 1 - p[Y > -y] =$$

$$= 1 - \int_{t=-y}^{\infty} f_Y(t)\, dt = 1 - \int_{s=y}^{-\infty} f_Y(-s)\,(-ds) =$$

$$= 1 - \int_{s=-\infty}^{y} f_Y(s)\, ds = 1 - p[Y \leq y] =$$
$$= 1 - F_Y(y)\,,$$

sin más que realizar en la integral el cambio de variable $s = -t$.

Generalicemos el resultado anterior para una variable X cuya función de densidad es simétrica respecto de a, $f_X(a - x) = f_X(a + x)$, para cualquier x. En este caso, la variable $Y = X - a$ tiene su función de densidad simétrica respecto de cero (el resultado es inmediato, teniendo en cuenta el teorema del cambio de variable). Entonces,

$$F_X(a - x) \quad = p[X \leq a - x] = p[X - a \leq -x] = F_Y(-x) =$$

$$= 1 - F_Y(x) = 1 - p[X - a \leq x] =$$

$$= 1 - p[X \leq a + x] = 1 - F_X(a + x)\,.$$

La figura 3.9, donde las dos áreas sombreadas representan $F_X(a - x)$ y $1 - F_X(a + x)$, describe este resultado.

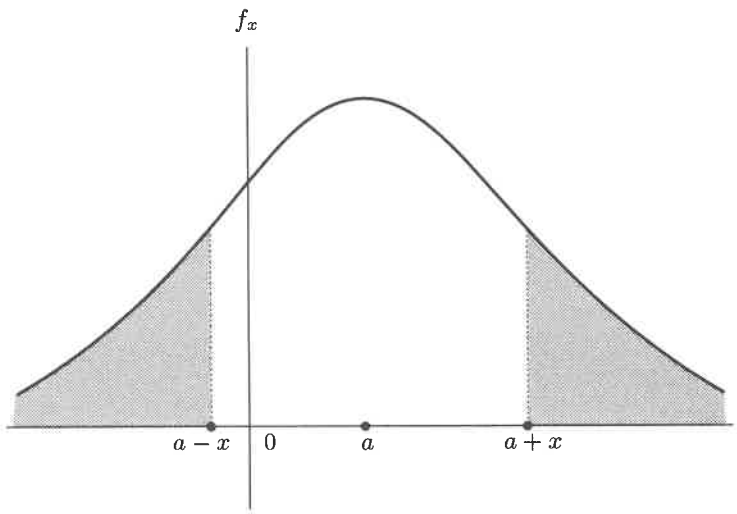


FIG. 3.9.

El resultado demostrado es igualmente válido para variables discretas cuya función de probabilidad sea simétrica.

Ejercicio 3.20.

a) Considerando que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

tendremos que f puede expresarse como

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

con lo que su representación gráfica es la mostrada en la figura 3.10.

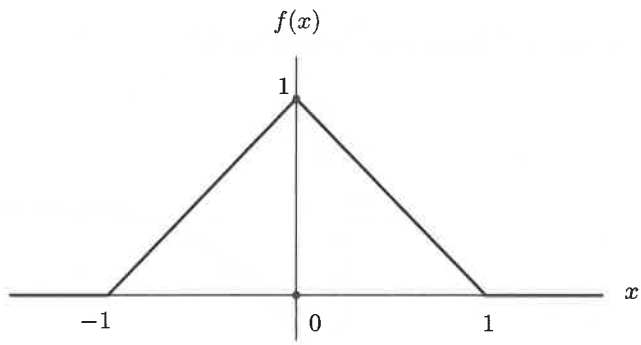


FIG. 3.10.

b) Hemos de calcular $F(x)$, para todo número real x. Así, si $x < -1$,

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0\,,$$

ya que $f(x)$ vale cero, entre $-\infty$ y -1 . Si $-1 \leq x < 0$, la función de distribución es

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{t=-1}^{x} (1+t)\,dt = \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

Para un valor de x comprendido entre 0 y 1, la función de distribución vale

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{t=-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{t=0}^{x} (1-t)\,dt = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}\,.$$

Por último, si $x > 1$,

$$F(x) = p[X \leq x] = \int_{t=-1}^{0} (1+t)\,dt + \int_{t=0}^{1} (1-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,.$$

En resumen, la función de distribución de la variable X es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

y su representación gráfica es la mostrada en la figura 3.11.

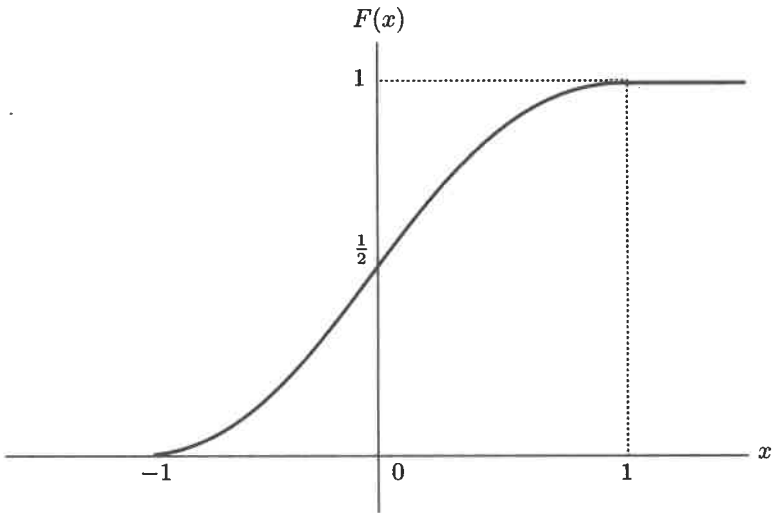


FIG. 3.11.

c) Para calcular $p[X \geq 0]$ podemos utilizar la función de distribución obtenida en el apartado anterior. Así,

$$p[X \geq 0] = 1 - p[X < 0] = 1 - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,,$$

sin más que tener en cuenta que, por ser continua la variable aleatoria, se cumple que

$$p[X < 0] = p[X \leq 0] = F(0) \, .$$

También puede hallarse esta probabilidad integrando la función de densidad,

$$p[X \geq 0] = \int_0^1 (1 - x)\, dx = \frac{1}{2} \, .$$

Advierta el lector que, al ser la función de densidad simétrica en cero, el área bajo la curva de cada una de las dos *mitades* es igual a $\frac{1}{2}$.

Por lo que se refiere a la segunda probabilidad, basta con observar que

$$p\left[|X| < \frac{1}{2}\right] = p\left[-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right] = p\left[-\frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{2}\right] = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \, ,$$

al ser la variable aleatoria X continua.

Puede comprobar el lector que el resultado es cierto, integrando la función de densidad. Asimismo, la probabilidad del suceso $\left[|X| < \frac{1}{2}\right]$ es el área que queda por debajo de la curva que representa la función de densidad y encima del intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, como muestra la figura 3.12. La sencillez de la función de densidad permite, en este caso, el cálculo geométrico de $p\left[|X| < \frac{1}{2}\right]$.

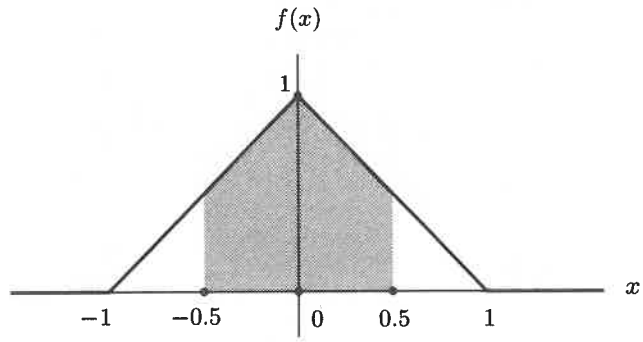


FIG. 3.12.

Ejercicio 3.21.

La función de densidad de la variable X puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{x} & x < 0 \\ \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

por lo cual la probabilidad pedida es

$$p[|X| > 2] = 1 - p[|X| \leq 2] = 1 - p[-2 \leq X \leq 2]$$

que, considerando los valores de la función de densidad en los números reales positivos y negativos, resulta

$$p[|X| > 2] = 1 - \left(\int_{-2}^{0} \frac{1}{2} \cdot e^{x}\, dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2} \cdot e^{-x}\, dx \right) = e^{-2} = 0.135 \,.$$

Advierta el lector que, por ser la función de densidad simétrica respecto del cero, es decir, $f(x) = f(-x)$, para todo número real x, se verifica que

$$p[|X| > 2] = 2 \cdot p[X > 2] \,,$$

con lo cual

$$p[|X| > 2] = 2 \int_{2}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-x}\, dx = e^{-2} \,,$$

resultado que, naturalmente, coincide con el anteriormente obtenido.

Ejercicio 3.22.

a) Como f ha de ser no negativa en toda la recta real, necesariamente $a > 0$. Además, debe verificarse que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

y, por tanto,

$$\int_{0}^{1} a(1+x)\, dx + \int_{1}^{2} \frac{2}{3}\, dx = \frac{9a+4}{6} = 1 \,.$$

Despejando se obtiene el valor $a = 2/9$.

b) Utilizando la función de densidad se tiene que

$$p[0.5 < X \leq 1.5] = \int_{0.5}^{1} \frac{2}{9}\,(1+x)\, dx + \int_{1}^{1.5} \frac{2}{3}\, dx = \frac{19}{36} = 0.528 \,.$$

Ejercicio 3.23.

a) Buscamos un valor de x tal que $p[X \geq x] = 0.95$, donde

$$p[X \geq x] = \int_{t=x}^{\infty} \frac{1}{30} \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot t}\, dt = e^{-\frac{x}{30}} \,.$$

Como esta probabilidad ha de ser igual a 0.95, entonces,

$$e^{-\frac{x}{30}} = 0.95 \,,$$

resultando un valor de x igual a 1.54. Por tanto, en el 95 % de los casos, un paciente tendrá que esperar, como mínimo, 1.54 días para ser operado.

b) Hemos de calcular la probabilidad del suceso $[X \leq 13]$ condicionada por el suceso $[X > 10]$, esto es,

$$p[X \leq 13 \mid X > 10] = \frac{p[10 < X \leq 13]}{p[X > 10]} .$$

La función de densidad permite obtener el numerador,

$$p[10 < X \leq 13] = \int_{10}^{13} \frac{1}{30} \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot x} \, dx = e^{-\frac{10}{30}} - e^{-\frac{13}{30}} ,$$

y el denominador,

$$p[X > 10] = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{30} \cdot e^{-\frac{1}{30} \cdot x} \, dx = e^{-\frac{10}{30}} .$$

Tendremos, así,

$$p[X \leq 13 \mid X > 10] = \frac{e^{-\frac{10}{30}} - e^{-\frac{13}{30}}}{e^{-\frac{10}{30}}} = 1 - e^{-\frac{3}{10}} = 0.0952 .$$

Ejercicio 3.24.

Hemos de probar, en primer lugar, que G cumple las tres condiciones que caracterizan a una función de distribución. Así, y puesto que g es no negativa para todo número real, se cumple que, si $x_1 < x_2$, entonces,

$$G(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} g(t) \, dt \leq \int_{-\infty}^{x_1} g(t) \, dt + \int_{x_1}^{x_2} g(t) \, dt = \int_{-\infty}^{x_2} g(t) \, dt = G(x_2) ,$$

esto es, G es monótona creciente.

Por otro lado,

$$\lim_{x \to \infty} G(x) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} g(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \, dt = 1$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} G(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{x} g(t) \, dt = \int_{-\infty}^{-\infty} g(t) \, dt = 0 .$$

Además, al ser G la primitiva de g, función continua salvo a lo sumo en un número finito de puntos, G es continua y, por consiguiente, continua por la derecha. Por tanto, G es la función de distribución de una variable aleatoria.

Finalmente, G es continua y derivable (su derivada es g), salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos. En consecuencia, la variable aleatoria cuya función de distribución es G, es continua.

Ejercicio 3.25.

a) La representación gráfica de F (véase la figura 3.13) muestra que esta función es monótona creciente: estrictamente creciente en algunos intervalos y constante en otros. Además, por ser nula para $x < 0$ e igual a la unidad para $x \geq 3$, se verifica trivialmente que $F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$.

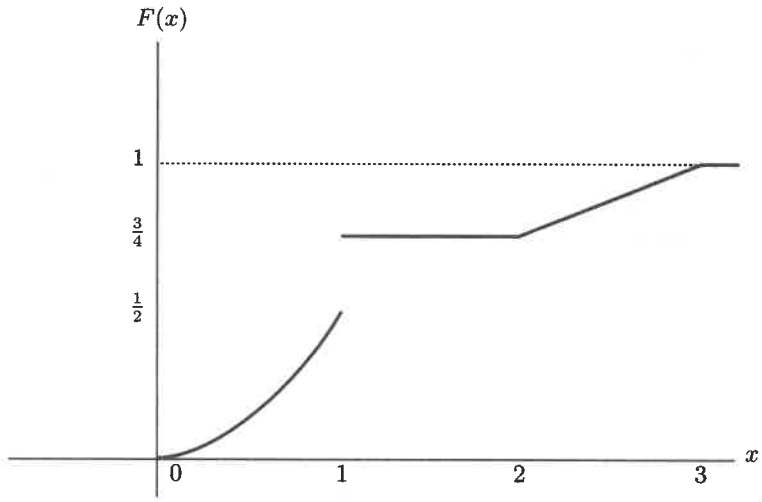


FIG. 3.13.

Por último, como es continua, salvo en $x = 1$, es continua por la derecha, excepto en ese punto. Pero

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(1+\varepsilon) = \frac{3}{4} = F(1)\,,$$

con lo que F es también continua por la derecha para $x = 1$. Por tanto, F es función de distribución.

b) Como F es continua en el punto $\frac{1}{2}$, no hay aporte de probabilidad en ese punto y, por consiguiente,

$$p\left[X = \frac{1}{2}\right] = 0.$$

El punto $x = 1$ es un punto de discontinuidad de F, con lo cual se cumple que

$$p[X < 1] = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(1-\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{(1-\varepsilon)^2}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

La probabilidad del suceso $[X > 2]$ se calcula como

$$p[X > 2] = 1 - p[X \leq 2] = 1 - F(2) = 1 - \frac{2+1}{4} = \frac{1}{4} .$$

Para hallar $p[X = 1]$, esto es, la probabilidad de que la variable sea igual a 1, punto de discontinuidad de F, escribimos

$$p[X = 1] = F(1) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(1 - \varepsilon) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} .$$

Por lo que respecta a la probabilidad del suceso $\left[\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right]$, al ser F continua en el punto $x = 5/2$, dicha probabilidad coincide con la del suceso $\left[\frac{1}{2} < X \leq \frac{5}{2}\right]$ y, entonces,

$$p\left[\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right] = F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{5}{2}+1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{3}{4} .$$

Por último, aplicando la definición de probabilidad condicionada,

$$p[X = 1 \mid X < 2] = \frac{p[X = 1, X < 2]}{p[X < 2]} = \frac{p[X = 1]}{p[X < 2]} = \frac{1/4}{F(2)} = \frac{1}{3} ,$$

ya que, al ser F continua en $x = 2$, se cumple que

$$p[X < 2] = p[X \leq 2] = F(2) = \frac{3}{4} .$$

Ejercicio 3.26.

a) La gráfica de esta función (véase la figura 3.14) muestra que F es monótona creciente, $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$ y, además, F es continua salvo en $x = \frac{1}{2}$, punto en el que es continua por la derecha. Consecuentemente, F es función de distribución.

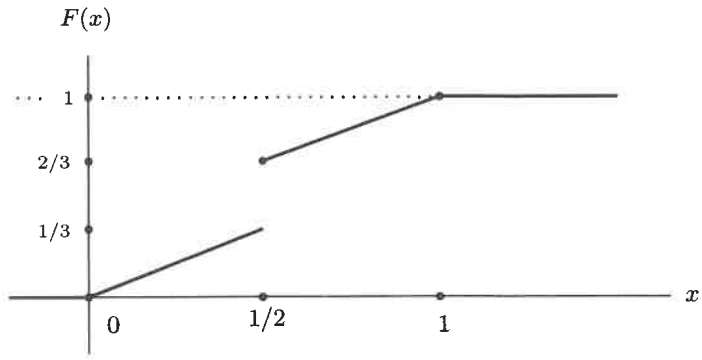


FIG. 3.14.

b) Para hallar la función de probabilidad/densidad, f, hemos de obtener la función de probabilidad en la parte discreta, esto es, en los puntos de discontinuidad de F y la función de densidad en el resto de los puntos.

Dado que el único punto donde F es discontinua es $x = \frac{1}{2}$, entonces,

$$p\left[X = \frac{1}{2}\right] = F\left(\frac{1}{2}\right) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) .$$

Ahora bien,

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{2}{3}$$

y

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) = \frac{1}{3} ,$$

con lo cual

$$p\left[X = \frac{1}{2}\right] = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} ,$$

valor que coincide con el *salto* de la función de distribución en $x = \frac{1}{2}$.

En definitiva, la función de probabilidad/densidad de la variable X es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(0) = 0 & x < 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2}{3} \cdot x\right) = \dfrac{2}{3} & 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ p\left[X = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3} & x = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{3}(2x+1)\right] = \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{2} < x < 1 \\ \dfrac{d}{dx}(1) = 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

c) Para cada número real x, hemos de expresar F como

$$F(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha) F_c(x) ,$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$ y F_d y F_c son las funciones de distribución de una variable aleatoria discreta y de una variable aleatoria continua, respectivamente.

Como F_c es continua, cada discontinuidad de F_d se traduce en una de F. Ahora bien, al estar multiplicada F_d por α, el tamaño del *salto* en la discontinuidad de F es el de la correspondiente discontinuidad de F_d, pero multiplicada por α.

Así, si x_i $(i = 1, \ldots, n, \ldots)$ es un punto de discontinuidad de F, el tamaño de esta discontinuidad es el *salto* de la función F en dicho punto,

$$F(x_i) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(x_i - \varepsilon) = p[X = x_i] .$$

De igual forma, si X_d es la variable discreta que toma los valores $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ y cuya función de distribución es F_d, el *salto* de F_d en x_i es

$$F_d(x_i) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F_d(x_i - \varepsilon) = F_d(x_i) - F_d(x_{i-1}) = p[X_d = x_i] \, .$$

Entonces, dado que la suma de los *saltos* de las discontinuidades de F coincide con la suma de los de F_d multiplicados por α,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p[X = x_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha \cdot p[X_d = x_i] = \alpha \, .$$

Hallado α por la condición anterior, obtendríamos la función de probabilidad de X_d y, consecuentemente, F_d, teniendo en cuenta que el *salto* en cada discontinuidad de F_d coincide con el *salto* en ese mismo punto de F, dividido por α, es decir,

$$p[X_d = x_i] = \frac{p[X = x_i]}{\alpha} \, .$$

En nuestro caso concreto, con una única discontinuidad en $x = \frac{1}{2}$,

$$\alpha = p\left[X = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3} \, .$$

Con ello, puede obtenerse F_d, función de distribución de una variable que vale únicamente $\frac{1}{2}$ con probabilidad 1. Por tanto,

$$F_d(x) = \begin{cases} 0 & x < \dfrac{1}{2} \\ \\ 1 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resulta ahora sencillo hallar la función de distribución continua. Como

$$F(x) = \alpha F_d(x) + (1 - \alpha) \, F_c(x) \, ,$$

despejando F_c,

$$F_c(x) = \frac{F(x) - \alpha F_d(x)}{1 - \alpha} \, ,$$

para todo número real x.

Pero

$$\alpha F_d(x) = \frac{1}{3} \cdot F_d(x) = \begin{cases} 0 & x < \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{1}{3} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

de donde,

$$F(x) - \alpha F_d(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3} \cdot x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}(2x+1) - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot x & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} & x \geq 1 \end{cases}$$

y, en definitiva,

$$F_c(x) = \frac{F(x) - \alpha F_d(x)}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{0}{2/3} & x < 0 \\ \frac{2x/3}{2/3} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2/3}{2/3} = 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

es decir,

$$F_c(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3.27.

a) La función de densidad de X, *error en el diámetro*, puede escribirse como

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^x & x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

como vimos en el ejercicio 3.21.

Para que una bola sea aceptada, el error en su diámetro no tiene que ser superior a ± 0.5 centímetros. Sea, entonces, Y la variable aleatoria a estudiar, esto es, la que recoge *el error en el diámetro de aquellas bolas no rechazadas*, es decir, de aquellas cuyo error se encuentre entre -0.5 y 0.5 centímetros.

Obviamente, la variable Y es la resultante de truncar la variable X en el intervalo $[-0.5, 0.5]$, por lo que su distribución es la de X, condicionada por el suceso $[-0.5 \leq X \leq 0.5]$.

Obtengamos la función de distribución de la variable Y. Sea y un valor de dicho intervalo, es decir, $-0.5 \leq y \leq 0.5$. Entonces,

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[X \leq y \mid -0.5 \leq X \leq 0.5] .$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada, la función de distribución de la variable Y es

$$F_Y(y) = \frac{p[X \leq y\ ,\ -0.5 \leq X \leq 0.5]}{p[-0.5 \leq X \leq 0.5]} = \frac{p[-0.5 \leq X \leq y]}{p[-0.5 \leq X \leq 0.5]} = \\ = \frac{F_X(y) - F_X(-0.5)}{F_X(0.5) - F_X(-0.5)}\ .$$

Integrando la función de densidad de la variable X resulta:

$$F_X(-0.5) = \int_{-\infty}^{-0.5} \frac{1}{2} \cdot e^x\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^{-0.5}$$

y, por tanto,

$$F_X(0.5) = 1 - F_X(-0.5) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-0.5}\ ,$$

ya que f_X es simétrica respecto al cero. Así, el denominador de la expresión anterior vale

$$F_X(0.5) - F_X(-0.5) = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-0.5} - \frac{1}{2} \cdot e^{-0.5} = 1 - e^{-0.5}\ .$$

Además,

$$F_X(y) = \begin{cases} \int_{x=-\infty}^{y} \frac{1}{2} \cdot e^x\, dx = \frac{1}{2} \cdot e^y & -0.5 \leq y < 0 \\ \int_{x=-\infty}^{0} \frac{1}{2} \cdot e^x\, dx + \int_{x=0}^{y} \frac{1}{2} \cdot e^{-x}\, dx = 1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-y} & 0 \leq y \leq 0.5 \end{cases}$$

Sustituyendo en la expresión de la función de distribución de la variable Y, se obtiene

$$F_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{0.5e^y - 0.5e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} & -0.5 \leq y < 0 \\ \dfrac{1 - 0.5e^{-y} - 0.5e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} & 0 \leq y \leq 0.5 \end{cases}$$

Por otro lado, para $y < -0.5$,

$$p[X \leq y, -0.5 \leq X \leq 0.5] = 0\ ,$$

y, en consecuencia, $F_Y(y) = 0$. Si $y > 0.5$,

$$p[X \leq y, -0.5 \leq X \leq 0.5] = p[-0.5 \leq X \leq 0.5]\ ,$$

de donde $F_Y(y) = 1$. Estos últimos resultados podrían haberse deducido sin necesidad de cálculos, ya que la variable aleatoria Y no toma valores menores que -0.5, ni superiores a 0.5.

En definitiva, la función de distribución de la variable Y resulta

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -0.5 \\ \dfrac{0.5e^{y} - 0.5e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} & -0.5 \leq y < 0 \\ \dfrac{1 - 0.5e^{-y} - 0.5e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} & 0 \leq y \leq 0.5 \\ 1 & y > 0.5 \end{cases}$$

Derivando la función de distribución hallamos la función de densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{1 - e^{-0.5}} \cdot e^{y} & -0.5 \leq y < 0 \\ \dfrac{0.5}{1 - e^{-0.5}} \cdot e^{-y} & 0 \leq y \leq 0.5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es decir,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{0.5}{1 - e^{-0.5}} \cdot e^{-|y|} & -0.5 \leq y \leq 0.5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Puede observar el lector que la función de densidad se anula fuera del intervalo $[-0.5, 0.5]$ y ello se compensa incrementando la de X dentro del intervalo en la proporción $\frac{1}{1-e^{-0.5}} = 2.54$, como se observa en la figura 3.15.

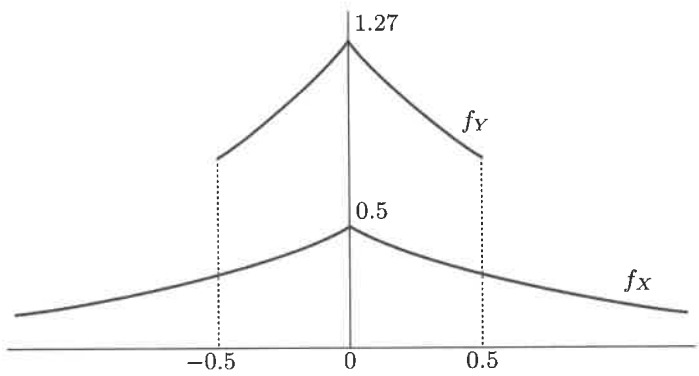


FIG. 3.15.

b) La probabilidad pedida puede calcularse a partir de la distribución de la variable Y obtenida en el apartado anterior. En concreto, la probabilidad de que *el diámetro de una bola aceptada sea superior a 5.2 centímetros* o, equivalentemente, la probabilidad de que *el error sea superior a 0.2 centímetros* es

$$p[Y > 0.2] = 1 - p[Y \leq 0.2] = 1 - F_Y(0.2) = 1 - \frac{1 - 0.5e^{-0.2} - 0.5e^{-0.5}}{1 - e^{-0.5}} = 0.2697 .$$

Ejercicio 3.28.

a) Sea Y la variable que designa el *tiempo de vida de la componente comercializada.* Puesto que Y únicamente toma valores mayores que 3, se cumple que $F_Y(y) = 0$, si $y \leq 3$. Además, si $y > 3$,

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[X \leq y \mid X > 3] ,$$

probabilidad que es igual a

$$\frac{p[X \leq y\ ,\ X > 3]}{p[X > 3]} = \frac{p[3 < X \leq y]}{1 - p[X \leq 3]} = \frac{F_X(y) - F_X(3)}{1 - F_X(3)} .$$

A partir de la función de densidad de la variable X calculamos, para $y > 0$, la función de distribución de X,

$$F_X(y) = \int_{x=0}^{y} \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{x}{8}}\, dx = 1 - e^{-\frac{y}{8}} ,$$

y, por tanto, $F_X(3) = 1 - e^{-\frac{3}{8}}$. Entonces, si $y > 3$,

$$F_Y(y) = \frac{1 - e^{-\frac{y}{8}} - (1 - e^{-\frac{3}{8}})}{1 - (1 - e^{-\frac{3}{8}})} = 1 - e^{-\frac{1}{8}(y-3)}$$

con lo que la función de distribución de la variable Y es

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 3 \\ 1 - e^{-\frac{1}{8}(y-3)} & y > 3 \end{cases}$$

Podemos obtener la función de densidad de Y, derivando su función de distribución. Así,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 3 \\ \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}(y-3)} & y > 3 \end{cases}$$

b) La probabilidad pedida se refiere a las componentes cuyos tiempos de vida son superiores a 3 horas. Por ello, puede utilizarse la función de distribución obtenida en el apartado anterior para hallar dicha probabilidad:

$$p[Y > 12] = 1 - p[Y \leq 12] = 1 - F_Y(12) = 1 - \left[1 - e^{-\frac{1}{8}(12-3)}\right] = 0.3247 .$$

Ejercicio 3.29.
a) Para probar que $|X|$ es una variable aleatoria hemos de demostrar que el suceso $|X|^{-1}((-\infty, x]) = [|X| \leq x]$ pertenece a α, para todo número real x. Ahora bien,

$$|X|^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid |X(\omega)| \leq x\} ,$$

suceso que es igual al suceso imposible, si x es negativo, y si x es positivo puede escribirse en función de la variable X como

$$\{\omega \in \Omega \mid -x \leq X(\omega) \leq x\} = X^{-1}([-x, x]) ,$$

que pertenece a α por ser X una variable aleatoria.

En definitiva,

$$[|X| \leq x] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ [-x \leq X \leq x] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

con lo que, para todo número real x, dicho suceso pertenece a α y $|X|$ es una variable aleatoria.

b) La variable $Y = |X|$ asocia a cada valor su correspondiente valor positivo. Por tanto, Y toma los valores 0 y 1. Así,

$$f_Y(0) = p[Y = 0] = p[X = 0] = 0.3$$

y

$$f_Y(1) = p[Y = 1] = p[X = -1] + p[X = 1] = 0.7 .$$

En cuanto a la función de distribución de la variable Y, vale

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 0.3 & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3.30.
Sea Y la variable aleatoria que denota el *número de ingresos en la unidad coronaria del hospital comarcal.* Esta variable es función de X, *número de pacientes que requieren diariamente estos servicios*; en concreto,

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X < 3 \\ 3 & \text{si } X \geq 3 \end{cases}$$

Por tanto,

$$f_Y(y) = p[Y = y] = \begin{cases} p[X = y] = e^{-5} \cdot \dfrac{5^y}{y!} & y = 0, 1, 2 \\ \\ \sum_{x=3}^{\infty} p[X = x] = \sum_{x=3}^{\infty} e^{-5} \cdot \dfrac{5^x}{x!} & y = 3 \end{cases}$$

Ejercicio 3.31.
Si $a > 0$, entonces,

$$F_Y(y) = p[aX + b \leq y] = p\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

y, por tanto,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} .$$

Si $a < 0$,

$$F_Y(y) = p[aX + b \leq y] = p\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) .$$

Entonces,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left[1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\right] = -f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} .$$

En definitiva, sea cual sea el signo de a, la función de densidad de la variable Y es

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|} .$$

Advierta el lector que este resultado se obtendría de modo inmediato aplicando el teorema del cambio de variable, puesto que la transformación $y = ax + b$ verifica las hipótesis exigidas en dicho teorema. La transformación inversa es $x = \frac{y-b}{a}$, y $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\frac{y-b}{a}) = \frac{1}{a}$, con lo que

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \left|\frac{1}{a}\right| ,$$

que es la misma función que acabamos de obtener.

Ejercicio 3.32.
La transformación $y = e^{-x}$ es biyectiva y monótona, con lo cual Y es una variable aleatoria. Hallemos su función de distribución:

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[e^{-X} \leq y] .$$

Para $y \leq 0$, dicha probabilidad se anula; si $y > 0$, el suceso anterior puede escribirse en función de X,

$$F_Y(y) = p[X > -\ln y] = 1 - F_X(-\ln y) .$$

En definitiva,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - F_X(-\ln y) & y > 0 \end{cases}$$

Derivando, se obtiene la función de densidad de la variable Y; así, la derivada se anula si $y \leqslant 0$, y cuando y es positivo,

$$f_Y(y) = f_X(-\ln y) \cdot \frac{1}{y} \begin{cases} 0 & y \geq 1 \\ -\ln y \cdot e^{-(-\ln y)} \cdot \dfrac{1}{y} & 0 < y < 1 \end{cases}$$

dado que, si $y \geq 1$, entonces, $-\ln y \leq 0$ y, consecuentemente, $f_Y(y) = 0$, ya que $f_X(-\ln y)$ se anula. En resumen,

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La segunda transformación, $z = \ln(x+1)$, es biyectiva y, puesto que X toma valores positivos, también es monótona. La función de distribución de la variable aleatoria Z se calcula, igual que en el caso anterior, a partir de la de X:

$$F_Z(z) = p[Z \leq z] = p[\ln(X+1) \leq z] .$$

Despejando X se tiene

$$F_Z(z) = p[X \leq e^z - 1] = F_X(e^z - 1) .$$

Para obtener la función de densidad de la variable Z derivamos la función de distribución:

$$f_Z(z) = f_X(e^z - 1) \cdot e^z ,$$

que se anula, si $e^z - 1$ es negativo, esto es, si z es negativo, y, si $z > 0$, vale

$$f_Z(z) = (e^z - 1) \cdot e^{-(e^z - 1)} \cdot e^z .$$

En definitiva,

$$f_Z(z) = \begin{cases} (e^z - 1) \cdot e^{-(e^z - 1)} \cdot e^z & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

Este problema puede resolverse utilizando el teorema del cambio de variable para variables aleatorias continuas. Comprobaremos que se obtiene el mismo resultado para la primera de las transformaciones, y dejando la segunda a cargo del lector.

La transformación $y = e^{-x}$ es estrictamente monótona (decreciente) y toma siempre

valores positivos, con lo cual, $f_Y(y)$ es igual a cero para $y \leq 0$; para $y > 0$, su transformación inversa es $x = -\ln y$, de modo que

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{d}{dy}(-\ln y)\right| = \left|-\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y}.$$

En definitiva, si $y > 0$,

$$f_Y(y) = f_X(-\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \begin{cases} -\ln y \cdot e^{-(-\ln y)} \cdot \dfrac{1}{y} & -\ln y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Pero $-\ln y > 0$ equivale a $0 < y < 1$ con lo que, finalmente, la función de densidad de Y resulta

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

que, naturalmente, coincide con la obtenida anteriormente.

Ejercicio 3.33.
La función de densidad de la variable X puede expresarse como

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Mediante la función de distribución de la variable X se halla la función de distribución de la variable Y:

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p\left[\frac{1}{X} \leq y\right] = p\left[X \geq \frac{1}{y}\right] = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right).$$

Derivando para obtener la función de densidad, resulta

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2}.$$

Así,

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{y^2} = -\dfrac{1}{y^3} & -1 \leq \frac{1}{y} < 0, \text{ es decir }, y \leq -1 \\ \dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{y^3} & 0 \leq \frac{1}{y} \leq 1, \text{ es decir }, y \geq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

que también puede escribirse como

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|y^3|} & |y| \geq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio 3.34.
Obtengamos la función de distribución de la variable $Y = X^2$, a partir de la función de distribución de la variable X:

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[X^2 \leq y] = p[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) ,$$

cuando $y \geq 0$. Si $y < 0$, el suceso $[X^2 \leq y]$ es el suceso imposible y, por tanto, $F_Y(y) = 0$.

Derivando la función de distribución deducimos la de densidad:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] ,$$

siempre que y sea positivo y anulándose en el resto de los casos. Ahora bien,

$$f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\sqrt{y}}$$

y, si $0 \leq y < 1$,

$$f_X(-\sqrt{y}) = \frac{1}{2} .$$

Sin embargo, si $y \geq 1$,

$$f_X(-\sqrt{y}) = 0 .$$

Resumiendo, la función de densidad de la variable Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}} (1 + e^{-\sqrt{y}}) & 0 \leq y < 1 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{y}} \cdot e^{-\sqrt{y}} & y \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 3.35.

Evidentemente, Y es una variable discreta que toma como valores todos los números naturales, ya que X sólo toma valores positivos. Es decir,

$$Y: \left|\begin{array}{lll} 0 & \text{cuando} & 0 \leq X < 1 \\ 1 & \text{cuando} & 1 \leq X < 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k & \text{cuando} & k \leq X < k+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right.$$

La función de probabilidad de Y se obtiene mediante un cálculo de probabilidades en la variable X:

$$f_Y(y) = p[Y=0] = p[0 \leq X < 1] = \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + 1\,,$$

$$f_Y(y) = p[Y=1] = p[1 \leq X < 2] = \int_1^2 e^{-x}\,dx = -e^{-2} + e^{-1}$$

y, en general,

$$f_Y(y) = p[Y=k] = p[k \leq X < k+1] = \int_k^{k+1} e^{-x}\,dx = -e^{-k-1} + e^{-k}\,.$$

Puede comprobar el lector que f_Y es realmente una función de probabilidad.

Ejercicio 3.36.

La función de distribución de la variable aleatoria X, F_X, toma valores entre 0 y 1; por tanto, si $0 \leq y \leq 1$, la función de distribución de la variable Y es

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[F_X(X) \leq y]\,.$$

Al ser F_X estrictamente monótona creciente, existe F_X^{-1}, que también es estrictamente monótona creciente, lo cual permite despejar X:

$$F_Y(y) = p\left[F_X^{-1}F_X(X) \leq F_X^{-1}(y)\right] = p[X \leq F_X^{-1}(y)] = F_X(F_X^{-1}(y)) = y\,.$$

Por tanto, la función de distribución de la variable Y es

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Derivando, se obtiene la función de densidad de la variable Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Capítulo 4

VARIABLES ALEATORIAS n-DIMENSIONALES

Una variable aleatoria es una característica numérica probabilizable de los resultados simples de un experimento aleatorio. Es interesante estudiar conjuntamente dos o más características ligadas a un mismo experimento, para intentar explicar la posible relación existente entre las mismas, de cara, fundamentalmente, a prever una de ellas a partir de las otras. En esta descripción, consideraremos únicamente dos características, pudiéndose generalizar las definiciones y resultados a más de dos.

Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y sean X e Y dos variables aleatorias definidas sobre dicho espacio, esto es,

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Se llama **variable aleatoria bidimensional** a la aplicación

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 ,$$

que aplica cada punto de Ω, ω, en el punto del plano $(X(\omega), Y(\omega))$.

Mediante una variable aleatoria bidimensional, se puede probabilizar subconjuntos del plano $\mathbb{R}^2$ a partir de las probabilidades dadas en Ω. Dichos subconjuntos han de pertenecer a la **σ-álgebra de Borel del plano real**, que denotaremos por β^2. Esta σ-álgebra es la *más pequeña* que contiene a todos los rectángulos del plano, entendiendo la expresión *más pequeña* en el sentido de que toda σ-álgebra a la que pertenezcan los rectángulos contiene a β^2.

La σ-álgebra de Borel, β^2, contiene, además de todos los rectángulos del plano, todas las uniones e intersecciones de una colección finita o infinita numerable de rectángulos y los complementarios de ellas. Por tanto, en la σ-álgebra β^2 está incluida cualquier recta o segmento del plano, así como cualquier punto del mismo.

La variable aleatoria (X, Y) permite trasladar las probabilidades desde Ω al plano real. En este sentido, se define la **probabilidad inducida** por (X, Y) como

la aplicación $p_{(X,Y)}$, de β^2 en $\mathbb{R}$, tal que, para todo B perteneciente a β^2,

$$p_{(X,Y)}(B) = p[(X,Y)^{-1}(B)] ,$$

probabilidad que escribiremos como $p[(X,Y) \in B]$.

Definamos una función numérica, denominada función de distribución, que permita calcular la probabilidad asociada a una variable aleatoria y, en consecuencia, estudiar el comportamiento probabilístico de la misma.

Se llama **función de distribución** de (X,Y) a la función $F_{(X,Y)}$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, donde

$$F_{(X,Y)}(x,y) = p[X \leq x, Y \leq y] , \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$

El subíndice (X,Y) será suprimido cuando no induzca a confusión.

La función de distribución describe la acumulación de probabilidad de la variable aleatoria según vamos avanzando en el plano hacia la derecha y hacia arriba.

Recordemos algunas de las propiedades de la función de distribución:

1. $0 \leq F(x,y) \leq 1$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. F es monótona creciente en cada variable.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} F(x,y) = 1$

   $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$

   $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x,y) = F_Y(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$

   $\lim\limits_{y \to \infty} F(x,y) = F_X(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$,

   denominándose a F_Y y a F_X funciones de distribución marginales de Y y X, respectivamente.
5. $p[a < X \leq b, c < Y \leq d] = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$.
6. F es continua por la derecha en cada variable.

Una función G de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que verifique las propiedades 2, 3 y 6 anteriores no tiene por qué ser una función de distribución de una **distribución bivariante de probabilidad**; para que esto ocurra debe añadirse a las anteriores propiedades la siguiente:

$$G(b,d) - G(a,d) - G(b,c) + G(a,c) \geq 0 ,$$

para cualesquiera a, b, c y d, con $a < b$ y $c < d$.

Al igual que en caso unidimensional, existen dos tipos de variables que cubren casi todos los supuestos prácticos: las variables discretas y las variables continuas.

• Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y X e Y dos variables aleatorias discretas definidas sobre dicho espacio; la variable (X,Y) es una **variable aleatoria**

bidimensional discreta. Entonces, se define la función de probabilidad conjunta de X e Y como una aplicación, $f_{(X,Y)}$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, tal que

$$f_{(X,Y)}(x,y) = p[X = x, Y = y] \,, \quad \text{para todo} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Al igual que con la función de distribución, eliminaremos el subíndice (X,Y) siempre que esto no lleve a error.

Las probabilidades se calculan con comodidad a partir de la función de probabilidad, que describe la probabilidad de cada punto del plano. Así, si B es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$p[(X,Y) \in B] = \sum_{(x_i,y_j)\in B} f(x_i,y_j) \,.$$

Las funciones de distribución y de probabilidad se relacionan mediante las siguientes expresiones:

1. $F(x,y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} f(x_i,y_j)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(x_i,y_j) = F(x_i,y_j) - F(x_i,y_{j-1}) - F(x_{i-1},y_j) + F(x_{i-1},y_{j-1})$, para cualquiera $i = 2,\ldots,n,\ldots$ y $j = 2,\ldots,m,\ldots$
   $f(x_1,y_j) = F(x_1,y_j) - F(x_1,y_{j-1})$, para cualesquiera $j = 2,\ldots,m,\ldots$
   $f(x_i,y_1) = F(x_i,y_1) - F(x_{i-1},y_1)$, para cualesquiera $i = 2,\ldots,n,\ldots$
   $f(x_1,y_1) = F(x_1,Y_1)$.

Dos propiedades importantes de la función de probabilidad que, además, la caracterizan son:

1. $0 \le f(x,y) \le 1$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i,y_j) = 1$.

A partir de la función de probabilidad de una variable bidimensional discreta pueden obtenerse las funciones de probabilidad marginales de ambas variables:

$$f_X(x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i,y_j) \qquad \text{y} \qquad f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i,y_j) \,.$$

• Se dice que (X,Y) es una **variable aleatoria bidimensional continua**, si su función de distribución F verifica:

1. Es una función continua en cada variable.
2. Existen sus primeras derivadas parciales, $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$ y $\frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$. Asimismo, su segunda derivada parcial respecto de ambas variables, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$, existe y es continua salvo, tal vez, a lo largo de un número finito de curvas.
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)\, dx\, dy = 1$.

Entonces, la **función de densidad conjunta** es una aplicación f, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, tal que

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) .$$

La función de densidad en (x,y) no es la probabilidad de ese punto (en este caso, la probabilidad de cualquier punto, recta o curva es igual a cero), sino que representa la probabilidad por unidad de área en un rectángulo *infinitesimal* alrededor de (x,y).

Las funciones de densidad y de distribución de una variable aleatoria bidimensional continua están relacionadas, pudiéndose obtener una de ellas a partir de la otra:

1. $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, dt\, ds$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Recordemos otras propiedades de interés:

1. $p[a < X \leq b,\ c < Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$.
2. $p[(X,Y) \in B] = \int \int_B f(x,y)\, dx\, dy$, para todo subconjunto B de Borel.
3. $f(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

La propiedad 3, junto con el hecho de que la integral de la función de densidad conjunta en todo el plano es igual a la unidad, caracterizan una función de densidad.

Se pueden obtener las funciones de densidad marginales de X y de Y a partir de la conjunta:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \qquad \text{y} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx .$$

A veces, se dispone de información sobre el valor que ha tomado la variable Y, información completa (esto es, se sabe que ha ocurrido el suceso $[Y = y]$) o únicamente parcial (se conoce que Y ha tomado un valor perteneciente a un cierto subconjunto, B, de la recta). En cualquier caso, esta información favorece a unos puntos de Ω sobre otros y, en consecuencia, modifica las probabilidades relativas a la variable X. La distribución de probabilidades de X resultante recibe el nombre de **distribución condicionada** por la información disponible.

Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta e y_j es un valor tal que $p[Y = y_j] \neq 0$, se define la función de probabilidad de X condicionada por $Y = y_j$ como

$$f_{(X \mid Y = y_j)}(x) = p[X = x \mid Y = y_j], \text{ para todo } x \in \mathbb{R} .$$

De acuerdo con la definición anterior,

$$f(x_i, y_j) = f_Y(y_j) \cdot f_{(X \mid Y=y_j)}(x_i) .$$

En general, puede definirse la función de probabilidad de X condicionada por el suceso $[(X,Y) \in B]$, de probabilidad no nula, como

$$f_{(X \mid (X,Y)\in B)}(x) = p[X = x \mid (X,Y) \in B] .$$

Si (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua e y un valor posible de Y, es decir, tal que $f_Y(y) \neq 0$, se define la función de densidad de X condicionada por $Y = y$ como

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} , \text{ para todo } x \in \mathbb{R} .$$

De este resultado se deduce que

$$f(x,y) = f_Y(y) \cdot f_{(X \mid Y=y)}(x) .$$

Asimismo, si A es un subconjunto cualquiera de la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, la probabilidad de $[X \in A]$ condicionada por el suceso $[Y = y]$, de probabilidad nula, se define como

$$p[X \in A \mid Y = y] = \int_A f_{(X \mid Y=y)}(x)\, dx .$$

En general, si B es un subconjunto de Borel del plano $\mathbb{R}^2$, tal que $p[(X,Y) \in B] \neq 0$, se define la función de distribución de X condicionada por el suceso $[(X,Y) \in B]$ como

$$F_{(X \mid (X,Y)\in B)}(x) = p[X \leq x \mid (X,Y) \in B] .$$

Derivando esta función puede calcularse la función de densidad condicionada.

Análogamente, se definen las funciones de probabilidad o de densidad de Y condicionadas por un valor de X o, en general, por un suceso $[(X,Y) \in B]$.

Parece razonable pensar que existen variables que no se influyen en su comportamiento probabilístico; en cambio, existen otras en las que resulta lógico suponer un cierto grado de dependencia en su comportamiento. Se dice que X e Y son **variables aleatorias independientes** si, para cualesquiera subconjuntos A y B de la σ-álgebra de Borel, β,

$$p[X \in A, Y \in B] = p[X \in A] \cdot p[Y \in B] .$$

La independencia de dos variables aleatorias puede estudiarse a partir de su función de distribución conjunta. Así, X e Y son independientes si, y sólo si, para

todo punto (x, y) del plano,

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) .$$

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta o continua, la independencia puede caracterizarse, bien por sus funciones de probabilidad o de densidad,

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \text{ para todo punto } (x, y) \text{ del plano,}$$

o bien a través de la función de probabilidad o de densidad condicionada; es decir, X e Y son independientes si, para cualquier valor y posible,

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = f_X(x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Tanto para variables aleatorias discretas, como para continuas, existe un procedimiento para comprobar si son o no independientes, que no obliga a calcular las funciones de probabilidad o de densidad marginales. Así, si (X, Y) es una variable discreta, X e Y son independientes cuando las filas (o, equivalentemente, las columnas) de la tabla de doble entrada son proporcionales, esto es, cuando, para cualquier par de valores x_i y x_k de X, se verifica que

$$\frac{p[X = x_i, Y = y_j]}{p[X = x_k, Y = y_j]}$$

es constante para todo valor y_j de Y.

Si (X, Y) es continua, y f es su función de densidad conjunta, X e Y son independientes cuando, para todo punto (x, y) del plano,

$$f(x, y) = g_1(x) \cdot g_2(y) ,$$

donde g_1 es una función que no depende de y y g_2 una función que no depende de x.

La independencia de dos variables se transmite a sus transformaciones. Si X e Y son independientes, también lo son las variables $U = g(X)$ y $V = h(Y)$.

En ciertas situaciones, se conoce la distribución de probabilidad de una variable aleatoria bidimensional, (X, Y), e interesa estudiar la de otra u otras variables que dependen funcionalmente de aquélla; por ejemplo, la distribución de $(U, V) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$.

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, (U, V) es siempre una variable bidimensional discreta y su función de probabilidad, para cualquier valor, (u_k, v_l), de (U, V), vale

$$p[U = u_k, V = v_l] = \sum p[X = x_i, Y = y_j] ,$$

donde el sumatorio se extiende a los valores (x_i, y_j) de (X, Y), tales que $g_1(x_i, y_j) = u_k$ y $g_2(x_i, y_j) = v_l$.

Si el número de variables transformadas no es dos, sino una cantidad m cualquiera, el resultado es análogo.

Cuando (X, Y) es una variable aleatoria continua, la técnica utilizada en el caso discreto no es aplicable a la hora de obtener la función de densidad conjunta de la variable transformada en función de la de (X, Y) (puede, incluso, que la transformada no sea variable aleatoria, o no sea continua).

Si la transformada de (X, Y) es una variable aleatoria, siempre puede calcularse su función de distribución a partir de la de densidad:

$$F_{(U,V)}(u, v) = \int\int_S f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy\ ,$$

siendo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid g_1(x, y) \leq u, g_2(x, y) \leq v\}$. Ahora bien, en bastantes casos de interés, el siguiente resultado, denominado **teorema del cambio de variable**, ayuda a resolver el problema de forma más sencilla.

Sea $u = g_1(x, y)$, $v = g_2(x, y)$ una aplicación inyectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, tal que existe, en su conjunto imagen, la transformación inversa $x = h_1(u, v)$, $y = h_2(u, v)$. Supongamos que existen, y son continuas, las derivadas parciales $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ y $\frac{\partial y}{\partial v}$, y que el determinante jacobiano

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Sea (U, V) la transformada de (X, Y) por (g_1, g_2), es decir, $U = g_1(X, Y)$ y $V = g_2(X, Y)$; entonces, (U, V) es una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad

$$f_{(U,V)}(u, v) = \begin{cases} f_{(X,Y)}(h_1(u, v), h_2(u, v)) \cdot |J| & si\ (u, v) \in D \\ 0 & si\ (u, v) \notin D \end{cases}$$

donde $D = (g_1, g_2)(\mathbb{R}^2)$, esto es,

$$D = \{(g_1(x, y), g_2(x, y)), \textit{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}\ .$$

Si la transformada de (X, Y) es una variable aleatoria unidimensional, $U = g(X, Y)$, puede hallarse la función de distribución de U integrando adecuadamente su función de densidad (en ciertas situaciones podrá aplicarse el resultado anterior); si la transformada es de dimensión superior a dos, la variable no es nunca continua, pudiéndose hallar su función de distribución a partir de $f_{(X,Y)}$.

Ejercicios propuestos

¶ **4.1.** Dada una variable aleatoria (X, Y), demuéstrese que, si $B = A \times C$, donde A y C pertenecen a la σ-álgebra de Borel, β, se verifica que

$$(X, Y)^{-1}(B) \in \alpha \, .$$

¶ **4.2.** Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico y (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Se define la probabilidad inducida por (X, Y) como la aplicación

$$p_{(X,Y)} : \beta^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \, ,$$

tal que, para todo B perteneciente a β^2,

$$p_{(X,Y)}(B) = p[(X, Y)^{-1}(B)] \, .$$

Pruébese que la probabilidad inducida es realmente una probabilidad.

¶ **4.3.** Sea G una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

1. G es monótona creciente en cada variable.
2. $$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} G(x, y) = 1 \, .$$
   $$\lim_{x \to -\infty} G(x, y) = 0 \, , \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R} \, .$$
   $$\lim_{y \to -\infty} G(x, y) = 0 \, , \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \, .$$
3. G es continua por la derecha en cada variable.
4. Para cualesquiera números reales a, b, c y d, tales que $a < b$ y $c < d$,
   $$G(b, d) - G(a, d) - G(b, c) + G(a, c) \geq 0 \, .$$

Demuéstrese que G es función de distribución de una variable aleatoria.

4.4. Tenemos una urna con tres bolas blancas y dos negras. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento. Sea X la variable que designa el número de bolas blancas obtenidas e Y la variable que expresa el número de bolas negras extraídas antes de obtener la primera bola blanca.

a) Hállese la distribución conjunta de X e Y.

b) Calcúlense las funciones de probabilidad marginales.

4.5. Se lanza un dado dos veces. Obténgase la distribución conjunta de las variables que designan el resultado del primer lanzamiento y el máximo resultado de los dos lanzamientos.

4.6. La junta directiva de una organización femenina está formada por 4 mujeres solteras, 3 divorciadas, 2 viudas y una casada.

Con objeto de elaborar el texto para unos folletos de carácter divulgativo, se elige al azar una comisión formada por 3 personas.

a) Hállese la función de probabilidad conjunta de X, número de mujeres solteras, e Y, número de mujeres viudas, incluidas en dicha comisión.

b) Calcúlese la probabilidad de que haya al menos una mujer viuda en la comisión.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de solteras que integran la comisión sea superior al de viudas?

¶ **4.7.** Sea una función g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ nula salvo para un conjunto fininito o infinito numerable, $\{(x_i, y_j); i = 1, \ldots, n, \ldots, \ j = 1, \ldots, m, \ldots\}$, que cumple las dos condiciones siguientes:

1. $0 \leq g(x_i, y_j) \leq 1$, para todo (x_i, y_j),
2. $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) = 1$.

Demuéstrese que g es la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.

4.8. Razónese si las siguientes funciones son, o no, funciones de densidad:

a) $f(x, y) = e^{-x}$ si $0 < y < x < \infty$ y cero en el resto.

b) $f(x, y) = 2(1 + x \cdot y)$ si $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ y cero en el resto.

c) $f(x, y) = \frac{1}{5} \cdot x \cdot y^2$ si $0 < x < y < 1$ y cero en el resto.

4.9. Demuéstrese que la función

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x < 0, \quad y < 0 \\ x \cdot y & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ x & 0 \leq x \leq 1, \quad y > 1 \\ y & x > 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & x > 1, \quad y > 1 \end{cases}$$

es función de distribución de una variable aleatoria bidimensional continua. Hállense las funciones de distribución marginales de X y de Y.

¶ **4.10.** Dada una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y), cuya función de densidad es $f(x, y)$, pruébese que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{p\left[x-\frac{h}{2}\le X\le x+\frac{h}{2}\,,\; y-\frac{k}{2}\le Y\le y+\frac{k}{2}\right]}{h\cdot k} = f(x,y)\,.$$

(Sugerencia: Aplíquese el teorema de los incrementos finitos a las funciones $\phi(x) = F\left(x, y+\frac{k}{2}\right) - F\left(x, y-\frac{k}{2}\right)$ y $\psi(y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$, sucesivamente.)

¶ **4.11.** Sea g una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ continua salvo, a los sumo, en un número finito de curvas, que cumple las dos condiciones siguientes:

1. $g(x,y) \ge 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Demuéstrese que g es función de densidad de una variable aleatoria continua.

4.12. Compruébese que, dada una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad $f(x,y)$, la función $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ es realmente una función de densidad.

4.13. El número de errores, X, que una mecanógrafa comete por página, es una variable aleatoria con función de probabilidad:

$$p[X=x] = e^{-2}\cdot\frac{2^x}{x!} \qquad x = 0, 1, \ldots$$

Si una página tiene x erratas, el número de minutos, Y, que emplea en revisar y corregir dicha página, es una variable con distribución:

$$p[Y=y \mid X=x] = \begin{cases} 1/5 & \text{si} \quad y = 1+x \\ 3/5 & \text{si} \quad y = 2+x \\ 1/5 & \text{si} \quad y = 3+x \end{cases}$$

a) Encuéntrese la probabilidad de que se necesiten 4 minutos para revisar y corregir una página elegida al azar.

b) Si se han empleado 5 minutos en la revisión y corrección de una página, ¿cuál es la probabilidad de que tuviera 3 erratas?

4.14. Se lanza un dado equilibrado. Sean dos variables aleatorias X e Y definidas por:

$$X = \begin{cases} -1 & \text{si el resultado es impar} \\ 1 & \text{si el resultado es par} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \text{si el resultado es 1, 2 o 3} \\ 0 & \text{si el resultado es 4} \\ 1 & \text{si es 5 o 6} \end{cases}$$

a) Hállense las funciones de probabilidad y de distribución conjuntas de X y de Y.

b) Calcúlese $p[X+Y=0 \mid Y \leq 0]$ y $p[X=1 \mid X+Y=2]$.

4.15. Un auditor selecciona un cierto número, X, de facturas de un archivador; escoge ese número al azar entre 5 y 8. Sea Y el tiempo en minutos que tarda en revisarlas. La variable bidimensional (X,Y) se ajusta a la función de probabilidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{10-x}{x} \left(\dfrac{x}{10}\right)^y & x = 5,6,7,8, \qquad y = 1,2,\ldots \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la distribución marginal de Y.

b) Obténgase la distribución de X condicionada por $Y = y$.

c) Calcúlese la probabilidad de que se eligieran 6 facturas, sabiendo que se emplearon más de 3 minutos en revisarlas.

4.16. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Si la función de densidad de X es

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y la función de densidad de Y dado $X = x$,

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{2y}{x^2} & 0 < y < x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obténgase la función de densidad de (X,Y).

b) Calcúlese la distribución de la variable Y.

c) Hállese la función de densidad de X condicionada por $Y = y$.

4.17. La variable aleatoria (R, C) representa la renta y el consumo, en millones de pesetas, de un grupo de trabajadores de una cierta empresa, siendo su función de densidad:

$$f(r,c) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} \cdot r^{1/2} c^{1/2} & 0 < c < r < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcúlense:

a) Las funciones de densidad marginales.

b) La probabilidad de que el consumo de un individuo sea superior a un millón, si se sabe que su renta no es superior a 2 millones y medio.

4.18. Un novelista se ha comprometido con su editor a entregarle cada 30 días un capítulo del libro que está escribiendo; éste ha sido un método de trabajo que, desde hace muchos años, le ha dado óptimos resultados.

El número de días que emplea para redactar cada capítulo es una variable aleatoria, X, que se modeliza según la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{30} & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si tarda x días en redactar el capítulo, el tiempo total, Y, que tarda en elaborarlo (incluyendo la revisión y corrección de erratas) responde a la siguiente función de densidad:

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{30 - x} & x \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde x es una cantidad no superior a 30.

a) Determínese la probabilidad de que emplee más de 25 días en la elaboración total del capítulo.

b) Hállese la probabilidad de que el número de días de redacción sea superior al número de días empleados en la revisión y corrección.

c) Obténgase la probabilidad de que el número de días empleado en la revisión y corrección sea inferior a 2.

d) Calcúlese la probabilidad de que invierta entre 15 y 20 días en la redacción de un capítulo si el número total de días hasta finalizarlo ha sido 25.

4.19. El número de hamburguesas, en miles de unidades, que se venden semanalmente en un *burguer* es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{9} & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si en una semana se venden x hamburguesas, la cantidad de ellas que llevan queso, Y, se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde x es un valor del intervalo (0,3).

a) Sabiendo que en una semana se han vendido mil hamburguesas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos la mitad tuvieran queso?

b) Si el precio por hamburguesa con queso es de 350 pesetas, hállese la probabilidad de que los ingresos para este tipo de consumición sean superiores a 200.000 pesetas.

c) Obténgase la probabilidad de que en una semana el número vendido de hamburguesas sin queso sea superior a mil.

4.20. De cara a preparar la próxima temporada veraniega, el propietario de Pochó y Vengo-Vengo, locales habituales en las noches de una cierta ciudad costera, muestra un especial interés por el consumo de bebidas no alcohólicas.

Sean X e Y las proporciones semanales de bebidas sin alcohol sobre el total de consumiciones en Pochó y Vengo-Vengo, respectivamente. La función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} kx \cdot (x+y) & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Determínese el valor de k.

b) Obténgase el porcentaje de semanas en que la proporción de bebidas alcohólicas en Pochó supera el 30 %.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el porcentaje de bebidas alcohólicas sea mayor en Pochó que en Vengo-Vengo?

d) Si en una semana el porcentaje de bebidas no alcohólicas supera el 50 % en Pochó, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra lo mismo en Vengo-Vengo?

4.21. La cantidad de un cierto producto, en miles de unidades, X, que una empresa vende al mes, y su precio, en miles de pesetas por unidad, Y, tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{96} & 0 < x < 4, \quad 1 < y < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Si el precio por unidad en un cierto mes es de 4.000 pesetas, hállese la probabilidad de que la cantidad vendida sea superior a 2.000 unidades.

b) Determínese el porcentaje de meses en los que el número de unidades vendidas es superior a mil y el precio por unidad inferior a 2.000 pesetas.

c) Calcúlese la probabilidad de que en un mes el ingreso total debido a la venta de este producto, sea superior a 4 millones de pesetas.

4.22. Una farmacia posee una cantidad, X, de cientos de unidades de un cierto fármaco al comienzo de cada mes. Durante el mes se venden Y cientos de unidades del referido fármaco. Si

$$f(x,y) = \begin{cases} 2/9 & 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es la función de densidad conjunta de X e Y:

a) Demuéstrese que f es función de densidad.

b) Obténgase la función de distribución de (X, Y).

c) Hállese la probabilidad de que a final de mes se hayan vendido al menos la mitad de las unidades que había inicialmente.

d) Si se han vendido cien unidades, ¿cuál es la probabilidad de que hubiera al menos doscientas a principios de mes?

4.23. Un estudio realizado sobre las ventas en una frutería arroja los siguientes resultados:

— El 10 % de los clientes compra un kilo de manzanas y uno de naranjas.

— El 30 % de los clientes sólo un kilo de manzanas.

— El 15 % de los clientes sólo un kilo de naranjas.

— El 40 % compra manzanas y naranjas en cantidades inferiores al kilo en ambos casos.

— El 5 % restante no compra ni naranjas ni manzanas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente compre al menos un kilo de fruta?

b) ¿Qué probabilidad hay de que un cliente compre menos de medio kilo de manzanas y más de un cuarto de naranjas?

c) Si un cliente ha comprado, entre naranjas y manzanas, una cantidad inferior al kilo, ¿cuál es la probabilidad de que haya adquirido menos de medio kilo de manzanas?

4.24. Compruébese que la función de densidad condicionada

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} ,$$

es realmente una función de densidad.

4.25. Demuéstrese que, dadas dos variables aleatorias cualesquiera independientes, sus cuadrados también son independientes.

4.26. Sean X e Y variables aleatorias discretas independientes tales que X toma los valores 2, 4 y 6 e Y los valores 3 y 5. Sabiendo que $p[X = 4] = 0.1$, $p[Y = 5] = 0.6$ y $p[X = 2, Y = 5] = 0.5$, obténganse las distribuciones de probabilidad marginales, así como la distribución conjunta de dichas variables.

4.27. Sean X_i, $i = 1, 2$, variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas tales que $p[X_i = 1] = p[X_i = -1] = 1/2$. Se considera la variable aleatoria $X_3 = X_1 \cdot X_2$. ¿Son las variables X_1, X_2 y X_3 independientes? ¿Son independientes dos a dos?

4.28. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obténgase una función de densidad del par (X, Y) cuyas funciones de densidad marginales sean las anteriores.

4.29. La empresa OLIS, encargada de la fabricación y el mantenimiento de ascensores, desea mejorar la calidad de sus productos y el servicio al cliente. A tal fin, se lleva a cabo un análisis de la situación actual del que se concluye que la distribución conjunta de la variable aleatoria X, tiempo transcurrido, en días, desde la

instalación de un ascensor hasta la primera avería, e Y, tiempo, en días, que tarda la empresa en acudir al lugar del problema para solucionarlo, viene dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{300} \cdot e^{-\frac{x+300y}{300}} & x > 0, \quad y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese la función de densidad del tiempo de funcionamiento hasta la primera avería.

b) El jefe de escalera de un vecindario está indignado porque hace 3 días que dio parte a la empresa de una avería y todavía no han acudido a arreglarla. ¿Cuál es la probabilidad de que se den este tipo de situaciones?

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Calcúlese la probabilidad de que un ascensor haya funcionado con normalidad durante al menos 200 días y, una vez averiado, la empresa haya tardado medio día en ir a arreglarlo.

4.30. Sea (X,Y) una variable bidimensional continua con función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2-x-y}{8} & -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Compruébese que X e Y son dependientes y que X^2 e Y^2 son independientes.

4.31. El portero de una comunidad de vecinos recoge la basura depositada por la familia del señor Pérez a la puerta de su casa en cualquier instante entre las 17 y las 19 horas. La variable aleatoria X, tiempo en minutos desde las 17 horas hasta la recogida, responde a la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{120} & 0 < x < 120 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Los señores Pérez son muy despistados y, en lugar de depositar la basura a las 17 horas (asegurando, así, que el portero se la lleve), lo hacen a partir de dicha hora en cualquier momento, Y, igualmente distribuido que X. ¿Qué porcentaje de veces quedará la basura en la puerta de la vivienda?

4.32. En la última reunión de accionistas de una red de supermercados se decidió realizar un estudio sobre la posible relación entre la proporción de clientes que compra sólo una vez al mes en estos comercios, X, y el beneficio mensual en millones de pesetas, Y.

Tras unos meses de trabajo estadístico, se obtuvo que la función de densidad conjunta de estas variables es

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x+y)\cdot e^{-y} & 0 < x < 1, \quad y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese el valor de la constante k.

b) ¿Son X e Y independientes?

c) Calcúlese el porcentaje de meses en los que menos del 25 % de los clientes son de los que compran una vez al mes y los beneficios superen el millón de pesetas.

d) Si en un mes se han conseguido unos beneficios inferiores a dos millones de pesetas, ¿cuál es la probabilidad de que más de la mitad de los clientes pertenezca al grupo de los que compran una vez al mes?

e) Suponiendo que los beneficios de cada mes son independientes, obténgase la probabilidad de que la suma de los beneficios correspondients a dos meses sea superior a 7 millones de pesetas.

f) ¿Cuál es la probabilidad de que en 6 meses con unos beneficios superiores a los tres millones de pesetas cada uno, el número de clientes que compran sólo una vez al mes sea, en todos ellos, inferior al 30 %?

4.33. El tiempo en minutos que un administrativo emplea en corregir un escrito es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}\cdot e^{-\frac{1}{5}\cdot x} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tarde menos de 10 minutos en revisar dos escritos?

b) Si ha necesitado 15 minutos para corregir dos escritos, ¿cuál es la probabilidad de que empleara más de 10 minutos en revisar el primero?

4.34. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes tales que

$$p[X_i = 1] = p = 1 - p[X_i = 2]\,, \quad \text{si } i = 1,2\,.$$

Sea Y_k la variable aleatoria que designa el número de variables X_i iguales a k con $k = 1, 2$. Obténgase la función de probabilidad de la variable (Y_1, Y_2).

4.35. La Asociación de Libreros de una ciudad ha publicado recientemente un trabajo sobre el tipo de literatura preferida por los lectores de edad comprendida entre 25 y 40 años.

Entre otros aspectos se analiza el número de libros de autores hispanos, X, que compra un individuo de un total, Y, de libros adquiridos a la semana, mediante la siguiente función de densidad conjunta:

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	2/8	2/8	0	0
1	0	1/8	1/8	0
2	0	0	1/8	0
3	0	0	0	1/8

a) Sabiendo que un individuo ha adquirido 2 libros en una semana, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de autores hispanos?

b) Determínese el porcentaje de individuos que compran a la semana un libro de autor no hispano.

c) Si el número de libros que compra un individuo en una semana no depende de los que adquiere en cualquier otra, ¿cuál es la probabilidad de que el número de libros que un individuo adquiere al cabo de dos semanas, sea superior a 3?

4.36. En la siguiente tabla se da la distribución conjunta de las variables aleatorias X e Y:

$X \setminus Y$	1	2
0	0.05	0.15
1	0.3	0
2	0.05	0.45

a) Calcúlense las funciones de probabilidad y de distribución de las variables X e Y.

b) Obténgase la distribución de Y condicionada a los distintos valores de X.

c) Hállense las siguientes probabilidades:

$$p[Y = 2 \mid X \leq 1], \quad p[X + Y > 2], \quad p[0 < X \leq 2 \mid \ Y = 1] \text{ y } p[X \cdot Y \leq 1].$$

d) ¿Son X e Y independientes?

e) Hállense las distribuciones conjunta y marginales de $U = X + Y$ y $V = \text{máx}\,(X, Y)$.

4.37. Sea X la variable aleatoria que representa el peso, en toneladas, de una cierta mercancía almacenada a principios de mes de cara a satisfacer la demanda

de los clientes. Sea Y el peso, en toneladas, de la mercancía vendida durante el mes. La función de densidad conjunta es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{10x} & 0 < y < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Determínese la distribución de probabilidad del peso de la mercancía que queda almacenada a final de mes.

b) Hállese el porcentaje de meses en que la mercancía almacenada a primeros de mes sea superior a ocho toneladas y las ventas inferiores a cuatro toneladas.

c) Si un mes las ventas no superan las cinco toneladas, ¿cuál es la probabilidad de que al final de mes queden almacenadas más de tres toneladas?

4.38. Un grupo de empresas destina sus beneficios a inversión tecnológica, a inversión en cartera y a pago de dividendos entre sus accionistas, siendo X, Y y Z los porcentajes correspondientes a cada una de estas partidas. La función de densidad conjunta de X e Y viene dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} k & 0 \leq y \leq x, \quad x + y \leq 50 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuánto vale k?

b) Hállense las funciones de densidad marginal de X y de Y.

c) Obténganse las funciones de densidad de Y condicionada a X y de X condicionada a Y.

d) Determínese la función de distribución y de densidad de Z.

4.39. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 2, \quad \text{máx}\,(0, x-1) \leq y \leq \text{mín}\,(1,x) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese la función de densidad de la variable $U = X - Y$. ¿Son independientes las variables Y y U?

4.40. La compañía telefónica desea realizar un análisis sobre la repercusión que las nuevas tarifas han tenido en el número de llamadas. Teniendo en cuenta que las llamadas se clasifican en urbanas, interurbanas e internacionales, un estudio llevado a cabo sobre un grupo de familias, conduce a que las proporciones de

llamadas urbanas, X, e interurbanas, Y, durante un mes tienen la siguiente función de densidad conjunta:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 6x & x \geq 0,\ quady \geq 0, \quad x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese la probabilidad de que el porcentaje de llamadas urbanas realizadas por una familia en un mes, sea superior al 70 %.

b) Hállese la probabilidad de que en una familia la proporción de llamadas urbanas de un cierto mes sea inferior a la de interurbanas.

c) Hállese la función de densidad correspondiente al porcentaje total de llamadas urbanas e interurbanas.

d) Determínese el porcentaje de meses en que la proporción de llamadas al extranjero para una cierta familia es superior a 0.2.

e) Si una familia no ha tenido conferencias con el extranjero, ¿cuál es la probabilidad de que al menos el 60 % de las llamadas hayan sido urbanas?

4.41. La variable aleatoria (X,Y) tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} kxy & x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) ¿Cuánto vale k?

b) Obténganse las funciones de densidad y de distribución marginales.

c) Hállese: $f_{(Y \mid X=x)}$, $f_{(X \mid Y=y)}$, $f_{(X \mid Y<1/2)}$ y $f_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}$.

d) Calcúlense las siguientes probabilidades: $p[X \geq Y]$, $p[X \geq 1/2 \mid X+Y \leq 3/4]$ y $p[X^2+Y^2 \leq 1]$.

e) ¿Son X e Y independientes?

f) Determínese un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $p[(X,Y) \in A] = 3/4$.

g) Hállese la distribución conjunta de $U = X+Y$ y $V = X-Y$.

h) Obténgase las funciones de distribución y de densidad de $Z = X \cdot Y$.

¶ **4.42.** Compruébese que, dada una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad $f_{(X,Y)}$ y una transformación (g_1,g_2) que verifique las hipótesis del cambio de variable en integrales múltiples, la función

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} f_{(X,Y)}(h_1(u,v),h_2(u,v)) \cdot |J| & \text{si } (u,v) \in D \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde $D = (g_1,g_2)(\mathbb{R}^2)$, y (h_1,h_2) es la transformación inversa de (g_1,g_2), es realmente la función de densidad de una variable aleatoria bidimensional continua.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 4.1.
Dado que $B = A \times C$, el conjunto $(X,Y)^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid (X(\omega), Y(\omega)) \in B\}$ coincide con el conjunto $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A, Y(\omega) \in C\}$, es decir, coincide con $X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(C)$, suceso que pertenece a α, ya que es igual a la intersección de $X^{-1}(A)$ e $Y^{-1}(B)$, sucesos de α por ser X e Y variables aleatorias.

Ejercicio 4.2.
Veamos que $p_{(X,Y)}$ cumple los tres axiomas de KOLMOGOROV. En primer lugar, si $B \in \beta^2$, entonces, $p_{(X,Y)}(B) = p[(X,Y)^{-1}(B)] \geq 0$, ya que p es una probabilidad sobre Ω.

Además, $p_{(X,Y)}(\mathbb{R}^2) = p[(X,Y)^{-1}(\mathbb{R}^2)] = p(\Omega) = 1$.

Por último, dada una colección infinita numerable de sucesos pertenecientes a la σ - álgebra de Borel, disjuntos dos a dos, $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, se cumple:

$$p_{(X,Y)}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = p\left((X,Y)^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(X,Y)^{-1}(B_i)\right) .$$

Por ser los conjuntos B_i disjuntos dos a dos,

$$(X,Y)^{-1}(B_i) \cap (X,Y)^{-1}(B_j) = (X,Y)^{-1}(B_i \cap B_j) = (X,Y)^{-1}(\emptyset) = \emptyset ,$$

es decir, la colección $\{(X,Y)^{-1}(B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ está formada también por sucesos de α, disjuntos dos a dos y, consecuentemente,

$$p_{(X,Y)}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p[(X,Y)^{-1}(B_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} p_{(X,Y)}(B_i) .$$

Así pues, $p_{(X,Y)}$ es una probabilidad sobre $(\mathbb{R}^2, \beta^2)$.

Ejercicio 4.3.
Dada una función G de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que cumple las cuatro condiciones anteriores, hemos de comprobar que existe una variable aleatoria de la cual G es función de distribución. Para ello, consideremos el espacio probabilístico (Ω, α, p), donde $\Omega = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \beta^2$ y p es una aplicación que se define a partir de la familia de intervalos $\{(-\infty, x] \times (-\infty, y]\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$ como

$$p[(-\infty, x] \times (-\infty, y]] = G(x,y) .$$

La demostración de que p es, efectivamente, una probabilidad está fuera del alcance de este libro.

Sea la aplicación identidad,

$$(X,Y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ,$$

es decir, la aplicación tal que $(X,Y)(a,b) = (a,b)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Evidentemente, (X,Y) es una variable aleatoria, ya que, por ejemplo, $X^{-1}((-\infty, x]) = (-\infty, x] \times \mathbb{R} \in \beta^2 = \alpha$, por lo que X es una variable aleatoria. De la misma forma se comprueba que también lo es Y.

La función de distribución de la variable (X, Y) resulta igual a G porque

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= p[X \leq x, Y \leq y] = p[(X,Y)^{-1}((-\infty, x] \times (-\infty, y])] = \\ &= p[(-\infty, x] \times (-\infty, y]] = G(x,y) \,, \end{aligned}$$

con lo cual, G es función de distribución puesto que $F_{(X,Y)}$ lo es.

Ejercicio 4.4.

a) La variable aleatoria X, *número de bolas blancas obtenidas*, es una variable que toma los valores 1, 2 y 3, ya que, al ser solamente dos el número de bolas negras en la urna, necesariamente habrá al menos una bola blanca entre las extraídas. La variable aleatoria Y, *número de bolas negras extraídas antes de obtener la primera blanca*, toma los valores 0, 1 y 2. Puesto que tanto X como Y son variables discretas, la variable (X, Y) es una variable bidimensional discreta que toma, en principio, los pares de valores (i, j) con $i = 1, 2, 3$, $j = 0, 1, 2$.

La función de probabilidad de la variable (X, Y) se calcula utilizando la probabilidad definida sobre el espacio muestral de posibles resultados. Si b_k y n_k, $(k = 1, 2, 3)$ designan los posibles resultados del k-ésimo experimento, es decir, *obtener bola blanca* y *obtener bola negra*, respectivamente, entonces, por ejemplo,

$$p[X = 1, Y = 0] = p[(b_1, n_2, n_3)] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \,,$$

$$p[X = 1, Y = 1] = p[(n_1, b_2, n_3)] = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \quad \text{o}$$

$$p[X = 2, Y = 0] = p[\{(b_1, b_2, n_3), (b_1, n_2, b_3)\}] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5} \,.$$

Calculando de manera análoga la función de probabilidad para el resto de valores de la variable (X, Y), se tiene la siguiente tabla de doble entrada:

$X \setminus Y$	0	1	2	
1	1/10	1/10	1/10	3/10
2	2/5	1/5	0	6/10
3	1/10	0	0	1/10
	6/10	3/10	1/10	

b) Sumando las correspondientes filas y columnas se obtienen la última columna y la última fila de la tabla anterior, que representan, respectivamente, los valores de la función de probabilidad de la variable X y de la variable Y. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} f_X(1) = p[X = 1] &= p[X = 1, Y = 0] + p[X = 1, Y = 1] + p[X = 1, Y = 2] = \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10} \,, \end{aligned}$$

o bien,

$$f_Y(2) = p[Y=2] \quad = p[X=1, Y=2] + p[X=2, Y=2] + p[X=3, Y=2] =$$
$$= \frac{1}{10} + 0 + 0 = \frac{1}{10} .$$

Del mismo modo se deduce el resto de los valores de las funciones de probabilidad marginales de X e Y, ya reseñados en los márgenes de la tabla de doble entrada, como es habitual.

Ejercicio 4.5.

Sean X e Y las variables aleatorias que denotan el *resultado del primer lanzamiento* y el *máximo resultado de los dos lanzamientos*, respectivamente. En principio, la variable bidimensional (X, Y) toma los valores (i, j) con $i = 1, \ldots, 6$ y $j = 1, \ldots, 6$. Calculemos la función de probabilidad para cada par de puntos (i, j). Así,

$$p[X=1, Y=1] \quad = p[(1,1)] = \frac{1}{36} ,$$
$$p[X=2, Y=2] \quad = p[(2,1),(2,2)] = \frac{2}{36}$$

y, en general, si $i = j$,

$$p[X=i, Y=i] = \frac{i}{36} , \quad i = 1, \ldots, 6 .$$

Además,

$$p[X=1, Y=2] = p[(1,2)] = \frac{1}{36} ,$$

$$p[X=2, Y=4] = p[(2,4)] = \frac{1}{36} ,$$

esto es, si $i < j$,

$$p[X=i, Y=j] = \frac{1}{36} \qquad i = 1, \ldots, 6, \quad j = 1, \ldots, 6 .$$

Finalmente, es inmediato comprobar que, cuando $i > j$,

$$p[X=i, Y=j] = 0 .$$

Todo ello permite construir la siguiente tabla de doble entrada que recoge la función de probabilidad conjunta de las variables X e Y:

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	0	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	0	0	3/36	1/36	1/36	1/36
4	0	0	0	4/36	1/36	1/36
5	0	0	0	0	5/36	1/36
6	0	0	0	0	0	6/36

Ejercicio 4.6.

a) La variable aleatoria X, *número de mujeres solteras* en la comisión, puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3, mientras que la variable Y, *número de mujeres viudas*, tiene como posibles valores 0, 1 y 2. Para obtener la función de probabilidad conjunta de X e Y utilizaremos la probabilidad definida sobre el espacio muestral Ω, cuyos elementos equiprobables son las 120 combinaciones sin repetición de las diez mujeres elegidas de tres en tres; estamos, así, en condiciones de aplicar la regla de LAPLACE y, de este modo,

$$p[X=0, Y=0] = \frac{1}{C_{10,3}} + \frac{C_{3,2}}{C_{10,3}} = \frac{1}{120} + \frac{3}{120} = \frac{1}{30} ,$$

ya que, si no hay ni solteras ni viudas en la comisión, ésta tendrá que estar formada, o bien por tres divorciadas, o bien por dos divorciadas y una casada; en el primer caso, como sólo hay tres divorciadas existe un único caso favorable y, en la segunda situación, la mujer casada podrá formar comisión con cada una de las combinaciones sin repetición de las tres divorciadas elegidas de dos en dos, $C_{3,2}$. Análogamente, por ejemplo,

$$p[X=0, Y=1] = \frac{2 \cdot C_{3,2}}{C_{10,3}} + \frac{2 \cdot 3}{C_{10,3}} = \frac{6}{120} + \frac{6}{120} = \frac{3}{30} ,$$

es decir, por cada una de las dos viudas que deben formar parte de la comisión, pueden elegirse dos de las tres divorciadas que hay o, por el contrario, seleccionar a una de las tres divorciadas e incluir a la casada.

De la misma manera,

$$p[X=1, Y=2] = \frac{4}{C_{10,3}} = \frac{1}{30} ,$$

porque las dos mujeres viudas deben pertenecer a la comisión junto con una de las cuatro mujeres solteras. Cálculos análogos permiten completar la siguiente tabla de doble entrada, donde se recoge la función de probabilidad de la variable bidimensional (X, Y):

$X \setminus Y$	0	1	2	
0	1/30	3/30	1/30	5/30
1	6/30	8/30	1/30	15/30
2	6/30	3/30	0	9/30
3	1/30	0	0	1/30
	7/15	7/15	1/15	

b) La probabilidad de que haya al menos una mujer viuda en la comisión es

$$p[Y \geq 1] = p[Y=1] + p[Y=2] = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = \frac{8}{15} ,$$

probabilidad que puede calcularse, también, como

$$p[Y \geq 1] = 1 - p[Y = 0] = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} .$$

c) La probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} p[X > Y] \; &= p[X = 1, Y = 0] + p[X = 2, Y = 0] + p[X = 2, Y = 1] + \\ &\quad + p[X = 3, Y = 0] + p[X = 3, Y = 1] + p[X = 3, Y = 2] = \\ &= \frac{6}{30} + \frac{6}{30} + \frac{3}{30} + \frac{1}{30} = \frac{8}{15} . \end{aligned}$$

Ejercicio 4.7.
Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definimos

$$G(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} g(x_i, y_j) .$$

Se comprueba de modo inmediato que G es monótona creciente y continua por la derecha para cada variable. Además, $G(x, -\infty) = G(-\infty, y) = 0$ para cualesquiera números reales x e y. Finalmente, para a, b, c y d números reales, tales que $a < b$ y $c < d$, la expresión $G(b, d) - G(a, d) - G(b, c) + G(a, c)$ es igual a

$$\sum_{x_i \leq b} \sum_{y_j \leq d} g(x_i, y_j) - \sum_{x_i \leq a} \sum_{y_j \leq d} g(x_i, y_j) - \sum_{x_i \leq b} \sum_{y_j \leq c} g(x_i, y_j) + \sum_{x_i \leq a} \sum_{y_j \leq c} g(x_i, y_j)$$

que, reagrupando, resulta

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{x_i \leq b} \left[\sum_{y_j \leq d} g(x_i, y_j) - \sum_{y_j \leq c} g(x_i, y_j) \right] - \sum_{x_i \leq a} \left[\sum_{y_j \leq d} g(x_i, y_j) \right. \\ &\left. - \sum_{y_j \leq c} g(x_i, y_j) \right] = \sum_{a < x_i \leq b} \sum_{c < y_j \leq d} g(x_i, y_j) \geq 0 . \end{aligned}$$

Concluimos, así, que G es la función de distribución de una variable aleatoria bidimensional (X, Y), ya que cumple las propiedades que caracterizan a este tipo de funciones.

Además, G es constante en los rectángulos

$$[x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j) ,$$

por lo que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta.

Finalmente,

$$G(x_i, y_j) - G(x_i, y_{j-1}) - G(x_{i-1}, y_j) + G(x_{i-1}, y_{j-1}) = g(x_i, y_j) ,$$

como se comprueba directamente. En consecuencia, g es la función de probabilidad de la variable aleatoria que tiene a G por función de distribución, esto es, de la variable aleatoria discreta (X, Y).

Ejercicio 4.8.
En cada uno de los casos hemos de comprobar si se cumplen las dos condiciones que caracterizan a una función de densidad de una variable bidimensional continua:

1. $f(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

La demostración de la primera condición es inmediata en los tres casos. Además,

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=y}^{\infty} e^{-x}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{\infty} e^{-y}\,dy = 1\,.$$

Se demuestra, así, que f es función de densidad.

b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-1}^{1} 2(1+x\cdot y)\,dy\,dx = 4\int_{x=-1}^{1} dx = 8 \neq 1\,.$
Consecuentemente, f no es función de densidad.

c)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1} \frac{1}{5}\cdot x\cdot y^2\,dy\,dx = \\ &= \frac{1}{15}\int_{x=0}^{1} x(1-x^3)\,dx = \frac{1}{50} \neq 1\,.\end{aligned}$$

Con lo cual, f no es función de densidad.

Ejercicio 4.9.
Veamos que F es continua en la variable x. Así, si y es un valor negativo,

$$F(x,y) = 0\,,$$

que es una función continua de x. Si $0 \leq y \leq 1$,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x\cdot y & 0 \leq x \leq 1 \\ y & x > 1 \end{cases}$$

que, asimismo, es una función continua de x. Finalmente, si $y > 1$,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

que, también, es función continua de x. En definitiva, para cualquier valor de y, F es una función continua en la variable x. De forma análoga se comprueba que F es continua en y, para cualquier valor de x.

Utilizando las expresiones anteriores se prueba con facilidad que, para cualquier valor de y, F es una función creciente (no decreciente) de x. Análogamente, para $x < 0$,

$$F(x, y) = 0 \,,$$

que es una función creciente de y; para $0 \leq x \leq 1$,

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

que, también, es función creciente de y. En definitiva, sea cual sea el valor (fijo) de x, F es una función creciente de y.

La derivada parcial de F con respecto a x existe salvo en $x = 0$ y $x = 1$. Así, por ejemplo, si $0 \leq y \leq 1$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(0+h, y) - F(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0+h) - 0}{h} = 1$$

y, sin embargo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(0-h, y) - F(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \,,$$

esto es, no coinciden las derivadas por la derecha y por la izquierda y F no es derivable en $x = 0$. De igual manera se probaría que F no es derivable en $y = 0$ ni en $y = 1$, aunque sí lo es en el resto de los puntos. Puede el lector corroborar estos resultados observando F alternativamente, como función de x y como función de y, tal y como hemos hecho para estudiar la continuidad y el crecimiento en cada variable.

La segunda derivada parcial de la función de distribución,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

no existe para los puntos (x, y) que se encuentran en el borde del cuadrado unidad, es decir, F admite derivada segunda salvo en los lados de dicho cuadrado. Además,

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} 1 \, dy \, dx = 1.$$

Para hallar las funciones de distribución marginales hemos de tomar límites. Así, si $y < 0$,

$$F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y) = 0 \,.$$

Cuando, $0 \leq y \leq 1$

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} y = y\,.$$

Para $y > 1$,

$$F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1\,.$$

En consecuencia,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

De idéntico modo se deduce la función de distribución marginal de la variable X.

Observe el lector que F es simétrica en x y en y, esto es, al cambiar una variable por la otra, la función F no se modifica. En consecuencia, bastaría con obtener los resultados para una de las variables y trasladarlos directamente a la otra.

Ejercicio 4.10.
Aplicando a la función $\phi(x) = F\left(x, y+\frac{k}{2}\right) - F\left(x, y-\frac{k}{2}\right)$ el teorema de los incrementos finitos, sabemos que existe un punto t_1 del intervalo $\left(x-\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}\right)$ tal que

$$\phi\left(x+\frac{h}{2}\right) - \phi\left(x-\frac{h}{2}\right) = h\phi'(t_1)\,.$$

Ahora bien,

$$\phi\left(x+\frac{h}{2}\right) - \phi\left(x-\tfrac{h}{2}\right) =$$

$$= F\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k}{2}\right) - F\left(x+\tfrac{h}{2}, y-\tfrac{k}{2}\right) - F\left(x-\tfrac{h}{2}, y+\tfrac{k}{2}\right) + F\left(x-\tfrac{h}{2}, y-\tfrac{k}{2}\right) =$$

$$= p\left[x-\frac{h}{2} \leq X \leq x+\frac{h}{2}\,,\; y-\frac{k}{2} \leq Y \leq y+\frac{k}{2}\right]\,,$$

con lo cual,

$$p\left[x-\frac{h}{2} \leq X \leq x+\frac{h}{2}\,,\; y-\frac{k}{2} \leq Y \leq y+\frac{k}{2}\right] = h\phi'(t_1)\,.$$

Como

$$\phi'(t_1) = \frac{\partial}{\partial x}\left[F\left(x, y+\frac{k}{2}\right) - F\left(x, y-\frac{k}{2}\right)\right]\Big|_{x=t_1}\,,$$

haciendo $\psi(y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)|_{x=t_1}$, tendremos que

$$\phi'(t_1) = \psi\left(y+\frac{k}{2}\right) - \psi\left(y-\frac{k}{2}\right)\,.$$

Aplicando de nuevo el teorema de los incrementos finitos a la función $\psi(y)$, tendremos un punto t_2 del intervalo $\left(y-\frac{k}{2}, y+\frac{k}{2}\right)$ que verifica

$$\psi\left(y+\frac{k}{2}\right)-\psi\left(y-\frac{k}{2}\right)=k\psi'(t_2)=k\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\,F(x,y)\Big|_{\substack{x=t_1\\y=t_2}}$$

En resumen, existe un punto t_1 del intervalo $\left(x-\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}\right)$ y un punto t_2 del intervalo $\left(y-\frac{k}{2}, y+\frac{k}{2}\right)$ tales que

$$p\left[x-\frac{h}{2}\le X\le x+\frac{h}{2}\,,\,y-\frac{k}{2}\le Y\le y+\frac{k}{2}\right]=h\cdot k\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\,F(x,y)\Big|_{\substack{x=t_1\\y=t_2}}$$

Los puntos t_1 y t_2 pueden expresarse como

$$t_1=\left(x-\frac{h}{2}\right)+\theta_1 h=x+\left(\theta_1-\frac{1}{2}\right)h$$

y

$$t_2=\left(y-\frac{k}{2}\right)+\theta_2 k=y+\left(\theta_2-\frac{1}{2}\right)k\,,$$

con θ_1 y θ_2 tales que $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. Así,

$$p\left[x-\frac{h}{2}\le X\le x+\frac{h}{2}\,,y-\frac{k}{2}\le Y\le y+\frac{k}{2}\right]=hk\cdot f\left(x+\left(\theta_1-\frac{1}{2}\right)h\,,y+\left(\theta_2-\frac{1}{2}\right)k\right).$$

Puesto que f es continua salvo a lo sumo en un número finito de puntos,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\k\to 0}}\frac{p\left[x-\frac{h}{2}\le X\le x+\frac{h}{2}\,,\,y-\frac{k}{2}\le Y\le y+\frac{k}{2}\right]}{h\cdot k}=$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\k\to 0}} f\left(x+\left(\theta_1-\tfrac{1}{2}\right)h\,,\,y+\left(\theta_2-\tfrac{1}{2}\right)k\right)=f(x,y)\,,$$

quedando probado el resultado que confirma que la función de densidad es la probabilidad por unidad de área en un rectángulo *infinitesimal* alrededor del punto (x,y).

Ejercicio 4.11.
Definimos la función

$$G(x,y)=\int_{s=-\infty}^{x}\int_{t=-\infty}^{y} g(s,t)\,dt\,ds\,.$$

Se demuestra de modo inmediato que G es función de distribución. Además, el Cálculo Integral permite asegurar que cumple las condiciones exigidas para ser la función de distribución de una variable aleatoria continua; en particular, existe $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}G(x,y)=g(x,y)$, de lo que se deduce que g es la función de densidad de una variable aleatoria continua.

Ejercicio 4.12.
Puesto que g es la integral de una función no negativa, es también no negativa. Además,

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 .$$

Se cumplen, por tanto, las dos condiciones que caracterizan a la función de densidad de una variable continua.

Ejercicio 4.13.
a) La distribución de Y condicionada por X indica que, si Y ha de ser 4, $p[Y=4 \mid X=x]$ es no nula sólo cuando el *número de erratas*, X, sea igual a 1, 2 o 3. Según esto,

$$\begin{aligned} p[Y=4] &= \textstyle\sum_{x=1}^{3} p[X=x, Y=4] = \\ &= \textstyle\sum_{x=1}^{3} p[Y=4 \mid X=x] \cdot p[X=x] , \end{aligned}$$

con lo que la probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} p[Y=4] &= p[Y=4 \mid X=3] \cdot p[X=3] + p[Y=4 \mid X=2] \cdot p[X=2] + \\ &\quad + p[Y=4 \mid X=1] \cdot p[X=1] = \\ &= \frac{1}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} + \frac{3}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} + \frac{1}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2}{1!} = \frac{28}{15} \cdot e^{-2} = 0.253 . \end{aligned}$$

b) Por definición de probabilidad condicionada:

$$p[X=3 \mid Y=5] = \frac{p[X=3, Y=5]}{p[Y=5]} .$$

Ahora bien,

$$p[X=3, Y=5] = p[Y=5 \mid X=3] \cdot p[X=3] = \frac{3}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{5} \cdot e^{-2} .$$

Por otro lado, utilizando un razonamiento análogo al realizado en el apartado anterior,

$$p[Y=5] = \sum_{x=2}^{4} p[X=x, Y=5] = \sum_{x=2}^{4} p[Y=5 \mid X=x] \cdot p[X=x] ,$$

es decir, el denominador es

$$\begin{aligned} p[Y=5] &\quad + p[Y=5 \mid X=2] \cdot p[X=2] = \\ &= \frac{1}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^4}{4!} + \frac{3}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} + \frac{1}{5} \cdot e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{3} \cdot e^{-2} . \end{aligned}$$

En consecuencia, la probabilidad pedida resulta

$$p[X = 3 \mid Y = 5] = \frac{\frac{4}{5} \cdot e^{-2}}{\frac{4}{3} \cdot e^{-2}} = \frac{3}{5} = 0.6 \, .$$

Ejercicio 4.14.

a) Para hallar la función de probabilidad conjunta hemos de utilizar la asignación de probabilidad sobre el espacio muestral $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ de los resultados en el lanzamiento del dado. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} p[X = -1, Y = -1] &= p(\{1,3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \, , \\ p[X = -1, Y = 0] &= p(\emptyset) = 0 \quad \text{o} \\ p[X = 1, Y = 0] &= p(\{4\}) = \frac{1}{6} \, . \end{aligned}$$

La siguiente tabla recoge la función de probabilidad conjunta del par (X, Y), junto con las funciones de probabilidad marginales:

$X \setminus Y$	-1	0	1	
-1	$1/3$	0	$1/6$	$1/2$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/2$
	$3/6$	$1/6$	$2/6$	

Para hallar la función de distribución hemos de considerar diferentes regiones del plano. Si $x < -1$, o bien $y < -1$, entonces,

$$F(x, y) = p[X \leq x, Y \leq y] = 0 \, .$$

Para valores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $-1 \leq x < 1$, $-1 \leq y < 0$,

$$F(x, y) = p[X \leq x, Y \leq y] = p[X = -1, Y = -1] = \frac{1}{3} \, .$$

Si $-1 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$,

$$F(x, y) = p[X \leq x, Y \leq y] = p[X = -1, Y = -1] + p[X = -1, Y = 0] = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \, .$$

De la misma forma calcularíamos la función de distribución para los distintos puntos (x, y) del plano:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < -1 \quad \text{o} \quad y < -1 \\ 1/3 & -1 \leq x < 1, \quad -1 \leq y < 0 \\ 1/3 & -1 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < 1 \\ 1/2 & -1 \leq x < 1, \quad y \geq 1 \\ 1/2 & x \geq 1, \quad -1 \leq y < 0 \\ 2/3 & x \geq 1, \quad 0 \leq y < 1 \\ 1 & x \geq 1, \quad y \geq 1 \end{cases}$$

La figura 4.1 describe esquemáticamente la función de distribución obtenida.

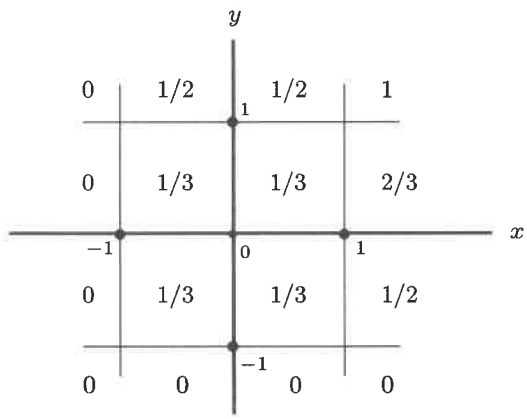


FIG. 4.1.

b) Aplicando la definición de probabilidad condicionada

$$p[X + Y = 0 \mid Y \leq 0] = \frac{p[X + Y = 0, Y \leq 0]}{p[Y \leq 0]} .$$

El numerador es

$$p[X + Y = 0, Y \leq 0] = p[X = 1, Y = -1] = \frac{1}{6}$$

y el denominador se obtiene a partir de la función de probabilidad marginal de Y,

$$p[Y \leq 0] = p[Y = -1] + p[Y = 0] = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} .$$

Por tanto,

$$p[X+Y=0 \mid Y \leq 0] = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4} .$$

Igualmente calcularíamos la probabilidad del suceso $[X=1]$ condicionada por el suceso $[X+Y=2]$:

$$p[X=1 \mid X+Y=2] = \frac{p[X=1, X+Y=2]}{p[X+Y=2]} ,$$

donde

$$p[X=1, X+Y=2] = p[X=1, Y=1] = \frac{1}{6}$$

y

$$p[X+Y=2] = p[X=1, Y=1] = \frac{1}{6} ,$$

con lo que

$$p[X=1 \mid X+Y=2] = \frac{1/6}{1/6} = 1 .$$

Ejercicio 4.15.

a) Para obtener la distribución marginal de la variable Y, utilizaremos la función de probabilidad conjunta:

$$f_Y(y) = \sum_{x=5}^{8} f(x,y) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{10-5}{5} \left(\frac{5}{10}\right)^y + \frac{1}{4} \cdot \frac{10-6}{6} \left(\frac{6}{10}\right)^y + \frac{1}{4} \cdot \frac{10-7}{7} \left(\frac{7}{10}\right)^y + \frac{1}{4} \cdot \frac{10-8}{8} \left(\frac{8}{10}\right)^y =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^y + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^y + \frac{3}{7} \left(\frac{7}{10}\right)^y + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^y \right] ,$$

para $y = 1, 2, \ldots$

b) La distribución de X condicionada por el suceso $[Y=y]$, para $y = 1, 2, \ldots$, se calcula como

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{10-x}{x} \left(\frac{x}{10}\right)^y}{\frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^y + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^y + \frac{3}{7} \left(\frac{7}{10}\right)^y + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^y \right]} =$$

$$= \frac{10-x}{x} \left(\frac{x}{10}\right)^y \left[\left(\frac{1}{2}\right)^y + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^y + \frac{3}{7} \left(\frac{7}{10}\right)^y + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^y \right]^{-1}$$

si $x = 5, 6, 7, 8$.

c) Por definición de probabilidad condicionada,

$$p[X = 6 \mid Y > 3] = \frac{p[X = 6, Y > 3]}{p[Y > 3]} .$$

Para calcular el numerador basta tener en cuenta que el suceso $[X = 6]$ puede escribirse como unión disjunta de los sucesos $[X = 6, Y > 3]$ y $[X = 6, Y \leq 3]$. Según esto,

$$p[X = 6, Y > 3] = p[X = 6] - p[X = 6, Y \leq 3] .$$

Ahora bien,

$$p[X = 6, Y \leq 3] = \sum_{y=1}^{3} p[X = 6, Y = y] = \sum_{y=1}^{3} f(6, y) =$$

$$= \sum_{y=1}^{3} \frac{1}{4} \cdot \frac{10 - 6}{6} \left(\frac{6}{10}\right)^y = \frac{49}{250} .$$

Además,

$$p[X = 6] = \sum_{y=1}^{\infty} f(6, y) = \frac{1}{4} \cdot \frac{10 - 6}{6} \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{6}{10}\right)^y =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{10 - 6}{6} \cdot \frac{6/10}{1 - \frac{6}{10}} = \frac{1}{4} .$$

Con lo cual,

$$p[X = 6, Y > 3] = \frac{1}{4} - \frac{49}{250} = \frac{27}{500} = 0.054 .$$

Por lo que respecta al denominador,

$$p[Y > 3] = 1 - p[Y \leq 3] = 1 - \sum_{y=1}^{3} f_Y(y) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{3}{7} \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^2 + + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \frac{3}{7} \left(\frac{7}{10}\right)^3 +$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^3 \right] = 1 - \frac{701}{1\,000} = 0.299 .$$

Por tanto,

$$p[X = 6 \mid Y > 3] = \frac{27/500}{299/1\,000} = \frac{54}{299} = 0.181 .$$

Ejercicio 4.16.
a) Para $f_X(x) > 0$, esto es, si $0 < x < 1$, se cumple

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{(Y \mid X=x)}(y) = 4x^3 \cdot \frac{2y}{x^2} = 8xy \qquad 0 < y < x \,.$$

Es decir,

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 < y < x < 1 \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) A partir de la función de densidad conjunta obtenida en el apartado anterior puede hallarse la función de densidad marginal de la variable Y:

$$f_Y(y) = \int_{x=y}^{1} 8xy\, dx = 4y(1-y^2)\,,$$

si $0 < y < 1$ y cero para el resto de valores de y.

c) La función de densidad de X condicionada por $Y = y$ está definida siempre y cuando $f_Y(y) > 0$, es decir, si $0 < y < 1$. Entonces,

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2}\,,$$

si $y < x < 1$, anulándose para el resto de valores de x.

Ejercicio 4.17.
a) El cálculo de las funciones de densidad marginales se realiza integrando la función de densidad conjunta; la función de densidad marginal de la variable R vale

$$f_R(r) = \int_{c=0}^{r} \frac{1}{6} \cdot r^{1/2} c^{1/2}\, dc = \frac{1}{9} \cdot r^2 \qquad 0 < r < 3\,,$$

siendo igual a cero en el resto de los casos. Análogamente, la función de densidad marginal de la variable C es

$$f_C(c) = \int_{r=c}^{3} \frac{1}{6} \cdot r^{1/2} c^{1/2}\, dr = \frac{1}{9} \cdot c^{1/2}(3^{3/2} - c^{3/2})$$

y es igual a cero fuera del intervalo $(0,3)$.

b) Hemos de hallar la probabilidad del suceso $[C > 1]$ condicionada por el suceso $[R \leq 2.5]$, esto es,

$$p[C > 1 \mid R \leq 2.5] = \frac{p[C > 1, R \leq 2.5]}{p[R \leq 2.5]}$$

Para obtener la probabilidad del suceso $[C > 1, R \leq 2.5]$ vamos a apoyarnos en la representación gráfica de la figura 4.2.

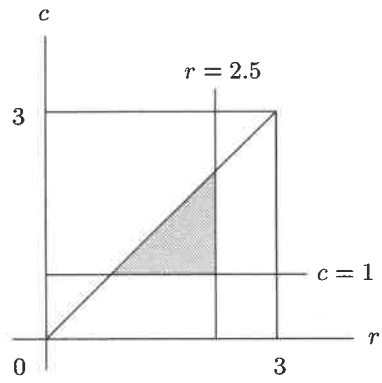


FIG. 4.2.

Así,

$$p[C > 1, R \leq 2.5] = \int_{c=1}^{2.5} \int_{r=c}^{2.5} \frac{1}{6} \cdot r^{1/2} c^{1/2} \, dr \, dc =$$

$$= \int_{c=1}^{2.5} \left(\frac{5\sqrt{10c}}{36} - \frac{c^2}{9} \right) dc = \frac{133}{216} - \frac{5\sqrt{10}}{54} = 0.323 .$$

La función de densidad de la variable R permite calcular el denominador:

$$p[R \leq 2.5] = \int_0^{2.5} \frac{1}{9} \cdot r^2 \, dr = \frac{125}{216} = 0.579 .$$

De este modo, la probabilidad pedida es

$$p[C > 1 \mid R \leq 2.5] = \frac{133}{125} - \frac{4\sqrt{10}}{25} = 0.558 .$$

Ejercicio 4.18.

a) Para calcular la probabilidad del suceso $[Y > 25]$, hemos de obtener la distribución de la variable Y. Previamente, hallamos la función de densidad conjunta de las variables X e Y:

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{30(30-x)} & 0 \leq x \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto, para valores de y comprendidos entre 0 y 30,

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{y} \frac{1}{30(30-x)} \, dx = \frac{1}{30} [\ln 30 - \ln (30-y)] ,$$

siendo nula para el resto de valores de y. Según esto, la probabilidad pedida es

$$p[Y > 25] = 1 - p[Y \leq 25] = 1 - \int_0^{25} \frac{1}{30} [\ln 30 - \ln, (30 - y)]\, dy =$$

$$= 1 - \frac{1}{30} \left[\int_{y=0}^{25} \ln 30\, dy - \int_{y=0}^{25} \ln (30 - y)\, dy \right] =$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6} - \frac{\ln 6}{6} \right) = 0.465 .$$

Para resolver la segunda integral hemos realizado el cambio de variable $30 - y = t$. Así,

$$- \int \ln(30 - y)\, dy = \int \ln t\, dt ,$$

e integrando *por partes* se obtiene el resultado.

b) Teniendo en cuenta que *el número de días empleados en la corrección* es $Y - X$, hemos de hallar la probabilidad del suceso $[X > Y - X]$. Puesto que el conjunto de puntos del plano, (x, y), que cumplen la condición $x > y - x$ coincide con el conjunto de pares que verifican $y < 2x$, la región donde hemos de integrar la función de densidad conjunta es la que aparece rayada en la figura 4.3.

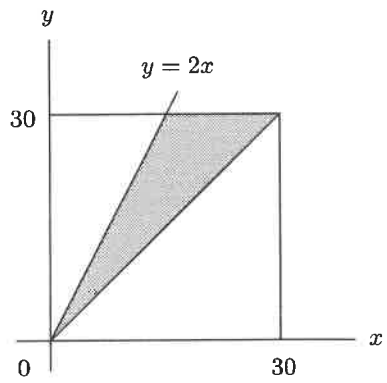


FIG. 4.3.

Esto conduce a la probabilidad pedida:

$$p[X > Y - X] = p[Y < 2X] = \int_{y=0}^{30} \int_{x=\frac{y}{2}}^{y} \frac{1}{30(30-x)}\, dx\, dy =$$

$$= -\frac{1}{30}\left[\int_{y=0}^{30} \ln(30-y)\, dy - \int_{y=0}^{30} \ln\left(30-\frac{y}{2}\right) dy\right] =$$

$$= \ln 2 = 0.693\,.$$

Observe el lector que la primera de estas integrales está calculada en el apartado *a*); por lo que respecta a la segunda, hemos realizado el cambio de variable $30 - \frac{y}{2} = t$ e integrado *por partes* al igual que en el apartado anterior.

c) En la representación gráfica de la figura 4.4 visualizamos el suceso $[Y - X < 2]$ (zona rayada) y el suceso complementario, $R = [Y - X \geq 2]$.

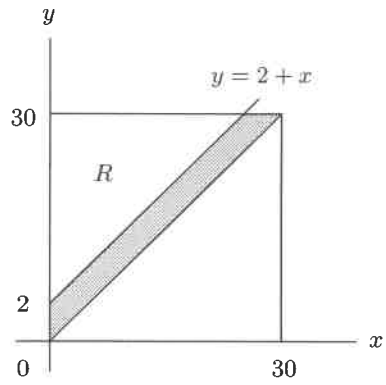


FIG. 4.4.

En consecuencia,

$$p[Y - X < 2] = 1 - p[Y - X \geq 2] = 1 - \int_{y=2}^{30} \int_{x=0}^{y-2} \frac{1}{30(30-x)}\, dx\, dy =$$

$$= 1 + \frac{1}{30}\left[\int_{y=2}^{30} \ln(32-y)\, dy - \int_{y=2}^{30} \ln 30\, dy\right] =$$

$$= 1 + \frac{\ln 15}{15} - \frac{14}{15} = 0.247\,.$$

d) Buscamos la probabilidad del suceso $[15 < X < 20]$ condicionada por $[Y = 25]$, esto es, por un suceso de probabilidad nula. Esto obliga a calcular previamente

$f_{(X \mid Y=25)}(x)$. En general, para $0 < y < 30$,

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{30(30-x)}}{\frac{1}{30}[\ln 30 - \ln(30-y)]} = \frac{1}{(30-x)[\ln 30 - \ln(30-y)]},$$

si $0 \leq x \leq y$, anulándose para el resto de los valores de x. En particular, para $y = 25$,

$$f_{(X \mid Y=25)}(x) = \frac{1}{(30-x)(\ln 30 - \ln 5)} = \frac{1}{(30-x)\ln 6},$$

si $0 \leq x \leq 25$, siendo cero en otro caso.

Ya estamos en condiciones de calcular la probabilidad pedida:

$$p[15 < X < 20 \mid Y = 25] = \int_{x=15}^{20} \frac{1}{(30-x)\ln 6}\, dx = \frac{\ln(3/2)}{\ln 6} = 0.226 .$$

Ejercicio 4.19.

a) Para hallar $p[Y > 0.5 \mid X = 1]$, hay que sustituir, en primer lugar, el valor $x = 1$ en la función de densidad condicionada $f_{(Y \mid X=x)}$:

$$f_{(Y \mid X=1)}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1} = 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Integrando esta función de densidad condicionada para valores de y superiores a 0.5 se tiene

$$p[Y > 0.5 \mid X = 1] = \int_{y=0.5}^{1} f_{(Y \mid X=1)}(y)\, dy = \int_{y=0.5}^{1} 1 \cdot dy = 0.5 .$$

b) Los ingresos semanales para este tipo de consumición son $350 \cdot Y$. Para calcular $p[350 \cdot Y > 200]$ o, equivalentemente, $p[Y > \frac{200}{350}] = p[Y > \frac{4}{7}]$, hemos de integrar la función de densidad conjunta en la región del plano donde $y > \frac{4}{7}$ (véase la figura 4.5).

Ahora bien, la función de densidad conjunta es

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{(Y \mid X=x)}(y) = \frac{x^2}{9} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{9},$$

si $0 < y < x < 3$, anulándose para el resto de valores $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} p[350 \cdot Y > 200] &= \int_{x=4/7}^{3} \int_{y=4/7}^{x} \frac{x}{9}\, dy\, dx = \\ &= \frac{1}{9} \int_{x=4/7}^{3} \left(x^2 - \frac{4x}{7}\right) dx = \frac{6\,647}{9\,261} = 0.718 . \end{aligned}$$

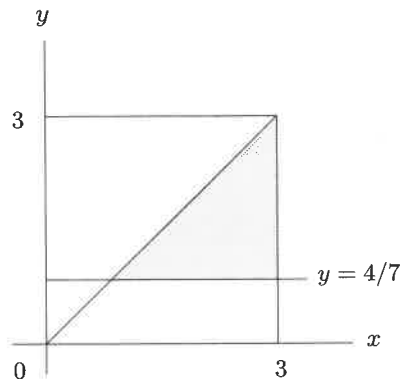


FIG. 4.5.

c) El *número vendido de hamburguesas sin queso* es $X-Y$, con lo cual la probabilidad de que dicho número sea superior a mil es $p[X-Y>1]$. El conjunto de puntos del plano, (x,y), tales que $x-y>1$, está representado en la figura 4.6.

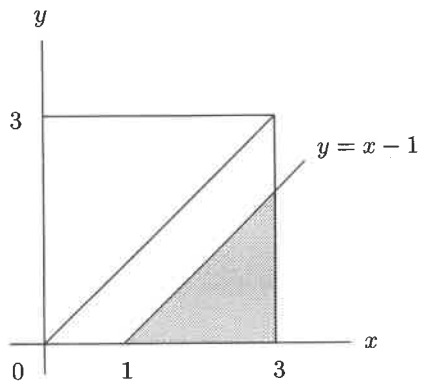


FIG. 4.6.

Por tanto,

$$p[X-Y>1] = \int_{x=1}^{3}\int_{y=0}^{x-1}\frac{x}{9}\,dy\,dx = \frac{1}{9}\int_{x=1}^{3}x(x-1)\,dx = \frac{14}{27} = 0.519\,.$$

Ejercicio 4.20.

a) Si f es la función de densidad de la variable aleatoria bidimensional (X, Y), debe cumplirse que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$. En concreto,

$$1 = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} kx(x+y)\,dy\,dx = k\int_{x=0}^{1}\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)dx = k\cdot\frac{7}{12}\,,$$

con lo que k es igual a $12/7$.

b) La *proporción de bebidas alcohólicas en Pochó* es $1 - X$, por lo cual hemos de hallar $p[1 - X > 0.3]$ o, lo que es lo mismo, $p[X < 0.7]$. Puesto que la función de densidad marginal de la variable X es

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1}\frac{12}{7}\cdot x(x+y)\,dy = \frac{12}{7}\cdot x\left(x+\frac{1}{2}\right) \qquad 0 < x < 1\,,$$

la probabilidad pedida vale

$$p[X < 0.7] = \int_{x=0}^{0.7}\frac{12}{7}\cdot x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{203}{500} = 0.406\,.$$

c) Ya que *el porcentaje de bebidas alcohólicas en Pochó* y *Vengo-Vengo* es $1 - X$ y $1 - Y$, respectivamente, la probabilidad de que *tal porcentaje sea superior en Pochó que en Vengo-Vengo* es la probabilidad del suceso $[1 - X > 1 - Y]$, esto es, $p[X < Y]$. Por tanto, integrando la función de densidad conjunta en la región rayada de la figura 4.7, se obtiene

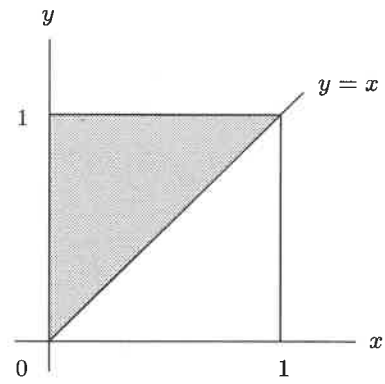


FIG. 4.7.

$$p[X < Y] = \int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{y}\frac{12}{7}\cdot x(x+y)\,dx\,dy = \frac{12}{7}\int_{y=0}^{1}\frac{5}{6}\cdot y^3\,dy = \frac{5}{14} = 0.357\,.$$

d) Sabiendo que se verifica el suceso $[X > 0.5]$, la probabilidad del suceso $[Y > 0.5]$, es decir, $p[Y > 0.5 \mid X > 0.5]$, se obtiene aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$p[Y > 0.5 \mid X > 0.5] = \frac{p[Y > 0.5, X > 0.5]}{p[X > 0.5]} .$$

Utilizando la función de densidad marginal de la variable X, f_X, calculada en el apartado *b*), se deduce el denominador. Así,

$$p[X > 0.5] = \int_{0.5}^{1} \frac{12}{7} \cdot x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{23}{28} = 0.821 .$$

En cuanto al numerador,

$$\begin{aligned} p[Y > 0.5, X > 0.5] &= \int_{x=0.5}^{1} \int_{y=0.5}^{1} \frac{12}{7} \cdot x(x+y)\, dy\, dx = \\ &= \frac{12}{7} \int_{x=0.5}^{1} \left(0.5x^2 - 0.75 \cdot \frac{x}{2}\right) dx = \frac{55}{112} = 0.491 . \end{aligned}$$

En definitiva,

$$p[Y > 0.5 \mid X > 0.5] = \frac{55/112}{23/28} = \frac{55}{92} = 0.598 .$$

Ejercicio 4.21.

a) Para calcular la probabilidad del suceso $[X > 2]$ condicionada por el suceso de probabilidad nula $[Y = 4]$, es necesario hallar la función de densidad condicionada $f_{(X \mid Y=4)}$, teniendo en cuenta que

$$f_{(X \mid Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} .$$

A partir de la función de densidad conjunta, f, la función de densidad marginal de la variable Y es

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{4} \frac{xy}{96}\, dx = \frac{y}{12} ,$$

para valores de y comprendidos entre 1 y 5, siendo nula en el resto de los valores. Por tanto, para $1 < y < 5$,

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{xy/96}{y/12} = \frac{x}{8} \qquad 0 < x < 4 ,$$

anulándose en el resto de valores. En particular, si $y = 4$, entonces,

$$f_{(X \mid Y=4)}(x) = \frac{x}{8} \qquad 0 < x < 4$$

y, en consecuencia,

$$p[X > 2 \mid Y = 4] = \int_2^4 \frac{x}{8} \cdot x \, dx = \frac{3}{4} = 0.75 \, .$$

Observe el lector que, si $0 < x < 4$,

$$f_X(x) = \int_{y=1}^{5} \frac{xy}{96} \, dy = \frac{x}{8} \, ,$$

es decir,

$$f_X(x) = f_{(X \mid Y=y)}(x) \, ,$$

para cualquier $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, y siempre que $f_{(X \mid Y=y)}$ esté definida. Se deduce, así, que X e Y son variables aleatorias independientes y, por tanto,

$$p[X > 2 \mid Y = 4] = p[X > 2] \, ,$$

pudiéndose calcular esta probabilidad sin más que integrar la función de densidad marginal de la variable X.

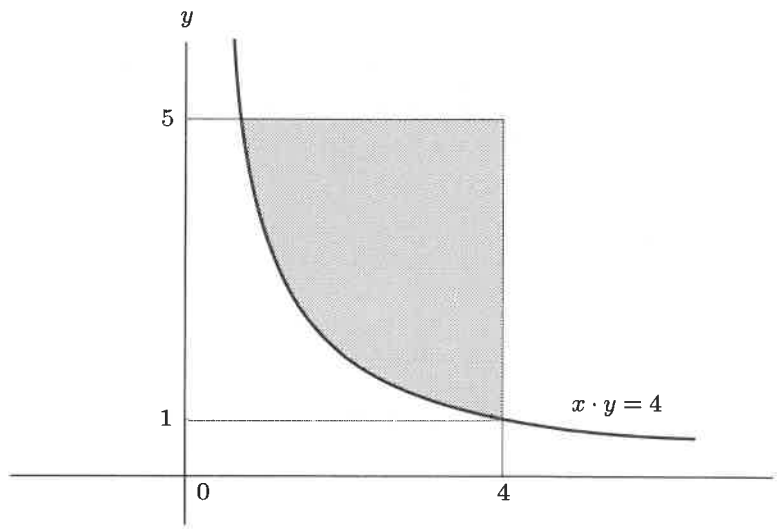


FIG. 4.8.

b) Debe cumplirse simultáneamente que la variable aleatoria X sea mayor que 1 y que la variable Y sea menor que 2, es decir, hemos de calcular $p[X > 1, Y < 2]$. Mediante la función de densidad conjunta,

$$p[X > 1, Y < 2] = \int_{x=1}^{4} \int_{y=1}^{2} \frac{xy}{96}\, dy\, dx = \frac{1}{64} \int_{x=1}^{4} x\, dx = \frac{15}{128} = 0.117 .$$

Es decir, en el 11.7 % de los meses el *número de unidades vendidas es superior a mil y el precio por unidad inferior a 2.000 pesetas.* Puede comprobar el lector que, como X e Y son variables aleatorias independientes, esta probabilidad coincide con el producto $p[X > 1] \cdot p[Y < 2]$.

c) El *ingreso total mensual* resulta de multiplicar la *cantidad vendida* por el *precio unitario*, es decir, $X \cdot Y$; como X e Y están expresadas en miles, el ingreso viene dado en millones de pesetas. Para hallar la probabilidad de que *en un mes el ingreso total sea superior a 4 millones*, $p[X \cdot Y > 4]$, dibujamos la región del plano donde hay que integrar la función de densidad conjunta (véase la figura 4.8). Con lo cual,

$$p[X \cdot Y > 4] = \int_{y=1}^{5} \int_{x=\frac{4}{y}}^{4} \frac{xy}{96}\, dx\, dy = \frac{1}{12} \int_{y=1}^{5} \left(y - \frac{1}{y} \right) dy = 1 - \frac{\ln 5}{12} = 0.866 .$$

Ejercicio 4.22.

a) Hemos de comprobar que f cumple las propiedades que caracterizan una función de densidad. Evidentemente, $f(x, y) \geq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Además,

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx = \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{x} \frac{2}{9}\, dy\, dx = \frac{2}{9} \int_{x=0}^{3} x\, dx = 1 .$$

Consecuentemente, f es función de densidad.

b) Para obtener la función de distribución en cada par de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, consideremos las distintas regiones del plano. Así, $F(x, y) = p[X \leq x, Y \leq y]$ es nula si $x < 0$ o $y < 0$. Para valores de x y de y tales que $0 < y < x < 3$, hay que integrar f en regiones como la rayada en la figura 4.9.

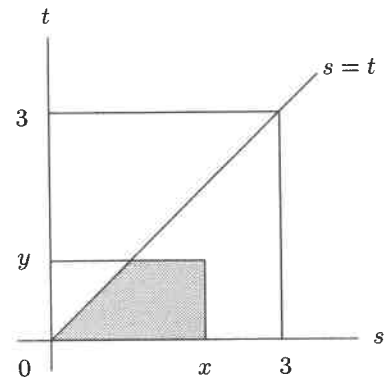


FIG. 4.9.

$$F(x,y) = p[X \le x, Y \le y] = \int_{t=0}^{y} \int_{s=t}^{x} \frac{2}{9}\, ds\, dt = \frac{2}{9} \int_{t=0}^{y} (x-t)\, dt = \frac{2}{9} \cdot y \left(x - \frac{y}{2}\right).$$

Si $0 < x < 3$, $y > x$, hemos de integrar en la región rayada de la figura 4.10, es decir,

$$F(x,y) = p[X \le x, Y \le y] = \int_{s=0}^{x} \int_{t=0}^{s} \frac{2}{9}\, dt\, ds = \frac{2}{9} \int_{s=0}^{x} s\, ds = \frac{x^2}{9}\,.$$

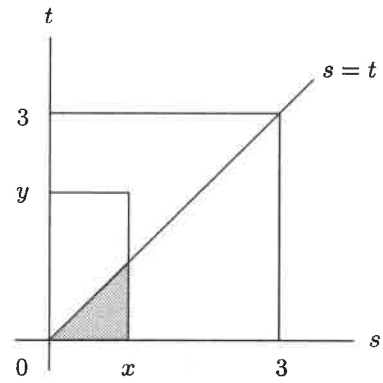


FIG. 4.10.

Cuando $0 < y < 3$, $x > 3$, la región viene descrita en la gráfica de la figura 4.11, con lo que la función de distribución es

$$F(x,y) = p[X \le x, Y \le y] = \int_{t=0}^{y} \int_{s=t}^{3} \frac{2}{9}\, ds\, dt = \frac{2}{9} \int_{t=0}^{y} (3-t)\, dt = \frac{2}{9} \cdot y \left(3 - \frac{y}{2}\right)\,.$$

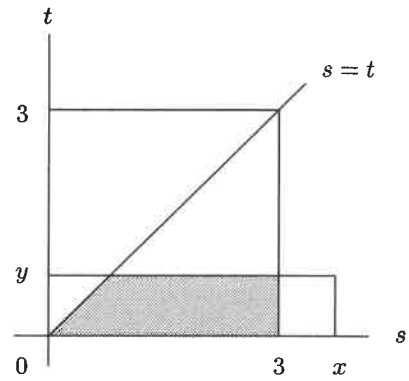


FIG. 4.11.

Por último, si $y > 3$ y $x > 3$, entonces,

$$F(x,y) = p[X \leq x, Y \leq y] = 1 .$$

En resumen, la función de distribución del par (X,Y) es

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \quad \text{o} \quad y \leq 0 \\ \frac{2}{9} \cdot y\left(x - \frac{y}{2}\right) & 0 < y < x < 3 \\ \frac{x^2}{9} & 0 < x < 3, \quad y > x \\ \frac{2}{9} \cdot y\left(3 - \frac{y}{2}\right) & 0 < y < 3, \quad x > 3 \\ 1 & x > 1, \quad y > 1 \end{cases}$$

c) Integrando la función de densidad conjunta de X e Y en el recinto rayado de la representación gráfica de la figura 4.12, se obtiene

$$p\left[Y \geq \frac{X}{2}\right] = \int_{s=0}^{3} \int_{t=\frac{s}{2}}^{s} \frac{2}{9}\, dt\, ds = \frac{1}{9} \int_{s=0}^{3} s\, ds = \frac{1}{2} .$$

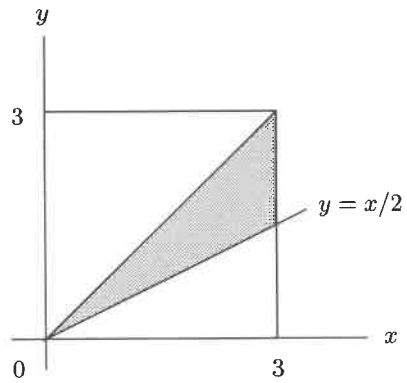


FIG. 4.12.

Advierta el lector que, puesto que f es constante, $p\left[Y \geq \frac{X}{2}\right]$ representa la mitad del volumen total (igual a la unidad), ya que el el recinto de integración es la *mitad* del recinto total donde f es no nula.

d) Para hallar la probabilidad del suceso $[X \geq 2]$ condicionada por el hecho de que *se han vendido cien unidades*, es decir, por el suceso de probabilidad nula $[Y = 1]$, hay que obtener

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} ,$$

para lo cual necesitamos la función de densidad marginal de la variable Y:

$$f_Y(y) = \int_{x=y}^{3} \frac{2}{9}\, dx = \frac{2}{9}(3-y) \qquad 0 < y < 3 .$$

En consecuencia, para valores de y entre 0 y 3:

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{9}(3-y)} = \frac{1}{3-y} \qquad y < x < 3 ,$$

siendo nula en el resto de los casos. En concreto, si $y = 1$,

$$f_{(X \mid Y=1)}(x) = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \qquad 1 < x < 3$$

y es igual a cero en el resto de valores de x. De este modo,

$$p[X \geq 2 \mid Y = 1] = \int_{x=2}^{3} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} .$$

Ejercicio 4.23.
Sea X la variable aleatoria que designa la *cantidad de manzanas* e Y la variable *cantidad de naranjas*, ambas expresadas en kilos, que un cliente compra en la frutería. Los datos del ejercicio, dados en porcentajes, pueden interpretarse en términos de probabilidades. Así,

$$\begin{aligned} &p[X = 1, Y = 1] = 0.1 , \\ &p[X = 1, Y = 0] = 0.3 , \\ &p[X = 0, Y = 1] = 0.15 \quad \text{y} \\ &p[X = 0, Y = 0] = 0.05 . \end{aligned}$$

Además, nos dicen que el 40 % compra manzanas y naranjas en cantidades inferiores al kilo en ambos casos, esto es,

$$p[X < 1, Y < 1] = 0.4 .$$

Como no se indica de qué modo está *repartida* esta probabilidad en la región del plano donde $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, aceptemos que se distribuye de modo uniforme dentro de él, es decir, podemos pensar en una función de densidad constante en el interior del cuadrado de lado unidad. La igualdad anterior implica, por consiguiente, que

$$0.4 = p[X < 1, Y < 1] = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} k\, dy\, dx = k \int_{x=0}^{1} dx = k ;$$

esto es, si $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, entonces,

$$f(x, y) = 0.4 .$$

Por tanto, para un valor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, se cumple que

$$p[X \leq x, Y \leq y] = \int_{s=0}^{x} \int_{t=0}^{y} 0.4\, dt\, ds = 0.4 \quad y \int_{s=0}^{x} ds = 0.4xy .$$

La variable aleatoria bidimensional (X, Y) es mixta porque es discreta en los pares de puntos $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(0,0)$, cuya probabilidad es no nula, y continua en los pares (x, y) tales que $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

Estamos ya en condiciones de abordar la resolución de los apartados del ejercicio.

a) La probabilidad de que un cliente compre *al menos un kilo de fruta* es

$$p[X + Y \geq 1] =$$
$$= p[X = 1, Y = 0] + p[X = 0, Y = 1] + p[X = 1, Y = 1] + \int_{x=0}^{1} \int_{y=1-x}^{1} 0.4\, dy\, dx =$$
$$= 0.3 + 0.15 + 0.1 + 0.4 \int_{x=0}^{1} x\, dx = 0.55 + 0.2 = 0.75 .$$

b) La probabilidad del suceso $[X < 0.5, Y > 0.25]$ es

$$p[X < 0.5, Y > 0.25] = p[X = 0, Y = 1] + \int_{x=0}^{0.5} \int_{y=0.25}^{1} 0.4\, dy\, dx =$$
$$= 0.15 + \int_{x=0}^{0.5} 0.3\, dx = 0.15 + 0.15 = 0.3 .$$

c) Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$p[X < 0.5 \mid X + Y < 1] = \frac{p[X < 0.5, X + Y < 1]}{p[X + Y < 1]} .$$

Utilizando el resultado obtenido en el apartado *a*), el denominador es

$$p[X + Y < 1] = 1 - p[X + Y \geq 1] = 1 - 0.75 = 0.25 .$$

Por lo que se refiere al numerador, se trata de la probabilidad del recinto rayado en la figura 4.13, por lo que,

$$p[X < 0.5, X + Y < 1] = p[X = 0, Y = 0] + \int_{x=0}^{0.5} \int_{y=0}^{1-x} 0.4\, dy\, dx =$$
$$= 0.05 + 0.4 \int_{x=0}^{0.5} (1 - x)\, dx = 0.05 + 0.15 = 0.2 .$$

En definitiva,

$$p[X < 0.5 \mid X + Y < 1] = \frac{0.2}{0.25} = 0.8 .$$

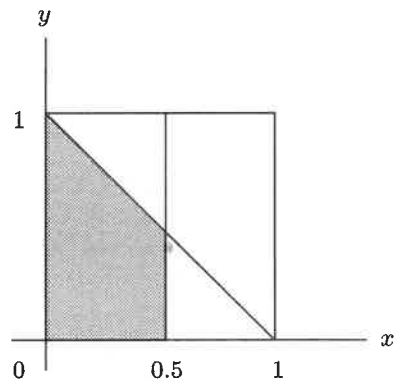


FIG. 4.13.

Ejercicio 4.24.
Como, para cada y, $f_{(X \mid Y=y)}$ es sólo función de una variable, hemos de comprobar que cumple las condiciones que caracterizan a la función de densidad de una variable aleatoria unidimensional. En primer lugar, es no negativa, ya que es cociente de funciones no negativas. Además,

$$\int_{x=-\infty}^{\infty} f_{(X \mid Y=y)}(x)\,dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx =$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \cdot f_Y(y) = 1 \,.$$

Queda, así, demostrado que la función de densidad condicionada es, en efecto, una función de densidad.

Ejercicio 4.25.
Sean $U = X^2$ y $V = Y^2$; veamos que, si X e Y son independientes, U y V también lo son, comprobando que, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, se cumple

$$F_{(U,V)}(u,v) = F_U(u) \cdot F_V(v) \,,$$

donde $F_{(U,V)}$, F_U y F_V son las funciones de distribución de (U,V), U y V, respectivamente.

Ahora bien,

$$F_{(U,V)}(u,v) = p[U \le u, V \le v] = p[X^2 \le u, Y^2 \le v] \,,$$

que es igual a cero, si u o v son negativos, y, si ambos son positivos, despejando X e Y resulta ser igual a

$$p[-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}, -\sqrt{v} \le Y \le \sqrt{v}] = p[-\sqrt{u} \le X \le \sqrt{u}] \cdot p[-\sqrt{v} \le Y \le \sqrt{v}] \,,$$

ya que, por ser X e Y independientes, para cualesquiera subconjuntos A y B de Borel, se verifica $p[X \in A, Y \in B] = p[X \in A] \cdot p[Y \in B]$. Por tanto, si u y v son positivos,

$$\begin{aligned} F_{(U,V)}(u,v) &= p[-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}] \cdot p[-\sqrt{v} \leq Y \leq \sqrt{v}] = \\ &= p[X^2 \leq u] \cdot p[Y^2 \leq v] = F_U(u) \cdot F_V(v) \,. \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, u fuera negativo, $[X^2 \leq u, Y^2 \leq v]$ sería el suceso imposible y, consecuentemente, $F_{(U,V)}(u,v) = 0$. Pero, en tal caso, $[U \leq u] = [X^2 \leq u]$ sería igualmente el suceso imposible, con lo que $F_U(u) = 0$. Si v fuese negativo, se anularían tanto la función de distribución conjunta como la marginal de la variable V. En definitiva, si u o v son negativos, también se verifica que

$$F_{(U,V)}(u,v) = F_U(u) \cdot F_V(v) \,,$$

por lo que podemos concluir que las variables U y V son independientes.

Ejercicio 4.26.
Dado que Y sólo toma los valores 3 y 5 y, además, $p[Y = 5] = 0.6$, necesariamente $p[Y = 3] = 1 - 0.6 = 0.4$. Como las variables X e Y son independientes,

$$0.5 = p[X = 2, Y = 5] = p[X = 2] \cdot p[Y = 5] = p[X = 2] \cdot 0.6 \,,$$

de lo cual se deduce que

$$p[X = 2] = \frac{0.5}{0.6} = \frac{5}{6} \,.$$

Por tanto,

$$p[X = 6] = 1 - (p[X = 2] + p[X = 4]) = 1 - \frac{5}{6} - 0.1 = \frac{1}{15} \,.$$

El resto de las probabilidades conjuntas se hallan aplicando la condición de independencia entre X e Y. Así,

$$\begin{aligned} p[X = 2, Y = 3] &= p[X = 2] \cdot p[Y = 3] = \frac{5}{6} \cdot 0.4 = \frac{1}{3} \,, \\ p[X = 4, Y = 3] &= p[X = 4] \cdot p[Y = 3] = 0.1 \cdot 0.4 = 0.04 \,, \\ p[X = 4, Y = 5] &= p[X = 4] \cdot p[Y = 5] = 0.1 \cdot 0.6 = 0.06 \,, \\ p[X = 6, Y = 3] &= p[X = 6] \cdot p[Y = 3] = \frac{1}{15} \cdot 0.4 = \frac{2}{75} \quad \text{y} \\ p[X = 6, Y = 5] &= p[X = 6] \cdot p[Y = 5] = \frac{1}{15} \cdot 0.6 = \frac{1}{25} \,. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.27.
Puesto que X_1 y X_2 son independientes, la variable $X_3 = X_1 \cdot X_2$ toma los valores 1 y -1 con probabilidades

$$p[X_3 = 1] = p[X_1 = 1, X_2 = 1] + p[X_1 = -1, X_2 = -1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

y

$$p[X_3 = -1] = p[X_1 = -1, X_2 = 1] + p[X_1 = 1, X_2 = -1] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} .$$

Las variables X_1, X_2 y X_3 no son independientes porque

$$p[X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1] = 0 \neq p[X_1 = 1] \cdot p[X_2 = 1] \cdot p[X_3 = -1] = \frac{1}{8} .$$

Sin embargo, las variables X_1, X_2 y X_3 son independientes dos a dos. Basta comprobarlo con X_1 y X_3 y con X_2 y X_3, ya que X_1 y X_2 son independientes. Así, para X_1 y X_3,

$$p[X_1 = -1, X_3 = -1] = p[X_1 = -1, X_2 = 1] = \frac{1}{4} = p[X_1 = -1] \cdot p[X_3 = -1] ,$$

$$p[X_1 = -1, X_3 = 1] = p[X_1 = -1, X_2 = -1] = \frac{1}{4} = p[X_1 = -1] \cdot p[X_3 = 1] ,$$

$$p[X_1 = 1, X_3 = -1] = p[X_1 = 1, X_2 = -1] = \frac{1}{4} = p[X_1 = 1] \cdot p[X_3 = -1] \quad \text{y}$$

$$p[X_1 = 1, X_3 = 1] = p[X_1 = 1, X_2 = 1] = \frac{1}{4} = p[X_1 = 1] \cdot p[X_3 = 1] .$$

Análogamente se realizaría la comprobación para las variables X_2 y X_3.

En resumen, X_1, X_2 y X_3 no son mutuamente independientes, pero sí lo son dos a dos.

Ejercicio 4.28.

Aplicando la condición de independencia se obtiene

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = xe^{-x} \cdot \frac{1}{2} ,$$

si $x > 0$ y $0 < y < 2$, y $f(x, y) = 0$ en el resto, función de densidad del par (X, Y) cuyas funciones de densidad marginales son las funciones f_X y f_Y anteriores, como puede comprobar el lector.

Ejercicio 4.29.

a) Calculemos la función de densidad marginal de la variable X, *tiempo de funcionamiento hasta la primera avería*:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{x+300y}{300}} \, dy = \frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{x}{300}} ,$$

si $x > 0$, siendo nula para valores negativos de x.

b) Para hallar la probabilidad de que la empresa *tarde al menos 3 días en acudir al lugar de la avería*, esto es, $p[Y \geq 3]$, puede integrarse la función de densidad conjunta.

Así,

$$p[Y \geq 3] = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=3}^{\infty} \frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{x+300y}{300}} \, dy \, dx = e^{-3} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{x}{300}} \, dx =$$
$$= e^{-3} = 0.0498 \, .$$

Por tanto, estas situaciones se dan en pequeña proporción (menor del 5 %, si interpretamos las probabilidades como porcentajes).

Compruebe el lector que se obtendría idéntico resultado calculando, en primer lugar, la función de densidad marginal de la variable Y y, posteriormente, integrándola para valores mayores que 3.

c) Existen dos funciones

$$g_1(x) = \frac{1}{300} \cdot e^{-\frac{x}{300}}$$

y

$$g_2(y) = e^{-y} \, ,$$

tales que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se cumple que

$$f(x, y) = g_1(x) \cdot g_2(y) \, ,$$

con lo cual X e Y son variables aleatorias independientes.

Esta técnica, como sabrá el lector, es alternativa a la descomposición de la función de densidad conjunta como producto de las marginales y, con frecuencia, más sencilla de utilizar. Con todo, puede obtener estas últimas y verificar que su producto coincide con la función de densidad conjunta.

d) Como (X, Y) es una variable bidimensional continua la probabilidad del suceso $[X \geq 200, Y = 0.5]$ es igual a cero.

Ejercicio 4.30.
Para estudiar la dependencia de X e Y hallemos las funciones de densidad marginales:

$$f_X(x) = \int_{y=-1}^{1} \frac{2 - x - y}{8} \, dy = \frac{2 - x}{4} \qquad -1 \leq x \leq 1 \, ,$$

anulándose en el resto de los casos. Análogamente, la función de densidad de la variable Y es

$$f_Y(y) = \frac{2 - y}{4} \qquad -1 \leq y \leq 1 \, ,$$

siendo $f_Y(y) = 0$ para el resto de valores de y. En consecuencia, X e Y son dependientes, ya que

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{2 - x}{4} \cdot \frac{2 - y}{4} \neq \frac{2 - x - y}{8} = f(x, y) \, .$$

Por ejemplo, $f(0.5, 0.5) = 1/8$, mientras que $f_X(0.5) \cdot f_Y(0.5) = 9/64$.

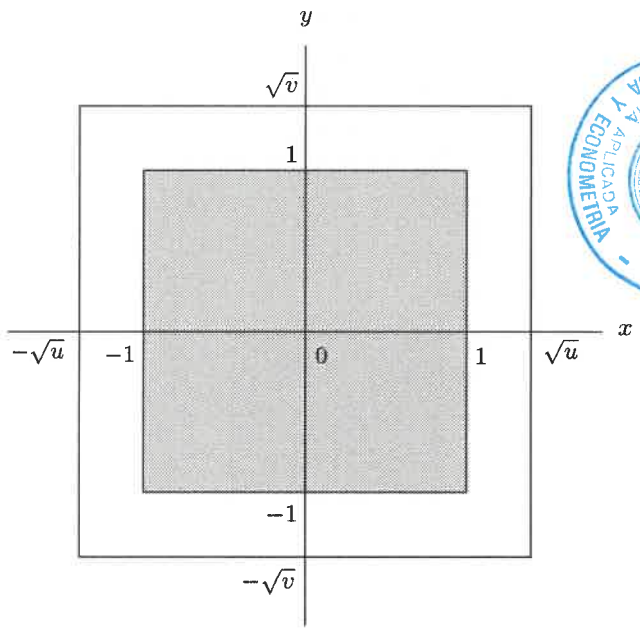
Para llevar a cabo el estudio de la independencia entre X^2 e Y^2, se necesita obtener la distribución conjunta de estas variables. Pero, dado que la transformación $U = X^2$, $V = Y^2$ no es biyectiva, no es posible aplicar el teorema del cambio de variable para variables bidimensionales. Por ello, calcularemos directamente $F_{(U,V)}(u,v)$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Si $u \leq 0$, o bien $v \leq 0$, se cumple trivialmente que $F_{(U,V)}(u,v) = 0$. Veamos qué ocurre cuando $u > 0$, $v > 0$:

$$\begin{aligned} F_{(U,V)}(u,v) &= p[X^2 \leq u, Y^2 \leq v] = \\ &= p[-\sqrt{u} \leq X \leq \sqrt{u}, -\sqrt{v} \leq Y \leq \sqrt{v}]\,, \end{aligned}$$

es decir, para calcular la función de distribución $F_{(U,V)}(u,v)$, hay que integrar la función de densidad $f_{(X,Y)}$ en la región del plano $[-\sqrt{u}, \sqrt{u}] \times [-\sqrt{v}, \sqrt{v}]$. Sin embargo, teniendo en cuenta que $f_{(X,Y)}(x,y) \neq 0$ en el recinto $[-1,1] \times [-1,1]$, los diferentes valores de u y v condicionan los límites de integración. Así, si $\sqrt{u} \geq 1$ y $\sqrt{v} \geq 1$, esto es, si $u \geq 1$ $v \geq 1$ (véase la figura 4.14), se cumple que $F_{(U,V)}(u,v) = 1$. En cambio, si $0 < u < 1$ y $v \geq 1$ (véase la figura 4.15), tendremos que

$$F_{(U,V)}(u,v) = \int_{x=-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{y=-1}^{1} \frac{2-x-y}{8}\, dy\, dx = \int_{x=-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{2-x}{4}\, dx = \sqrt{u}\,.$$



UNIVERSIDAD DE VALLADOLID
ESTADÍSTICA Y ECONOMÍA
ECONOMETRÍA APLICADA

FIG. 4.14.

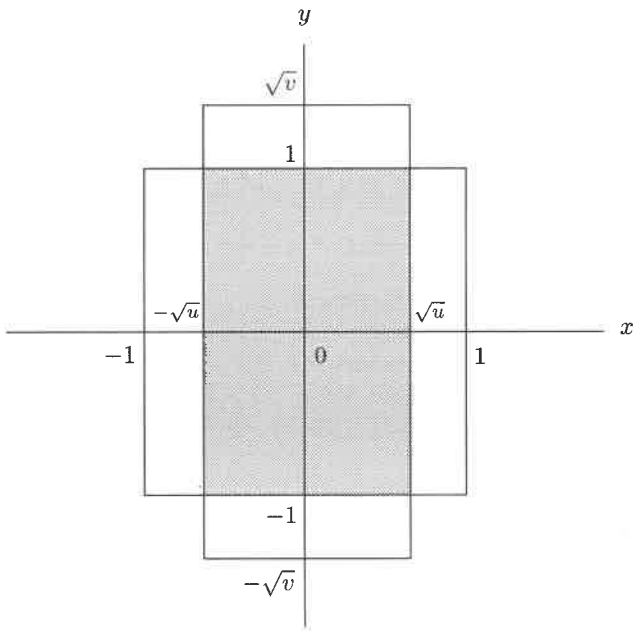


FIG. 4.15.

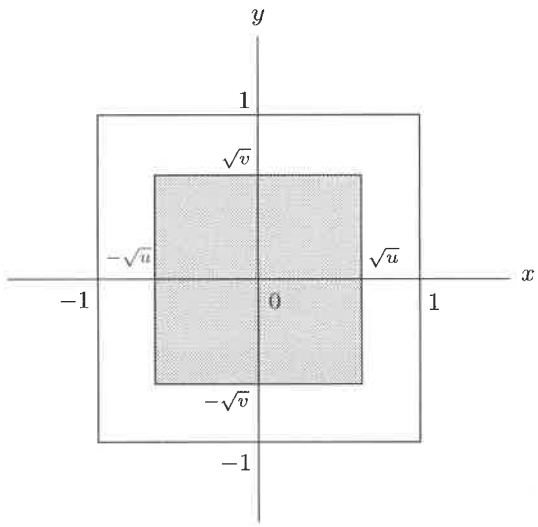


FIG. 4.16.

Análogamente al caso anterior, $F_{(U,V)}(u,v) = \sqrt{v}$, para valores $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tales que $0 < v < 1$ y $u \geq 1$, Por último, si $0 < u < 1$, $0 < v < 1$ (véase la figura 4.16), resulta

$$F_{(U,V)}(u,v) = \int_{x=-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \int_{y=-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}} \frac{2-x-y}{8}\, dx\, dy = \int_{x=-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{(2-x)\sqrt{v}}{4}\, dx = \sqrt{uv}\,.$$

En definitiva,

$$F_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} 0 & u < 0 \quad \text{o} \quad v < 0 \\ \sqrt{u} & v \geq 1, \quad 0 < u < 1 \\ \sqrt{v} & u \geq 1, \quad 0 < v < 1 \\ \sqrt{uv} & 0 < u < 1, \quad 0 < v < 1 \\ 1 & u \geq 1, \quad v \geq 1 \end{cases}$$

y, consecuentemente, la función de densidad de la variable bidimensional (U,V) vale

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} F_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{uv}} & 0 < u < 1, \quad 0 < v < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Como puede observarse, existen dos funciones,

$$g_1(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

y

$$g_2(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}\,,$$

tales que, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, se cumple

$$f_{(U,V)}(u,v) = g_1(u) \cdot g_2(v)\,,$$

de lo que se deduce que las variables $U = X^2$ y $V = Y^2$ son independientes.

Ejercicio 4.31.
La variable Y, *tiempo, en minutos, desde las 17 horas hasta que los señores Pérez depositan la basura* está igualmente distribuida que X; por tanto, la función de densidad de la variable Y coincide con la de la variable X,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{120} & 0 < y < 120 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para que la basura de los señores Pérez no sea recogida, es necesario que entre los tiempos de depósito, Y, y recogida, X, se cumpla la relación $Y \geq X$. Hemos de hallar, por tanto, la

probabilidad del suceso $[Y \geq X]$. Aceptando que las variables X e Y son independientes, su función de densidad conjunta será

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{120^2} & 0 < x < 120, \quad 0 < y < 120 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y, para hallar $p[Y \geq X]$, tendrá que integrarse esta función de densidad en el recinto rayado de la figura 4.17, es decir, el 50 % de las veces la basura quedará a la puerta de la vivienda.

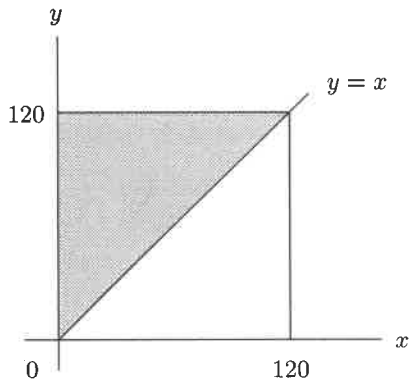


FIG. 4.17.

$$p[Y \geq X] = \int_{y=0}^{120} \int_{x=0}^{y} \frac{1}{120^2}\, dx\, dy = \frac{1}{120^2} \int_{y=0}^{120} y\, dy = \frac{1}{2}\,,$$

Observe el lector que el resultado obtenido es el que cabía esperar, sin necesidad de calcular la integral, ya que $f_{(X,Y)}$ es constante en el cuadrado de lado 120 y el recinto de integración es la *mitad* del recinto total donde esta función de densidad es no nula.

Ejercicio 4.32.

a) Dado que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy$ ha de ser igual a la unidad, entonces,

$$1 = \int_{y=0}^{\infty} \int_{x=0}^{1} k(x+y)\, e^{-y}\, dx\, dy = k \left(\int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-y}\, dy + \int_{y=0}^{\infty} y e^{-y}\, dy \right) = \frac{3}{2} \cdot k\,,$$

donde la primera integral es inmediata y la segunda se obtiene integrando *por partes*. Consecuentemente, $k = \frac{2}{3}$.

b) Para estudiar la independencia entre X e Y calculemos las funciones de densidad marginales:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{\infty} \frac{2}{3}(x+y)\,e^{-y}\,dy = \frac{2}{3}(x+1)\,,$$

si $0 < x < 1$, siendo nula en el resto. Asimismo,

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{1} \frac{2}{3}(x+y)\,e^{-y}\,dx = \frac{1}{3}\cdot e^{-y}(1+2y)\,,$$

cuando y toma valores positivos, anulándose para los negativos. Se verifica, entonces, que

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = \frac{2}{3}(x+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-y}(1+2y) \neq \frac{2}{3}(x+y)e^{-y} = f(x,y)\,,$$

siendo la diferencia entre ambas expresiones

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) - f(x,y) = \frac{2e^{-y}[2x(y-1)-y+1]}{9}\,.$$

Esta diferencia es no nula, siempre que lo sea el último factor del numerador. Por ejemplo, si $x = 0.2$ e $y = 2$, entonces, $[2x(y-1)-y+1] = -0.6$, por lo que en el punto $(0.2, 2)$ no coincide la función de densidad conjunta con el producto de las marginales. En definitiva, las variables X e Y son dependientes.

c) Para calcular la probabilidad de la intersección entre los sucesos $[X < 0.25]$ e $[Y > 1]$ integremos la función de densidad de la variable bidimensional (X, Y):

$$\begin{aligned} p[X < 0.25, Y > 1] &= \int_{y=1}^{\infty}\int_{x=0}^{0.25} \frac{2}{3}(x+y)\,e^{-y}\,dx\,dy = \\ &= \frac{1}{48}\int_{y=1}^{\infty} e^{-y}\,dy + \frac{1}{6}\int_{y=1}^{\infty} ye^{-y}\,dy = \\ &= \frac{17e^{-1}}{48} = 0.130\,. \end{aligned}$$

Advierta el lector que la segunda integral se ha resuelto aplicando el método de integración *por partes*.

De lo obtenido se concluye que el 13 % de los meses, menos del 25 % de los clientes compran una vez al mes y los beneficios superan el millón de pesetas.

d) Sabiendo que ha ocurrido el suceso $[Y < 2]$, hay que hallar la probabilidad del suceso $[X > 0.5]$. Aplicando la definición de probabilidad condicionada

$$p[X > 0.5 \mid Y < 2] = \frac{p[X > 0.5, Y < 2]}{p[Y < 2]}\,.$$

Puesto que conocemos la distribución marginal de la variable Y, el denominador es

$$p[Y<2] = \int_{y=0}^{2} \frac{1}{3}\cdot e^{-y}(1+2y)\,dy = \\ = \frac{1}{3}\int_{y=0}^{2} e^{-y}\,dy + \frac{2}{3}\int_{y=0}^{2} ye^{-y}\,dy = 1 - \frac{7e^{-2}}{3} = 0.684\,.$$

En cuanto al numerador,

$$p[X>0.5, Y<2] = \int_{y=0}^{2}\int_{x=0.5}^{1} \frac{2}{3}(x+y)e^{-y}\,dx\,dy = \\ = \frac{2}{3}\int_{y=0}^{2} e^{-y}\left(\frac{3}{8}+\frac{y}{2}\right)dy = \frac{7}{12} - \frac{5e^{-2}}{4} = 0.414\,.$$

En definitiva,

$$p[X>0.5 \mid Y<2] = \frac{0.414}{0.684} = 0.605\,.$$

e) Sea Y_i $(i=1,2)$ la variable que designa *el beneficio, en millones de pesetas, del mes i-ésimo*. La independencia entre Y_1 e Y_2 permite calcular $p[Y_1+Y_2>7]$, dado que la función de densidad del par (Y_1,Y_2) es

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1)\cdot f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{3}\cdot e^{-y_1}(1+2y_1)\cdot\frac{1}{3}\cdot e^{-y_2}(1+2y_2) = \\ = \frac{1}{9}\cdot e^{-(y_1+y_2)}(1+2y_1)(1+2y_2)\,,$$

si $y_1, y_2 > 0$, y, por tanto,

$$p[Y_1+Y_2>7] = 1 - p[Y_1+Y_2\le 7] = \\ = 1 - \int_{y_1=0}^{7}\int_{y_2=0}^{7-y_1} \frac{1}{9}\cdot e^{-(y_1+y_2)}(1+2y_1)(1+2y_2)\,dy_2\,dy_1$$

según queda reflejado en la gráfica de la figura 4.18.

Integrando primero respecto de y_2, se tiene que $p[Y_1+Y_2\le 7]$ es igual a

$$\frac{1}{9}\int_{y_1=0}^{7} e^{-y_1}(1+2y_1)\left(-17e^{-7}e^{y_1}+2e^{-7}y_1e^{y_1}+3\right)dy_1 = 1 - \frac{1490e^{-7}}{27} = 0.9497\,.$$

Esto es,

$$p[Y_1+Y_2>7] = 0.0503\,.$$

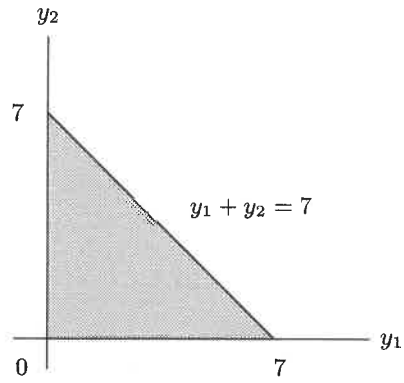


FIG. 4.18.

f) Puesto que los resultados de los distintos meses son independientes entre sí y en los 6 meses considerados con beneficios superiores a los 3 millones, el número de clientes con compra mensual única ha de ser inferior al 30 %, tendremos que elevar a la sexta potencia la probabilidad del suceso $[X < 0.3 \mid Y > 3]$ para obtener la probabilidad pedida. Así, por definición de probabilidad condicionada:

$$p[X < 0.3 \mid Y > 3] = \frac{p[X < 0.3, Y > 3]}{p[Y > 3]} .$$

A partir de la función de densidad marginal de la variable Y se calcula la probabilidad del suceso $[Y > 3]$,

$$p[Y > 3] = 1 - p[Y \leq 3] = 1 - \int_{y=0}^{3} \frac{1}{3} \cdot e^{-y}(1 + 2y) = 3e^{-3} = 0.149 ,$$

y, con la función de densidad conjunta de las variables X e Y, la probabilidad del suceso $[X < 0.3, Y > 3]$:

$$\begin{aligned} p[X < 0.3, Y > 3] &= \int_{y=3}^{\infty} \int_{x=0}^{0.3} \frac{2}{3} (x + y)\, e^{-y}\, dx\, dy = \\ &= \int_{y=3}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{0.09}{2} + 0.3y \right) e^{-y}\, dy = \frac{83e^{-3}}{100} = 0.041 . \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$p[X < 0.3 \mid Y > 3] = \frac{83e^{-3}/100}{3e^{-3}} = \frac{83}{300} = 0.277$$

y la probabilidad pedida es

$$(p[X < 0.3 \mid Y > 3])^6 = 0.277^6 = 0.0004 .$$

Ejercicio 4.33.

a) Sean X_1 y X_2 los *tiempos de revisión del primer* y *segundo escrito*, respectivamente. Para calcular la probabilidad del suceso $[X_1 + X_2 < 10]$, es necesario conocer la distribución de la variable (X_1, X_2). Aceptando que los tiempos de revisión de cada escrito son independientes entre sí, la función de densidad de la variable (X_1, X_2) será igual al producto de las funciones de densidad de X_1 y X_2:

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x_1} \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot x_2} = \frac{1}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5}(x_1 + x_2)} ,$$

si $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$, siendo nula en otro caso.

De este modo, integrando en el recinto de la figura 4.19, se tiene

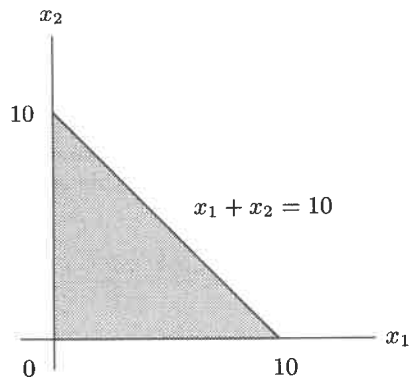


FIG. 4.19.

$$p[X_1 + X_2 < 10] = \int_{x_1=0}^{10} \int_{x_2=0}^{10-x_1} \frac{1}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5}(x_1 + x_2)} \, dx_2 \, dx_1 =$$

$$= -\frac{1}{5} \int_{x_1=0}^{10} \left(e^{-2} - e^{-\frac{1}{5} \cdot x_1} \right) dx_1 = 1 - 3e^{-2} = 0.594 .$$

b) Como el suceso $[X_1 + X_2 = 15]$ tiene probabilidad nula, para hallar la probabilidad del suceso $[X_1 > 10]$ condicionada por $[X_1 + X_2 = 15]$, hay que obtener la función de densidad condicionada $f_{(X_1 \mid X_1 + X_2 = 15)}$.

Sea la transformación $U = X_1 + X_2$ y $V = X_1$, entonces,

$$f_{(V \mid U=u)}(v) = \frac{f_{(U,V)}(u, v)}{f_U(u)} .$$

Calculemos $f_{(U,V)}$ y f_U, teniendo en cuenta que la transformación anterior y su inversa

$$X_1 = V \qquad X_2 = U - V$$

cumplen las condiciones del teorema del cambio de variable, siendo el jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \, .$$

Entonces,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X_1,X_2)}(x_1(u,v), x_2(u,v)) \cdot |J| = \begin{cases} \frac{1}{25} \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot u} & 0 < v < u \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La función de densidad marginal de la variable U es

$$f_U(u) = \int_{v=0}^{u} \frac{1}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot u} \, dv = \frac{u}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot u} \, ,$$

si $u > 0$, y es igual a cero, si $u \leq 0$.

Así, para valores positivos de u,

$$f_{(V \mid U=u)}(v) = \frac{\frac{1}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot u}}{\frac{u}{25} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot u}} = \frac{1}{u} \qquad 0 < v < u \, ,$$

siendo nula en el resto de los casos. Por tanto, para $U = X_1 + X_2 = 15$:

$$f_{(V \mid U=15)}(v) = \frac{1}{15} \qquad 0 < v < 15 \, ,$$

con lo cual, la probabilidad pedida es

$$p[X_1 > 10 \mid X_1 + X_2 = 15] = \int_{v=10}^{15} \frac{1}{15} = \frac{1}{3} \, .$$

Ejercicio 4.34.

Puesto que tanto Y_1 como Y_2 pueden tomar los valores 0, 1 y 2, la variable (Y_1, Y_2) toma, en principio, los valores (y_1, y_2), donde $y_1 = 0, 1, 2$, $y_2 = 0, 1, 2$. Calculemos la función de probabilidad conjunta para cada par de valores. Dado que las variables X_1 y X_2 sólo toman los valores 1 y 2, es evidente que $Y_1 + Y_2$ tiene que ser 2. Por tanto, los pares de puntos, (y_1, y_2) tales que $y_1 + y_2 \neq 2$ tienen probabilidad nula. En el resto de los casos:

$$p[Y_1 = 0, Y_2 = 2] = p[X_1 = 2, X_2 = 2] = p[X_1 = 2] \cdot p[X_2 = 2] = (1-p)^2 \, ,$$

$$p[Y_1 = 1, Y_2 = 1] = p[X_1 = 1, X_2 = 2] + p[X_1 = 2, X_2 = 1] =$$

$$= p[X_1 = 1] \cdot p[X_2 = 2] + p[X_1 = 2] \cdot p[X_2 = 1] = 2p(1-p) \quad \text{y}$$

$$p[Y_1 = 2, Y_2 = 0] = p[X_1 = 1, X_2 = 1] = p[X_1 = 1] \cdot p[X_2 = 1] = p^2 \, .$$

Ejercicio 4.35.

a) Calculemos la probabilidad del suceso $[X = 2]$ condicionada por la ocurrencia del suceso $[Y = 2]$:

$$p[X = 2 \mid Y = 2] = \frac{p[X = 2, Y = 2]}{p[Y = 2]} .$$

La función de probabilidad conjunta permite obtener directamente el numerador:

$$p[X = 2, Y = 2] = \frac{1}{8} .$$

El denominador es la función de probabilidad marginal de la variable Y en el punto 2:

$$\begin{aligned} p[Y = 2] &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} p[X = x_i, Y = 2] = \\ &= p[X = 0, Y = 2] + p[X = 1, Y = 2] + p[X = 2, Y = 2] + p[X = 3, Y = 2] = \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} . \end{aligned}$$

Así,

$$p[X = 2 \mid Y = 2] = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2} .$$

b) El *número de libros de autores no hispanos* es $Y - X$, con lo cual

$$\begin{aligned} p[Y - X = 1] &= p[Y = 1, X = 0] + p[Y = 2, X = 1] + p[Y = 3, X = 2] = \\ &= \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8} = 0.375 , \end{aligned}$$

es decir, el 37,5 % de los individuos compra a la semana un libro de autores no hispanos.

c) Sea Y_i la variable aleatoria que designa el *número de libros que un individuo compra* en la semana i-ésima ($i = 1, 2$). Según esto,

$$\begin{aligned} p[Y_1 + Y_2 > 3] &= 1 - p[Y_1 + Y_2 \leq 3] = \\ &= 1 - p[Y_1 + Y_2 = 0] - p[Y_1 + Y_2 = 1] - p[Y_1 + Y_2 = 2] - p[Y_1 + Y_2 = 3] . \end{aligned}$$

Hallemos cada una de estas probabilidades, considerando la independencia y la igualdad de distribución entre las variables Y_1 e Y_2.

$$p[Y_1+Y_2=0] = p[Y_1=0,Y_2=0] = p[Y_1=0]\cdot p[Y_2=0] = \left(\frac{2}{8}\right)^2 = \tfrac{1}{16}\,,$$

$$p[Y_1+Y_2=1] = p[Y_1=0,Y_2=1]+p[Y_1=1,Y_2=0] = 2p[Y_1=0,Y_2=1] =$$

$$= 2p[Y_1=0]\cdot p[Y_2=1] = 2\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}\,,$$

$$p[Y_1+Y_2=2] = p[Y_1=0,Y_2=2]+p[Y_1=1,Y_2=1]+p[Y_1=2,Y_2=0] =$$

$$= \frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{17}{64} \qquad \text{y}$$

$$p[Y_1+Y_2=3] = p[Y_1=0,Y_2=3]+p[Y_1=1,Y_2=2]+$$
$$+p[Y_1=2,Y_2=1]+p[Y_1=3,Y_2=0] =$$

$$= 2\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{8}+2\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,.$$

Por consiguiente,

$$p[Y_1+Y_2>3] = 1-\left(\frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{17}{64}+\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{64} = 0.234\,.$$

Ejercicio 4.36.

a) Teniendo en cuenta que

$$p[X=x_i] = \sum_{j=i}^{\infty} p[X=x_i, Y=y_j]\,,$$

para todo x_i, y

$$p[Y=y_j] = \sum_{i=1}^{\infty} p[X=x_i, Y=y_j]\,,$$

para todo y_j, se obtiene

X	0	1	2
$p[X=x_i]$	0.2	0.3	0.5

y, análogamente,

Y	1	2
$p[Y=y_j]$	0.4	0.6

Las funciones de distribución de las variables X e Y se deducen sin dificultad de las funciones de probabilidad marginales. Así, la función de distribución de la variable X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.2 & 0 \leq x < 1 \\ 0.5 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

y la de Y,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 0.4 & 1 \leq y < 2 \\ 1 & y \geq 2 \end{cases}$$

b) Para calcular, por ejemplo, la función de probabilidad de la variable Y condicionada a que X tome el valor 2, esto es, la probabilidad de que Y tome el valor y sabiendo que ha ocurrido el suceso $[X = 2]$, apliquemos la definición de probabilidad condicionada:

$$p[Y = y \mid X = 2] = \frac{p[X = 2, Y = y]}{p[X = 2]} .$$

Como sabemos, el denominador es igual a 0.5; el numerador se obtiene de la tabla de doble entrada. En definitiva,

$$p[Y = y \mid X = 2] = \begin{cases} \dfrac{0.05}{0.5} = 0.1 & y = 1 \\ \dfrac{0.45}{0.5} = 0.9 & y = 2 \end{cases}$$

De modo análogo se hallaría la distribución de Y condicionada a que X tome el valor 0 y la distribución de Y condicionada a que X tome el valor 1. Las columnas de la siguiente tabla de doble entrada resumen las distribuciones de Y condicionadas por los distintos valores de X:

	$p[Y = y \mid X = x]$		
Y	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$
1	0.25	1	0.1
2	0.75	0	0.9

c) La probabilidad condicionada

$$p[Y = 2 \mid X \leq 1] = \frac{p[X \leq 1, Y = 2]}{p[X \leq 1]}$$

se obtiene calculando

$$p[X \leq 1, Y = 2] = p[X = 0, Y = 2] + p[X = 1, Y = 2] = 0.15 + 0 = 0.15$$

y

$$p[X \leq 1] = p[X = 0] + p[X = 1] = 0.2 + 0.3 = 0.5 ,$$

con lo cual

$$p[Y = 2 \mid X \leq 1] = \frac{0.15}{0.5} = 0.3 .$$

Como X e Y toman como máximo el valor 2,

$$\begin{aligned} p[X + Y > 2] &= p[X + Y = 3] + p[X + Y = 4] = \\ &= p[X = 1, Y = 2] + p[X = 2, Y = 1] + p[X = 2, Y = 2] = \\ &= 0 + 0.05 + 0.45 = 0.5 . \end{aligned}$$

La definición de probabilidad condicionada permite escribir

$$p[0 < X \leq 2 \mid Y = 1] = \frac{p[0 < X \leq 2, Y = 1]}{p[Y = 1]} .$$

El numerador es igual a

$$p[0 < X \leq 2, Y = 1] = p[X = 1, Y = 1] + p[X = 2, Y = 1] = 0.3 + 0.05 = 0.35 ,$$

y la probabilidad del suceso $[Y = 1]$ es 0.4. Por tanto,

$$p[0 < X \leq 2 \mid Y = 1] = \frac{0.35}{0.4} = 0.875 .$$

Por último,

$$p[X \cdot Y \leq 1] = p[X \cdot Y = 0] + p[X \cdot Y = 1] .$$

Pero,

$$p[X \cdot Y = 0] = p[X = 0, Y = 1] + p[X = 0, Y = 2] = 0.05 + 0.15 = 0.2$$

y

$$p[X \cdot Y = 1] = p[X = 1, Y = 1] = 0.3 .$$

En consecuencia,

$$p[X \cdot Y \leq 1] = 0.2 + 0.3 = 0.5 .$$

d) Las variables X e Y no son independientes, ya que, por ejemplo,

$$p[X = 1, Y = 2] = 0 \neq 0.3 \cdot 0.6 = p[X = 1] \cdot p[Y = 2] .$$

Bastaría para llegar a esta conclusión la constatación de que las filas (o las columnas) de la tabla de doble entrada no son proporcionales.

e) La variable $U = X + Y$ toma los valores 1, 2, 3, 4 y la variable $V = \text{máx}\,(X, Y)$ los valores 1 y 2. Esto conduce a que, en principio, la variable (U, V) toma los pares de valores (u, v), donde $u = 1, 2, 3, 4$ y $v = 1, 2$. Calculemos la función de probabilidad conjunta; así, por ejemplo,

$$p[U = 1, V = 1] = p[X + Y = 1, \text{máx}\,(X, Y) = 1] = p[X = 0, Y = 1] = 0.05 ,$$

$$p[U = 1, V = 2] = 0$$

o bien,

$$p[U = 3, V = 2] = p[X + Y = 3, \text{máx}\,(X, Y) = 2] =$$

$$= p[X = 2, Y = 1] + p[X = 1, Y = 2] = 0.05 + 0 = 0.05 .$$

La distribución conjunta queda descrita en la siguiente tabla de doble entrada:

$U \setminus V$	1	2	
1	0.05	0	0.05
2	0.3	0.15	0.45
3	0	0.05	0.05
4	0	0.45	0.45
	0.35	0.65	

donde la última columna y la última fila representan las funciones de probabilidad marginales de las variables U y V, respectivamente.

Ejercicio 4.37.

a) Puesto que la variable X representa la *cantidad de mercancía almacenada a principios de mes*, e Y la *cantidad que de ella se vende durante el mes*, la variable $U = X - Y$ es *el peso de la mercancía que queda almacenada al final de mes*. Para hallar la distribución de la variable U hay dos posibles procedimientos. Uno de ellos consiste en utilizar el teorema del cambio de variable, puesto que la transformación

$$U = X - Y \qquad V = X$$

y su inversa

$$X = V \qquad Y = V - U$$

cumplen las condiciones exigidas. El jacobiano es

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Por tanto, la función de densidad de la variable bidimensional (U,V) vale

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J| = \begin{cases} \dfrac{1}{10v} & 0 < u < v < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Advierta el lector que la variable bidimensional (U,V) tiene la misma distribución que la variable (X,Y). Mediante la función de densidad conjunta se calcula la función de densidad marginal de la variable U:

$$f_U(u) = \int_{v=u}^{10} \frac{1}{10v}\, dv = \frac{1}{10}(\ln 10 - \ln u) ,$$

cuando $0 < u < 10$, siendo nula en el resto de los casos.

El segundo procedimiento para resolver este apartado consiste en hallar primeramente la función de distribución de U. Dado que

$$F_U(u) = p[U \leq u] = p[X - Y \leq u] ,$$

pueden obtenerse los valores de dicha función, sin más que integrar la función de densidad del par (X,Y) en las correspondientes regiones del plano.

Obviamente, según puede comprobar el lector, derivando la función de distribución obtenida se llega a la misma función de densidad.

b) Para obtener la probabilidad del suceso $[X > 8, Y < 4]$ integremos la función de densidad de la variable (X,Y) en el recinto rayado de la figura 4.20.

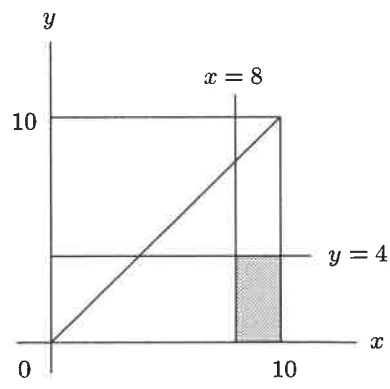


FIG. 4.20.

Así,

$$p[X > 8, Y < 4] = \int_{x=8}^{10} \int_{y=0}^{4} \frac{1}{10x}\, dy\, dx = \frac{2}{5} \int_{x=8}^{10} \frac{1}{x}\, dx = 0.0893 .$$

Es decir, el 8.93 % de los meses la mercancía almacenada a primeros de mes es superior a ocho toneladas y las ventas inferiores a cuatro.

c) Hallemos la probabilidad del suceso $[X - Y > 3]$ condicionada por la ocurrencia del suceso $[Y \leq 5]$, aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$p[X - Y > 3 \mid Y \leq 5] = \frac{p[X - Y > 3, Y \leq 5]}{p[Y \leq 5]} .$$

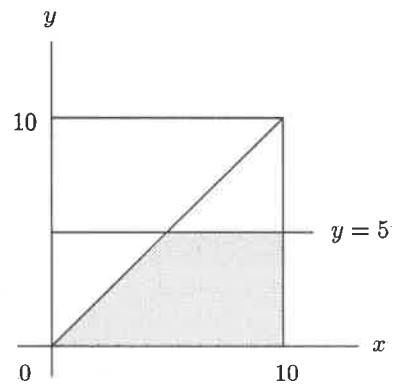


FIG. 4.21.

Integrando la función de densidad conjunta en el recinto rayado de la figura 4.21 se obtiene la probabilidad del suceso $[Y \leq 5]$:

$$p[Y \leq 5] = \int_{y=0}^{5} \int_{x=y}^{10} \frac{1}{10}\, dx\, dy = \frac{1}{10} \left(\int_{y=0}^{5} \ln 10\, dy - \int_{y=0}^{5} \ln y\, dy \right) =$$

$$= \frac{1 + \ln 2}{2} = 0.847 ,$$

resolviéndose $\int \ln y\, dy$ mediante la aplicación del método de integración *por partes*. En cuanto al numerador, la figura 4.22 representa el recinto de integración de la función de densidad conjunta.

Así,

$$p[X-Y>3, Y\leq 5] = \int_{y=0}^{5}\int_{x=y+3}^{10}\frac{1}{10x}\,dx\,dy = \\ = \frac{1}{10}\left[\int_{y=0}^{5}\ln 10\,dy - \int_{y=0}^{5}\ln(y+3)\,dy\right] = 0.317\,,$$

donde la segunda integral se calcula realizando el cambio de variable $y+3=t$ e integrando *por partes*.

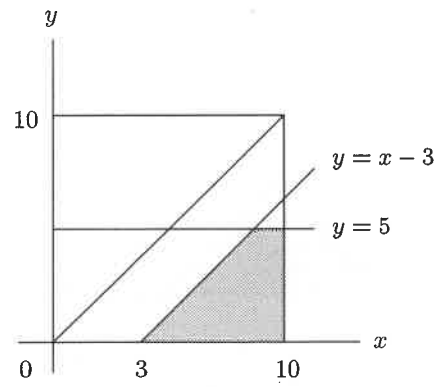


FIG. 4.22.

En definitiva,

$$p[X-Y>3 \mid Y\leq 5] = \frac{0.317}{0.847} = 0.375\,.$$

Ejercicio 4.38.

a) Puesto que ha de cumplirse que $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ y, en este caso, $f(x,y)>0$ en la zona rayada de la figura 4.23, se tiene que

$$1 = k\int_{y=0}^{25}\int_{x=y}^{50-y} dx\,dy = k\int_{y=0}^{25}(50-2y)\,dy = 625\cdot k\,,$$

esto es, $k=\frac{1}{625}$.

Observe el lector que, dado que f es constante, k podría haberse hallado también geométricamente, teniendo en cuenta que

$$1 = k\times \text{Área del recinto rayado} = k\cdot\frac{50\cdot 25}{2} = k\cdot 625\,,$$

de donde se obtendría nuevamente $k=\frac{1}{625}$.

b) Integrando la función de densidad conjunta del par (X, Y) respecto de x se tiene la función de densidad marginal de la variable Y:

$$f_Y(y) = \int_{x=y}^{50-y} \frac{1}{625}\, dx = \frac{1}{625}\,(50 - 2y)\,,$$

siempre que y tome valores entre 0 y 25, siendo nula en el resto de los casos.

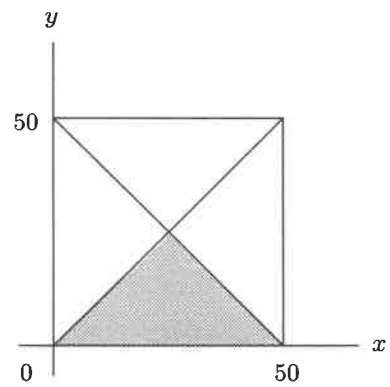


FIG. 4.23.

A la hora de hallar la función de densidad marginal de la variable X que, tal y como vemos en la figura 4.23, toma valores entre 0 y 50, hemos de tener en cuenta que la variable Y tiene diferente campo de variación según la variable X tome valores entre 0 y 25 o entre 25 y 50; este hecho determina que

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{x} \frac{1}{625}\, dy = \frac{x}{625}\,,$$

si $0 < x < 25$, y

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{50-x} \frac{1}{625}\, dy = \frac{50 - x}{625}\,,$$

si $25 \leq x < 50$, siendo nula en el resto de los casos.

c) Aplicando la definición de función de densidad condicionada, se deduce que, para $0 < y < 25$,

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/625}{(50 - 2y)/625} = \frac{1}{50 - 2y}\,,$$

cuando $y < x < 50 - y$, anulándose en el resto de valores de x. Análogamente, para $0 < x < 25$,

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1/625}{x/625} = \dfrac{1}{x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y, para $25 \leq x < 50$,

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1/625}{(50-x)/625} = \dfrac{1}{50-x} & 0 < y < 50 - x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

d) Para obtener la función de distribución de la variable $Z = 100 - (X + Y) = 100 - X - Y$, se puede utilizar el teorema del cambio de variable, o bien calcular directamente su función de distribución.

El primer procedimiento requiere considerar la transformación

$$Z = 100 - X - Y \qquad V = X$$

y su inversa

$$X = V \qquad Y = 100 - V - Z\ ,$$

con determinante jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(z,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\ .$$

Por consiguiente,

$$f_{(Z,V)}(z,v) = f_{(X,Y)}(x(z,v), y(z,v)) \cdot |J| = \frac{1}{625}\ ,$$

siempre que $0 \leq y \leq x$ y $x + y \leq 50$, es decir, siempre que $0 \leq 100 - z - v \leq v$, $v + 100 - z - v \leq 50$; despejando z y v, se obtiene el recinto transformado $v \geq \frac{100-z}{2}$, $v \leq 100 - z$ y $z \geq 50$ (véase la figura 4.24).

Para hallar la función de densidad marginal de la variable Z cuando toma valores entre 50 y 100, hay que integrar la función de densidad del par (Z, V) respecto de v:

$$f_Z(z) = \int_{v=\frac{100-z}{2}}^{100-z} \frac{1}{625}\, dv = \frac{100 - z}{1\,250}\ ,$$

siendo nula para el resto de valores de z.

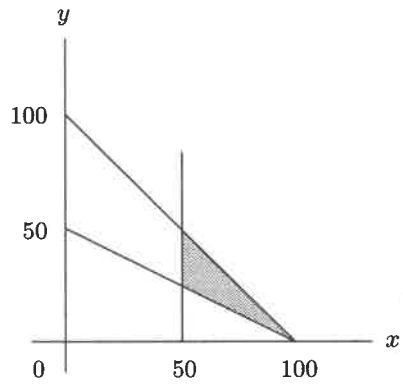


FIG. 4.24.

En cuanto a la función de distribución de la variable Z, vale cero para $z \leq 50$, y 1 para $z \geq 100$, mientras que, si $50 < z < 100$,

$$F_Z(z) = \int_{t=50}^{z} \frac{100 - t}{1\,250}\, dt = \frac{1}{625}\left(50z - \frac{z^2}{4} - 1\,875\right) .$$

El segundo procedimiento para resolver este apartado consiste en hallar, en primer lugar, la función de distribución de la variable Z. Como

$$F_Z(z) = p[Z \leq z] = p[100 - X - Y \leq z] = p[X + Y \geq 100 - z] ,$$

es posible calcular los valores de esta función de distribución integrando la función de densidad conjunta de X e Y en los recintos del plano adecuados. Puede comprobar el lector que se llega a idéntico resultado.

Una vez obtenida la función de distribución, se hallaría la de densidad derivándola.

Ejercicio 4.39.

La figura 4.25 representa el recinto en el cual $f_{(X,Y)}$ es no nula, esto es, los valores de la variable (X, Y). Observe el lector que, si $0 \leq x \leq 1$, entonces, $\text{máx}\,(0, x - 1) = 0$ y $\text{mín}\,(1, x) = x$, con lo cual, $0 \leq y \leq x$. Por el contrario, si $1 \leq x \leq 2$, entonces, $\text{máx}\,(0, x - 1) = x - 1$ y $\text{mín}\,(1, x) = 1$, esto es, $x - 1 \leq y \leq 1$. La transformación

$$U = X - Y \qquad Y = V$$

y su inversa

$$X = U + V \qquad Y = V$$

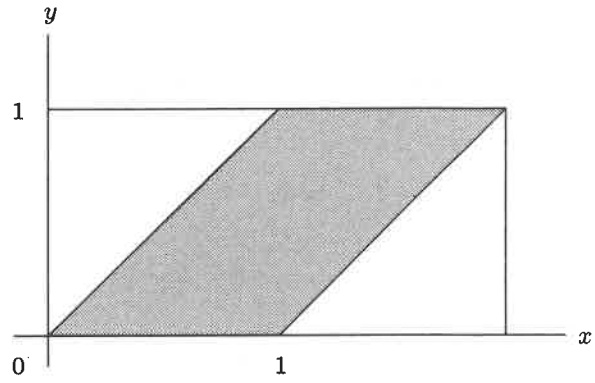


FIG. 4.25.

cumplen las condiciones exigidas para poder aplicar el teorema del cambio de variable, siendo el determinante jacobiano:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

Téngase en cuenta que, cuando $0 \leq y \leq 1$, la variable x se mueve entre y e $y+1$, por tanto el campo de variación de (U,V) es el recinto $0 \leq v \leq 1$, $v \leq u+v \leq v+1$ o, equivalentemente, $0 \leq u \leq 1$. En definitiva,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J| = \begin{cases} 1 & 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto, la función de densidad marginal de la variable U es

$$f_U(u) = \int_{v=0}^{1} 1 \, dv = 1 ,$$

si $0 \leq u \leq 1$, siendo igual a cero para el resto de valores de u.

Integrando respecto de u se deduce la función de densidad marginal de la variable $V = Y$:

$$f_V(v) = \int_{u=0}^{1} 1 \, du = 1 \qquad 0 \leq v \leq 1 ,$$

anulándose en el resto de los casos.

Por tanto, para todo par $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, se cumple

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u) \cdot f_V(v) ,$$

con lo que las variables U y $V = Y$ son independientes.

Ejercicio 4.40.

a) Para hallar $p[X > 0.7]$ se puede, o bien calcular la función de densidad marginal de la variable X, o bien integrar directamente $f_{(X,Y)}$ en el recinto correspondiente. Con el primer procedimiento:

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1-x} 6x\, dy = 6x(1-x)\,,$$

si $0 < x < 1$ y $f_X(x) = 0$ para el resto de valores de x. Por tanto,

$$p[X > 0.7] = 1 - p[X \leq 0.7] = 1 - \int_{x=0}^{0.7} 6x(1-x)\, dx = \frac{27}{125} = 0.216\,.$$

El segundo procedimiento requiere integrar $f_{(X,Y)}$ en el recinto rayado de la figura 4.26.

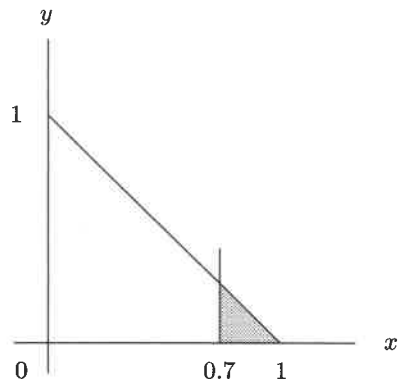


FIG. 4.26.

Así,

$$p[X > 0.7] = \int_{x=0.7}^{1} \int_{y=0}^{1-x} 6x\, dy\, dx = \int_{x=0.7}^{1} 6x(1-x)\, dx = 0.216\,.$$

Obsérvese que los dos procedimientos sólo difieren formalmente, ya que los cálculos implicados en ambos son idénticos.

b) La probabilidad buscada es $p[X < Y]$. Integrando $f_{(X,Y)}$ en la zona representada en la figura 4.27, se obtiene

$$p[X < Y] = \int_{x=0}^{1/2} \int_{y=x}^{1-x} 6x\, dy\, dx = 6 \int_{x=0}^{1/2} x(1-2x)\, dx = 0.25\,.$$

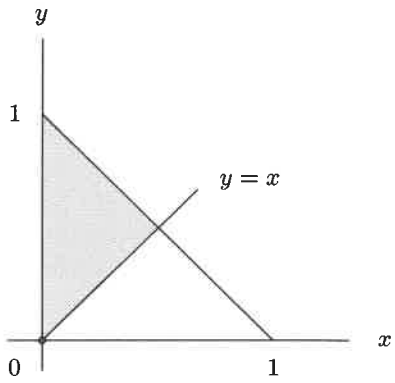


FIG. 4.27.

c) Denotando por $U = 100(X+Y)$ el *porcentaje de llamadas urbanas e interurbanas*, la transformación

$$U = 100(X+Y) \qquad V = 100X$$

y su inversa

$$X = \frac{V}{100} \qquad Y = \frac{U-V}{100}$$

cumplen las condiciones necesarias para aplicar el teorema del cambio de variable. El jacobiano es

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} & -\frac{1}{100} \end{vmatrix} = -\frac{1}{100^2} .$$

Por tanto,

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J| = 6 \cdot \frac{v}{100} \cdot \frac{1}{100^2} = \frac{6v}{100^3} ,$$

en el recinto transformado de $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $x+y \leq 1$, esto es, en $v \geq 0$, $u - v \geq 0$ y $v + u - v \leq 100$ o, equivalentemente,

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{6v}{100^3} \qquad 0 \leq v \leq u \leq 100 ,$$

anulándose en el resto de valores.

De la función de densidad de la variable bidimensional (U, V) se deduce que la función de densidad marginal de la variable U es

$$f_U(u) = \int_{v=0}^{u} \frac{6v}{100^3}\, dv = \frac{3}{100^3} \cdot u^2 ,$$

cuando $0 \leq u \leq 100$, siendo nula en el resto de los casos.

d) La *proporción de llamadas al extranjero* es $1 - (X + Y)$ o, equivalentemente, el *porcentaje de las mismas* es $Z = 100 - 100(X+Y) = 100 - U$. De este modo, la probabilidad pedida puede calcularse utilizando la función de densidad marginal de la variable U:

$$p[100 - U > 20] = p[U < 80] = \int_{u=0}^{80} \frac{3}{100^3} \cdot u^2\, du = 0.512 .$$

Es decir, el 51,2 % de los meses la proporción de llamadas al extranjero de una cierta familia es superior a 0.2.

e) Si una familia no ha tenido llamadas al extranjero se cumple que $X + Y = 1$ o, con las notaciones del apartado *c*), $U = 100(X + Y) = 100$. Para calcular

$$p[100X \geq 60 \mid U = 100] = p[V \geq 60 \mid U = 100]$$

es necesario conocer $f_{(V \mid U=100)}$. Ahora bien, para $0 < u \leq 100$,

$$f_{(V \mid U=u)}(v) = \frac{f_{(U,V)}(u, v)}{f_U(u)} = \frac{6v/100^3}{3u^2/100^3} = \frac{2v}{u^2} ,$$

cuando $0 \leq v \leq u$, siendo nula en el resto de los casos. En particular,

$$f_{(V \mid U=100)}(v) = \frac{2v}{100^2} \qquad 0 \leq v \leq 100 ,$$

anulándose en el resto de los casos. De este modo,

$$p[V \geq 60 \mid U = 100] = \int_{v=60}^{100} \frac{2v}{100^2}\, dv = 0.64 .$$

Ejercicio 4.41.
a) Dado que $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy$ ha de ser igual a la unidad:

$$1 = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} kxy\, dy\, dx = k \int_{x=0}^{1} \frac{x}{2} (1 - x)^2\, dx = \frac{k}{24} ,$$

de lo cual se deduce que k es igual a 24.

b) Integrando $f_{(X,Y)}$ respecto de Y se obtiene la función de densidad marginal de la variable Y:

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{1-y} 24xy\, dx = 12y(1 - y)^2 ,$$

cuando $0 < y < 1$ y $f_Y(y) = 0$ en el resto de valores.

Análogamente, la función de densidad marginal de la variable X es

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1-x} 24xy\,dy = 12x(1-x)^2 ,$$

si $0 < x < 1$ y es igual a cero en el resto.

Por tanto, las variables X e Y están igualmente distribuidas.

Obtengamos su función de distribución. A la vista de la función de densidad de X, $F_X(x)$ se anula, si x es negativo, y es igual a la unidad, para valores de x mayores que uno; si $0 < x < 1$, entonces,

$$F_X(x) = p[X \leq x] = \int_{t=0}^{x} 12t(1-t)^2\,dt = x^2(6 - 8x + 3x^2) .$$

La función de distribución de la variable Y coincide con la de X, sin más que cambiar x por y, ya que las variables están igualmente distribuidas.

c) Para $0 < x < 1$, la función de densidad de la variable Y condicionada por $X = x$ es

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{24xy}{12x(1-x)^2} = \frac{2y}{(1-x)^2} \qquad 0 < y < 1 - x ,$$

siendo nula en el resto.

Como las variables X e Y tienen idéntica distribución, para $0 < y < 1$ la función de densidad de X condicionada por $Y = y$ es

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{2x}{(1-y)^2} \qquad 0 < x < 1 - y ,$$

anulándose en otro caso.

La función de densidad condicionada $f_{(X \mid Y<1/2)}$ es la derivada de la función de distribución $F_{(X \mid Y<1/2)}$. Ahora bien,

$$F_{(X \mid Y<1/2)}(x) = p[X \leq x \mid Y < 1/2] = \frac{p[X \leq x, Y < 1/2]}{p[Y < 1/2]} .$$

El denominador se calcula con la función de densidad de la variable Y:

$$p[Y < 1/2] = \int_0^{\frac{1}{2}} 12y(1-y)^2\,dy = \frac{11}{16} .$$

El numerador, para $0 < x < 1/2$, se halla integrando $f_{(X,Y)}$ en el recinto rayado de la figura 4.28.

Así,

$$p[X \leq x, Y < 1/2] = \int_{s=0}^{x} \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} 24st\,dt\,ds = 3\int_{s=0}^{x} s\,ds = \frac{3}{2} \cdot x^2 .$$

Si, por el contrario, $1/2 \leq x < 1$ (véase la figura 4.29),

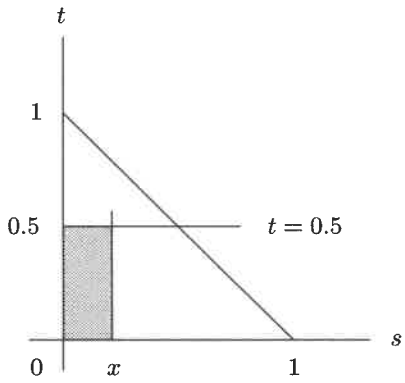


FIG. 4.28.

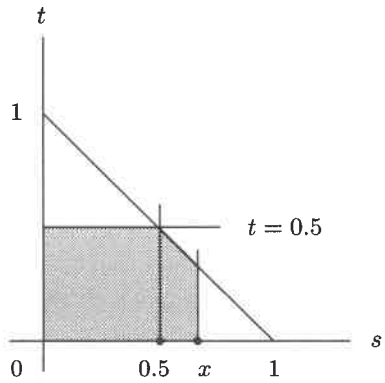


FIG. 4.29.

$$p[X \leq x, Y < 1/2] = \int_{s=0}^{\frac{1}{2}} \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} 24st\, dt\, ds + \int_{s=\frac{1}{2}}^{x} \int_{t=0}^{1-s} 24st\, dt\, ds =$$

$$= 3 \int_{s=0}^{\frac{1}{2}} s\, ds + 12 \int_{s=\frac{1}{2}}^{x} s(1-s)^2\, ds =$$

$$= 6x^2 - 8x^3 + 3x^4 - \tfrac{5}{16} .$$

En resumen:

$$p[X \leq x, Y < 1/2] = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{3}{2} \cdot x^2 & 0 < x < 1/2 \\ 6x^2 - 8x^3 + 3x^4 - \dfrac{5}{16} & 1/2 \leq x < 1 \\ p[Y < 1/2] = \dfrac{11}{16} & x \geq 1 \end{cases}$$

y, dividiendo por $p[Y < 1/2] = 11/16$, se tiene:

$$F_{(X \mid Y<1/2)}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{24}{11} \cdot x^2 & 0 < x < 1/2 \\ \dfrac{16}{11}\left(6x^2 - 8x^3 + 3x^4 - \dfrac{5}{16}\right) & 1/2 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

La función de densidad condicionada pedida en el ejercicio se obtiene derivando respecto de x la anterior función de distribución:

$$f_{(X \mid Y<1/2)}(x) = \begin{cases} \dfrac{48}{11} \cdot x & 0 < x < 1/2 \\ \dfrac{192}{11} \cdot x(1-x)^2 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Finalmente, la función de densidad condicionada $f_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}$ se halla a partir de la función de distribución

$$F_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}(y) = \frac{p[Y \leq y, 0.5 < X < 0.7]}{p[0.5 < X < 0.7]} .$$

Utilizando la función de densidad marginal de la variable X, se calcula el denominador:

$$p[0.5 < X < 0.7] = \int_{x=0.5}^{0.7} 12x(1-x)^2 \, dx = \frac{143}{625} = 0.229 .$$

También podría haberse calculado esta probabilidad con la función de distribución de la variable X hallada en el apartado b):

$$p[0.5 < X < 0.7] = F_X(0.7) - F_X(0.5) .$$

Por lo que se refiere al numerador, si $0 < y < 0.3$ (véase la figura 4.30), entonces,

$$p[Y \leq y, 0.5 < X < 0.7] = \int_{s=0.5}^{0.7} \int_{t=0}^{y} 24st \, dt \, ds = 12 \int_{s=0.5}^{0.7} sy^2 \, ds = \frac{36}{25} \cdot y^2 .$$

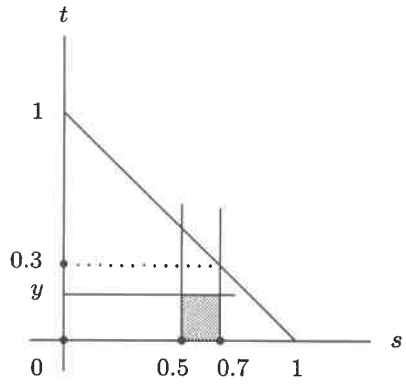


FIG. 4.30.

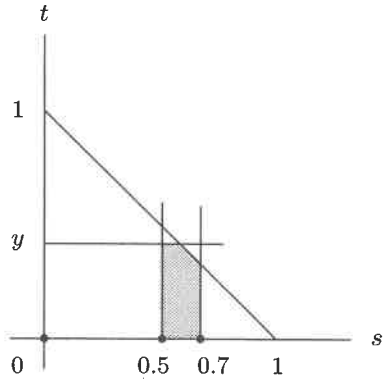


FIG. 4.31.

Si $0.3 \leq y < 0.5$ (véase la figura 4.31),

$$p[Y \leq y, 0.5 < X < 0.7] = p[0.5 < X < 0.7] - p[Y \geq y, 0.5 < X < 0.7] =$$

$$= \frac{143}{125} - \int_{s=0.5}^{1-y} \int_{t=y}^{1-s} 24st\, dt\, ds =$$

$$= \frac{143}{125} - 12\left[\int_{s=0.5}^{1-y} s(1-s)^2\, ds - \int_{s=0.5}^{1-y} sy^2\, ds\right] =$$

$$= 3y^4 - 8y^3 + \tfrac{9}{2} \cdot y^2 - \tfrac{837}{10\,000}\,.$$

Por último, si $y \geq 0.5$, se cumple que

$$p[Y \leq y, 0.5 < X < 0.7] = p[0.5 < X < 0.7] = 0.229 .$$

En resumen, $F_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}(y) = 0$, si $y \leq 0$; cuando $0 < y < 0.3$, entonces,

$$F_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}(y) = \frac{36y^2/25}{143/625} = \frac{900}{143} \cdot y^2 ;$$

para $0.3 \leq y < 0.5$,

$$F_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}(y) = \frac{625}{143}\left(3y^4 - 8y^3 + \frac{9}{2} \cdot y^2 - \frac{837}{10\,000}\right)$$

y $F_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}(y) = 1$, si $y \geq 0.5$.

Derivando respecto de y y haciendo las oportunas operaciones resulta

$$f_{(Y \mid 0.5<X<0.7)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1\,800}{143} \cdot y & 0 < y < 0.3 \\ \dfrac{1\,857y}{143}(4y^2 - 8y + 3) & 0.3 \leq y < 0.5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

d) Integrando en el recinto rayado de la figura 4.32 hallamos

$$p[X \geq Y] = \int_{y=0}^{1/2} \int_{x=y}^{1-y} 24xy \, dx \, dy = 12 \int_{y=0}^{1/2} (y - 2y^2) \, dy = \frac{1}{2} .$$

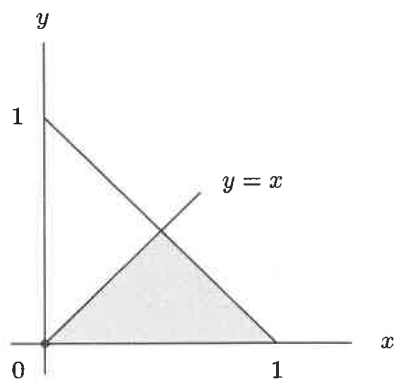


FIG. 4.32.

Aplicando la definición de probabilidad condicionada:

$$p[X \geq 1/2 \mid X + Y \leq 3/4] = \frac{p[X \geq 1/2, X + Y \leq 3/4]}{p[X + Y \leq 3/4]} .$$

Ahora bien, para obtener el denominador hay que integrar en el recinto de la figura 4.33, resultando

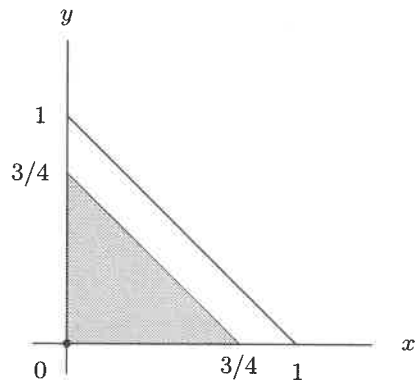


FIG. 4.33.

$$p[X + Y \leq 3/4] = \int_{x=0}^{\frac{3}{4}} \int_{y=0}^{\frac{3}{4}-x} 24xy \, dy \, dx =$$

$$= 12 \int_{x=0}^{\frac{3}{4}} x \left(\frac{3}{4} - x\right)^2 dx = \frac{81}{256} = 0.316 .$$

En cuanto al numerador (véase la figura 4.34), se obtiene

$$p[X \geq 1/2, X + Y \leq 3/4] = p[X + Y \leq 3/4] - p[X \leq 1/2, X + Y \leq 3/4] =$$

$$= \frac{81}{256} - \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \int_{y=0}^{\frac{3}{4}-x} 24xy \, dy \, dx =$$

$$= \frac{81}{256} - 12 \int_{x=0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{9}{16} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + x^3\right) dx =$$

$$= \frac{81}{256} - \frac{9}{32} = \frac{9}{256} = 0.035 .$$

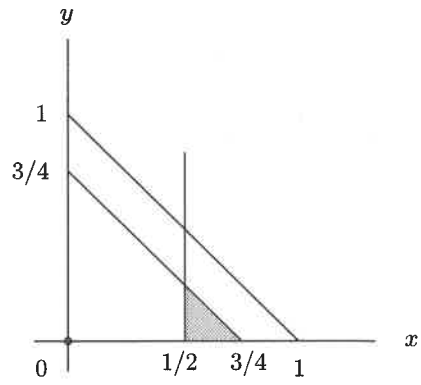


FIG. 4.34.

En definitiva,

$$p[X \geq 1/2 \mid X + Y \leq 3/4] = \frac{9/256}{81/256} = \frac{1}{9} = 0.111 .$$

Por lo que respecta a la última probabilidad pedida, $p[X^2 + Y^2 \leq 1]$, es obvio que resulta igual a la unidad, ya que el conjunto de pares de puntos donde la función de densidad es no nula, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ está contenido en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

e) Como $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$, las variables X e Y no son independientes. Por ejemplo, $f_X(0.7) \cdot f_Y(0.7) = 12 \cdot 0.7^2 \cdot 0.3^4 = 0.048$, mientras que $f_{(X,Y)}(0.7, 0.7) = 0$.

f) Son muchos los subconjuntos del plano que cumplen la condición exigida. Los más sencillos son del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq x_0, y \leq y_0\}$. Busquemos, entonces, dos valores x_0 e y_0 tales que

$$p[X \leq x_0, Y \leq y_0] = \frac{3}{4} .$$

Como

$$p[X \leq x_0, Y \leq y_0] = \int_{x=0}^{x_0} \int_{y=0}^{y_0} 24xy \, dy \, dx = 6x_0^2 y_0^2 = \frac{3}{4} ,$$

entonces,

$$x_0^2 y_0^2 = \frac{1}{8} .$$

De entre todas las soluciones que admite esta ecuación, haciendo, por ejemplo, $x_0 = 1/2$ resulta $y_0 = 1/\sqrt{2}$, con lo cual

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq 1/2, y \leq 1/\sqrt{2}\}$$

es un subconjunto del plano tal que $p[(X, Y) \in A] = 3/4$.

g) La transformación inversa es

$$X = \frac{U+V}{2} \qquad Y = \frac{U-V}{2}$$

y el determinante jacobiano

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f_{(X,Y)}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J| = \\ &= 24 \cdot \frac{u+v}{2} \cdot \frac{u-v}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3(u^2 - v^2) , \end{aligned}$$

siempre que (u, v) sea un punto que pertenezca a la región transformada del recinto $\{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, esto es, siempre que $u+v \geq 0$, $u-v \geq 0$ y $\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \leq 1$ o, equivalentemente, $-u \leq v \leq u \leq 1$.

h) Utilicemos la transformación

$$U = X \qquad V = X \cdot Y$$

y su inversa

$$X = U \qquad Y = \frac{V}{U}$$

con determinante jacobiano

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}$$

para obtener

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J| = 24u \cdot \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{u} = 24 \cdot \frac{v}{u} ,$$

si $u \geq 0$, $\frac{v}{u} \geq 0$ y $u + \frac{v}{u} \leq 1$, es decir, si $0 \leq v \leq u - u^2$. Integrando respecto de v la función de densidad obtenida, se deduce la función de densidad de la variable U:

$$f_U(u) = \int_{v=0}^{u-u^2} 24 \cdot \frac{v}{u}\, dv = 12u(1-u)^2 \qquad 0 \leq u \leq 1\,,$$

que coincide con las funciones de densidad de las variables X e Y, esto es, las variables X, Y y U están igualmente distribuidas.

Ejercicio 4.42.
Es obvio que $f_{(U,V)}$ es no negativa para todo punto del plano ya que, o bien es nula, o bien es producto de dos cantidades positivas. Además,

$$\int_{v=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)\, du\, dv = \int\int_D f_{(U,V)}(u,v)\, du\, dv$$

puede escribirse como

$$\int\int_D f_{(X,Y)}(h_1(u,v), h_2(u,v)) \cdot |J|\, du\, dv\,,$$

aplicando la definición de $f_{(U,V)}$. Si en esta última integral se hace, ahora, el cambio de variable $u = g_1(x,y)$ y $v = g_2(x,y)$, como (g_1, g_2) es la transformación inversa de (h_1, h_2) el recinto se transformará en $(h_1, h_2)(D) = \mathbb{R}^2$. Aplicando el teorema del cambio de variable para integrales dobles, la integral anterior resulta ser igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \cdot |J| \cdot |J^*|\, dx\, dy\,,$$

donde $|J^*|$ es el determinante jacobiano de esta nueva transformación, es decir,

$$|J^*| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{|J|}\,.$$

En definitiva,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(U,V)}(u,v)\, du\, dv = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y) \cdot \frac{|J|}{|J|}\, dx\, dy = 1\,.$$

Por tanto, la función $f_{(U,V)}$ cumple las condiciones que caracterizan a la función de densidad de una variable aleatoria bidimensional continua.

Capítulo 5

CARACTERÍSTICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA UNIDIMENSIONAL

Recordemos las principales características que resumen los aspectos más relevantes de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X.

Se llama **esperanza** de X al número

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p[X = x_i] \,,$$

si X es discreta, y

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \,,$$

si X es continua.

Dicho número existe siempre que $E(|X|) < \infty$, es decir, siempre que la serie o la integral anteriores sean absolutamente convergentes. La esperanza de una variable aleatoria, que normalmente designaremos por μ_X, puede considerarse, bajo ciertas condiciones, un resumen global de su distribución de probabilidad.

En general, si $g(X)$ es una variable aleatoria función de X, se llama esperanza de $g(X)$ al número

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot p[X = x_i] \,,$$

si X y, por tanto, $g(X)$ son discretas, y

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx \,,$$

si X y $g(X)$ son continuas.

Enunciemos algunas propiedades de la esperanza:

1. Si $a \leq X \leq b$, la esperanza de X existe y, además, $a \leq E(X) \leq b$.
2. Si $X \geq 0$, la esperanza de X, si existe, también es no negativa.
3. La esperanza de una constante es la propia constante.
4. La esperanza verifica la propiedad de linealidad, es decir,

$$E[a \cdot g(X) + b \cdot h(X)] = a \cdot E[g(X)] + b \cdot E[h(X)] \, .$$

5. Si existe la esperanza de una variable aleatoria X, entonces, $|E(X)| \leq E(|X|)$.
6. Si la función de probabilidad o de densidad de X es simétrica respecto de a, la esperanza, si existe, vale a.

Se llama **momento centrado respecto del origen** de orden k o **momento no central** a

$$\alpha_k = E(X^k) \, ,$$

y **momento centrado respecto de la media** de orden k o **momento central** a

$$\mu_k = E[(X - E(X))^k] = E[(X - \mu)^k] \quad \text{donde} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Un momento importante es el momento central de orden 2, la **varianza** de X,

$$\text{Var } (X) = E[(X - \mu)^2] \, ,$$

que, si X es discreta, vale

$$\text{Var } (X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot p[X = x_i]$$

y si es continua,

$$\text{Var } (X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f_X(x) \, dx \, .$$

La varianza, que también designaremos por σ_X^2, es una medida absoluta de la dispersión de los valores de la variable respecto de su media. Por un lado, valora el grado de dispersión de los valores de una distribución, permitiendo la comparación con otras distribuciones; por otro, da una medida de la representatividad de la esperanza como resumen global de la distribución.

En muchas ocasiones, se considera la raíz cuadrada positiva de la varianza: la **desviación típica** o **desviación estándar**, σ_X.

Algunas de las principales propiedades de la varianza son:

1. Var $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
2. La varianza de una variable es cero si, y sólo si, esta variable es degenerada, es decir, es constante.
3. Var $(a \cdot X + b) = a^2 \cdot$ Var (X).

Para una variable positiva de media μ_X y varianza σ_X^2, una medida relativa de dispersión es el **coeficiente de variación** que se define como

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} .$$

En muchas ocasiones, se mide una misma magnitud en distintas unidades o en distintas situaciones; para poder comparar los resultados obtenidos se debe **tipificar** la variable. Dada una variable X, de media μ_X y varianza σ_X^2, se dice que Z es la variable X tipificada, si

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} ;$$

la variable Z es de media cero y varianza uno.

La esperanza y la varianza son medidas teóricas de posición y dispersión, respectivamente. Pero, aunque son las de uso más generalizado, no son las únicas que pueden utilizarse. Otras medidas de posición son los cuantiles.

Un **cuantil de orden** q $(0 \leq q \leq 1)$ es cualquier valor, x_q, tal que

$$p[X \leq x_q] \geq q \quad \text{y} \quad p[X \geq x_q] \geq 1 - q .$$

Dentro de los cuantiles interesan fundamentalmente aquellos que dividen el total de probabilidad en mitades, cuartas, décimas o centésimas partes, es decir, la **mediana**, los **cuartiles**, los **deciles** y los **percentiles**, respectivamente. La mediana, Me, constituye una buena medida de posición central.

Otra medida de posición central de menor interés es la **moda**, Mo. Se define como el valor de la variable en el que la función de probabilidad o la función de densidad alcanza el máximo absoluto.

En cuanto a otras medidas de dispersión, la más utilizada es

$$d_{Me} = E[|X - Me|] ,$$

denominada **desviación absoluta media respecto a la mediana**.

Por otro lado, a partir de los cuantiles pueden construirse diversas medidas de dispersión. En concreto, el **recorrido intercuartílico** (diferencia entre el extremo superior e inferior del intervalo intercuartílico $[C_1, C_3]$) es

$$R_c = x_{0.75} - x_{0.25} = C_3 - C_1 ,$$

es una medida más conveniente para medir la dispersión que el **recorrido** de la variable,

$$R = \text{máx}\,(X) - \text{mín}\,(X)\,.$$

Las **medidas de forma** se refieren al perfil de la función de probabilidad o de densidad de la variable; en concreto, miden el grado de asimetría y apuntamiento o aplastamiento de dichas funciones. Las dos más utilizadas son el **coeficiente de asimetría**,

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\,,$$

y el **coeficiente de curtosis** o **apuntamiento**,

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\,.$$

Cuando se desconoce la distribución de una variable, no así su media y su varianza, la **desigualdad de Chebyshev** proporciona una cota superior de la probabilidad del conjunto de valores de la variable que difieren de la media en, al menos, una cierta cantidad.

Sea X una variable aleatoria de media μ y varianza σ^2, y sea K un número positivo, entonces,

$$p[|X - \mu| \geq K] \leq \frac{\sigma^2}{K^2}\,.$$

Ejercicios propuestos

5.1. Un individuo con un capital de medio millón de pesetas desea invertirlo en un negocio cuya rentabilidad es del 50 %, pero con el posible riesgo de perder el total de la inversión. Su asesor financiero le ha informado que este negocio tiene una probabilidad de 0.8 de ser rentable. Si decide invertir, ¿cuál será su beneficio esperado?

5.2. Debido a los graves problemas económicos que atraviesa un cierto país, el gobierno ha decidido que los visitantes de uno de los parques naturales deberán pagar entrada a partir del próximo verano.

Se ha estimado que la variable X, número de personas por coche que entran en el parque, tiene la siguiente función de probabilidad:

X	1	2	3	4	5
$[2pt]p[X = x]$	0.15	0.20	0.35	0.20	0.10

a) Hállese el número medio de visitantes por vehículo.

b) ¿Cuánto debe pagar cada persona para que la ganancia esperada por coche sea de 290 pesetas?

c) Si cada visitante paga p pesetas, ¿cuál es la ganancia esperada de un día en el que se registre una entrada de 1 000 vehículos?

5.3. En Estadística se dice que un juego es justo cuando la ganancia esperada de cada jugador es cero.

Dos jugadores, A y B, tiran un dado por turnos, ganando aquel que obtenga primero un uno. Cada jugador apuesta una cantidad c_j $(j = 1, 2)$ cuyo total será finalmente para el ganador. Suponiendo que empieza el jugador A, ¿qué condición deben cumplir c_1 y c_2 para que el juego sea justo?

5.4. El rendimiento, en toneladas, de una hectárea de trigo es una variable aleatoria, X, que se modeliza según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3(x-1)(3-x)}{4} & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sabiendo que el agricultor percibe 20 pesetas por kilo de trigo y una cantidad fija de 5.000 pesetas por hectárea cultivada, hállese:

a) La media y la varianza de la variable X.

b) El ingreso medio por hectárea.

5.5. El tiempo, en días, que un cliente tarda en abonar una factura en una tienda de electrodomésticos, es una variable aleatoria con función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{3} \cdot e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese el porcentaje de clientes que pagan al contado.

b) Calcúlese el tiempo medio de pago.

5.6. Una empresa constructora se compromete a realizar un edificio en 150 días, recibiendo por ello 100 millones de pesetas. Por cada semana de retraso en la entrega de la obra, la constructora deberá pagar una indemnización de 2 millones de pesetas. Se estima que el tiempo, en días, que se tarda en construir el edificio es una variable aleatoria cuya función de distribución es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 150 \\ 1 - \dfrac{1}{3} \cdot e^{-(x-150)} & x \geq 150 \end{cases}$$

a) ¿En cuántos días se espera concluir la obra?

b) ¿Qué cantidad espera recibir la constructora por la realización de dicha obra?

5.7. Sea X una variable aleatoria discreta que toma como valores los números naturales 1, 2, ...

a) Demuéstrese que, si existe, $E(X) \geq 1$.

b) Compruébese que, si $E(X) = 1$, entonces, $p[X = 1] = 1$.

5.8. Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores 1, 2, ... Demuéstrese que, cuando exista, $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} p[X \geq k]$.

5.9. Sea X una variable aleatoria negativa. Pruébese que, si existe $E(X)$, ésta siempre es menor o igual que 0.

5.10. El precio por estacionamiento en un parking es de 75 pesetas para la primera hora o fracción, siendo de 60 pesetas a partir de la segunda hora o fracción. Se supone que el tiempo, en horas, que un vehículo permanece en el parking se modeliza según la función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese el ingreso medio por aparcamiento.

5.11. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2(1+x)/9 & 0 < x \leq 1 \\ 2/3 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Calcúlense la esperanza y la varianza de X.

5.12. La compañía Petroleum Pluf, para satisfacer la demanda mensual de petróleo de la República de Ruritania, ofrece dos opciones:

Opción 1. El país deberá pagar 20 dólares por cada barril.

Opción 2. Si la demanda mensual no supera la cota de medio millón de barriles, el país deberá pagar una cantidad fija de 15 millones de dólares. Si la demanda mensual supera el medio millón de barriles, deberá pagar, además de los 15 millones fijos, 14 dólares por cada barril que supere dicha cota.

Se ha estimado, para Ruritania, que la demanda mensual de petróleo, en millones de barriles, tiene la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Sea Y_i $(i = 1, 2)$ la cantidad mensual, en millones de dólares, que deberá pagar el país, si se decide por la opción i-ésima.

a) Exprésense las variables Y_1 e Y_2 en función de X.

b) ¿Qué opción será más favorable al país?

c) El presidente de Ruritania, aconsejado por su primer ministro, se decide por la segunda opción. Desconfiando de él, le pone a prueba: durante el próximo año, si al menos en la mitad de los meses la cantidad a pagar por el país es superior a la que hubiera tenido que pagar de haber elegido la otra opción, el presidente mandará ajusticiar al primer ministro. Hállese la probabilidad de que esto ocurra.

¶ **5.13.** Sea X una variable aleatoria discreta y sea $Y = g(X)$ una variable aleatoria función de X. Demuéstrese que, si existen,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p[X = x_i]$$

y

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p[Y = y_j]$$

coinciden.

¶ **5.14.** *a*) Sea X una variable aleatoria continua y sea $Y = g(X)$ una función de X, donde g verifica las condiciones del teorema del cambio de variable para variables aleatorias continuas unidimensionales. Demuéstrese que, si existen,

$$E[g(X)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx$$

y

$$E(Y) = \int_{y=-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy$$

coinciden.

b) El tiempo de vida, en años, de una cierta componente de una máquina se modeliza mediante la siguiente función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Si el coste de mantenimiento de la componente, en millones de pesetas, Y, es función del tiempo de vida, en concreto, $Y = g(X) = 2X^2 + 1$, calcúlese la cantidad que espera abonar la empresa en concepto de mantenimiento, por los dos procedimientos propuestos en el apartado *a*).

5.15. Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obténgase la distribución de $Y = \ln X$ y la de $Z = \frac{1}{X}$.

b) Calcúlese la esperanza de la variable Y.

c) Compruébese que no existe la esperanza de la variable Z.

¶ **5.16.** Sea X una variable aleatoria simétrica respecto de a. Demuéstrese que:

a) La variable $Y = X - a$ es simétrica respecto de cero.

b) Si existe la esperanza de X, $E(X)$, entonces $E(X) = a$.

c) Los momentos centrales de orden impar de X, si existen, son iguales a cero.

¶ **5.17.** Hállese la expresión del momento factorial de orden k como combinación lineal de los momentos no centrales de orden igual o inferior a k.

5.18. El salario de los trabajadores de una empresa es una variable aleatoria con media 80.000 pesetas y desviación típica 20.000. La patronal propone que la cantidad total correspondiente a la subida de los sueldos del próximo año se reparta entre los empleados de modo que todos los salarios se incrementen en idéntico porcentaje. Frente a esta alternativa, y con el fin de disminuir las diferencias salariales, los sindicatos consideran oportuno que dicho total se distribuya de forma que cada uno de los empleados vea incrementado su salario en una misma cantidad. Justifíquese estadísticamente la propuesta sindical.

5.19. La altura de los niños que nacen al mes en el servicio de maternidad de un hospital comarcal es una variable aleatoria con esperanza 45 centímetros y desviación 3 centímetros, siendo estos valores 3.5 y 0.4 kilogramos, respectivamente, para la variable peso al nacer.

Hoy ha nacido una niña con un peso de 4 kilogramos y una altura de 60 centímetros. ¿Cuál de los dos valores es relativamente mayor con respecto al resto de los bebés que nacen en el hospital?

5.20. La puntuación que un candidato obtiene en el primer ejercicio de una oposición es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{20} & 0 \leq x < 4 \\ \dfrac{10-x}{30} & 4 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la media y la varianza del número de puntos obtenidos en el primer examen, así como una medida relativa del grado de dispersión de dicha variable.

Por lo que respecta al segundo ejercicio, la distribución de la puntuación responde al siguiente modelo:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{25} & 0 \leq y < 5 \\ \dfrac{10-y}{25} & 5 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) ¿En cuál de los dos exámenes se observa una mayor homogeneidad en las puntuaciones?

c) Un opositor obtiene unas calificaciones de 6 y 7 para el primer y segundo ejercicio, respectivamente. ¿En cuál de los dos ha conseguido un mejor resultado en relación con la actuación general de los opositores?

5.21. El salario mensual, en cientos de miles de pesetas, de los trabajadores de una pequeña empresa es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 3-x & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese, analítica y gráficamente, el salario mínimo del 50 % de los trabajadores que más cobran.

b) ¿Cuál es el salario máximo del 10 % de los trabajadores que menos cobran?

5.22. El retraso en minutos que un autobús tiene al llegar a una determinada parada es una variable aleatoria X que se modeliza según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & 0 < x < b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la mediana y el cuantil de orden q en función de b.

b) Sabiendo que en la mitad de las ocasiones sufre un retraso inferior a 3 minutos, calcúlese la mediana y el recorrido intercuartílico.

5.23. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{2}{3} \cdot x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3} \cdot x + \dfrac{1}{3} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcúlese la esperanza, la varianza y la mediana de X.

5.24. *a*) Estúdiese el comportamiento de la moda y de la mediana ante cambios de origen y de escala.

b) Compruébense los resultados obtenidos para la variable discreta X cuya función de probabilidad es:

X	1	2	3	5
$[2pt]p[X = x]$	0.2	0.4	0.3	0.1

cuando se realiza el cambio de origen y escala

$$Y = \frac{X + 5}{2}.$$

5.25. Sea X una variable aleatoria continua y simétrica. Demuéstrese que la media y la mediana coinciden.

Hoy ha nacido una niña con un peso de 4 kilogramos y una altura de 60 centímetros. ¿Cuál de los dos valores es relativamente mayor con respecto al resto de los bebés que nacen en el hospital?

5.20. La puntuación que un candidato obtiene en el primer ejercicio de una oposición es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{20} & 0 \leq x < 4 \\ \dfrac{10-x}{30} & 4 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la media y la varianza del número de puntos obtenidos en el primer examen, así como una medida relativa del grado de dispersión de dicha variable.

Por lo que respecta al segundo ejercicio, la distribución de la puntuación responde al siguiente modelo:

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{25} & 0 \leq y < 5 \\ \dfrac{10-y}{25} & 5 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) ¿En cuál de los dos exámenes se observa una mayor homogeneidad en las puntuaciones?

c) Un opositor obtiene unas calificaciones de 6 y 7 para el primer y segundo ejercicio, respectivamente. ¿En cuál de los dos ha conseguido un mejor resultado en relación con la actuación general de los opositores?

5.21. El salario mensual, en cientos de miles de pesetas, de los trabajadores de una pequeña empresa es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \leq x < 2 \\ 3-x & 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese, analítica y gráficamente, el salario mínimo del 50 % de los trabajadores que más cobran.

b) ¿Cuál es el salario máximo del 10 % de los trabajadores que menos cobran?

5.22. El retraso en minutos que un autobús tiene al llegar a una determinada parada es una variable aleatoria X que se modeliza según la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & 0 < x < b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la mediana y el cuantil de orden q en función de b.

b) Sabiendo que en la mitad de las ocasiones sufre un retraso inferior a 3 minutos, calcúlese la mediana y el recorrido intercuartílico.

5.23. Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{2}{3} \cdot x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{2}{3} \cdot x + \dfrac{1}{3} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Calcúlese la esperanza, la varianza y la mediana de X.

5.24. *a*) Estúdiese el comportamiento de la moda y de la mediana ante cambios de origen y de escala.

b) Compruébense los resultados obtenidos para la variable discreta X cuya función de probabilidad es:

X	1	2	3	5
$[2pt]p[X = x]$	0.2	0.4	0.3	0.1

cuando se realiza el cambio de origen y escala

$$Y = \frac{X + 5}{2}.$$

5.25. Sea X una variable aleatoria continua y simétrica. Demuéstrese que la media y la mediana coinciden.

5.26. En una perfumería se venden diariamente X unidades de un cierto perfume. La función de probabilidad de esta variable es

X	0	1	2	3
$p[X = x]$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

a) Hállese la media, la mediana y la moda de esta distribución.

b) Obténgase la varianza, la desviación típica, el coeficiente de variación, la desviación absoluta media con respecto a la mediana y el recorrido intercuartílico.

c) Calcúlense los coeficientes de asimetría y de curtosis.

5.27. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty .$$

a) Calcúlese la media, la mediana y la moda de esta distribución.

b) Obténgase la desviación absoluta media respecto a la mediana y el recorrido intercuartílico.

c) Hállense los coeficientes de asimetría y de curtosis.

5.28. Dada la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese la mediana, el primer cuartil y el segundo decil de la distribución.

b) Hállense los coeficientes de asimetría y de curtosis.

5.29. Demuéstrese que los coeficientes de asimetría y de curtosis son invariantes ante cambios de origen y de escala.

5.30. Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores $-k$, 0 y k con probabilidades $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{8}$, respectivamente.

a) Hállese $p[|X - \mu| \geq 2\sigma]$.

b) Obténgase una cota superior de la probabilidad anterior, utilizando la desigualdad de CHEBYSHEV.

5.31. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese $p[|X| \geq k]$, donde k es un número $0 < k < 1$.

b) Obténgase una cota superior de la probabilidad anterior, utilizando la desigualdad de CHEBYSHEV.

c) Compárese la probabilidad obtenida en el apartado *a*) con la cota calculada en *b*), para $k = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$.

5.32. El dueño de una zapatería está cansado de oír a su mujer que en la zapatería de enfrente acuden más clientes. Convencido de que, aunque así sea algún día, él tiene una afluencia de personas mucho más regular, decide hacérselo ver a su esposa, por lo que contrata los servicios de un estadístico. Éste, tras analizar las distribuciones del número de clientes diarios que entran en cada uno de los establecimientos, informa al zapatero que las medias y varianzas son, respectivamente, 100 y 81 para el comercio de la competencia y 95 y 25 para el suyo.

a) ¿Confirman estas deducciones la intuición del vendedor?

b) Hállese una cota superior del porcentaje de días en que el número de clientes que acuden a la zapatería es mayor de 150.

5.33. El número de periódicos vendidos diariamente en un quiosco es una variable aleatoria de media 200 y desviación típica 10. ¿Cuántos ejemplares diarios debe encargar el propietario del quiosco para que tenga una seguridad de al menos un 99 % de no quedarse sin existencias?

5.34. El ayuntamiento de una ciudad ha decidido establecer una zona de estacionamiento limitado, en la que aparcan 500 vehículos por término medio. Sabiendo que al menos el 99 % de los días el número de coches que utilizan este servicio está entre 475 y 525, hállese una medida del grado de dispersión de la variable X, número de vehículos diarios que ocupan plazas de estacionamiento limitado.

5.35. El número de días al año que un trabajador de un pequeño comercio está de baja por enfermedad es una variable aleatoria de la que, únicamente, se conoce su media, 10, y su desviación típica, 2. Si cada uno de estos días supone a la empresa unas pérdidas de 10.000 pesetas, determínense los límites superior e inferior de las pérdidas anuales por trabajador con un grado de fiabilidad de al menos un 95 %.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 5.1.

La variable aleatoria X, *beneficio obtenido en la inversión*, toma el valor $0.5 \cdot 500.000 = 250.000$ pesetas, si la inversión es rentable y, -500.000 pesetas, si no lo es, ya que entonces

se pierde el total invertido. Como indica el enunciado, el primero de los resultados tiene probabilidad 0.8 y el segundo 0.2. En definitiva, el beneficio esperado es la esperanza de la variable X,

$$E(X) = 250\,000 \cdot 0.8 + (-500\,000) \cdot 0.2 = 100\,000 \text{ pesetas.}$$

Podemos también plantearnos estudiar el *saldo esperado en la cuenta*, Y. Como la rentabilidad es del 50 % con probabilidad 0.8, la variable Y vale $500\,000 \cdot 1.5 = 750\,000$ pesetas con esa probabilidad, y cero si se pierde la inversión. El saldo esperado es, entonces,

$$E(Y) = 750\,000 \cdot 0.8 + 0 \cdot 0.2 = 600\,000 \text{ pesetas.}$$

En consecuencia, el beneficio esperado es el saldo esperado menos la inversión, esto es, 100 000 pesetas, el mismo resultado que obtuvimos anteriormente.

Obsérvese que, como $X = Y - 500\,000$, y la esperanza verifica la propiedad de linealidad, $E(X) = E(Y) - 500\,000$ y, por tanto, ambas soluciones coinciden.

Ejercicio 5.2.

a) El número medio de visitantes por vehículo es

$$E(X) = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.20 + 3 \cdot 0.35 + 4 \cdot 0.20 + 5 \cdot 0.1 = 2.9 \text{ visitantes.}$$

b) Sea a el precio de la entrada de una persona. Si llamamos Y a la variable *ganancia por vehículo*, $Y = a \cdot X$, con lo cual, aplicando la linealidad de la esperanza,

$$E(Y) = E(a \cdot X) = a \cdot E(X) = 2.9 \cdot a\,.$$

Si se desea que la ganancia esperada por vehículo sea de 290 pesetas,

$$E(Y) = 2.9 \cdot a = 290 \text{ pesetas,}$$

el precio de la entrada, a, tiene que ser de 100 pesetas.

c) Si cada visitante paga p pesetas, la *ganancia por vehículo* es la variable aleatoria $Y = p \cdot X$ y, por tanto, la ganancia esperada por vehículo resulta

$$E(Y) = E(p \cdot X) = p \cdot E(X) = 2.9 \cdot p \text{ pesetas,}$$

por lo que, si entran 1 000 vehículos, la ganancia esperada en todo el día es

$$1\,000 \cdot 2.9 \cdot p = 2\,900 \cdot p \text{ pesetas.}$$

Puede resolverse también este apartado teniendo en cuenta que, si se registra una entrada de 1 000 vehículos, y llamamos $Y_1, \ldots, Y_{1\,000}$ a *la ganancia obtenida con cada uno de ellos*, la *ganancia total* es la cantidad aleatoria $Z = Y_1 + \cdots + Y_{1\,000}$. Sin otra información, aceptamos que cada una de esas mil variables aleatorias tiene la misma distribución de probabilidades que Y, por lo cual,

$$E(Y_1) = \cdots = E(Y_{1\,000}) = E(Y) = 2.9 \cdot p \text{ pesetas.}$$

Como veremos en el próximo capítulo, la esperanza es también lineal para la suma de variables aleatorias. En consecuencia,

$$E(Z) = E(Y_1 + \cdots + Y_{1\,000}) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_{1\,000}) =$$
$$= 1\,000 \cdot 2.9 \cdot p = 2\,900 \cdot p \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 5.3.
Calculemos, en primer lugar, la probabilidad de que gane cada uno de los jugadores. Si llamamos A_i al suceso consistente en que *el jugador A obtenga un uno en la tirada i - ésima*, y B_i al correspondiente suceso en el caso del jugador B (entendiendo que se dan las condiciones para que ese suceso sea posible, esto es, que el juego llegue hasta dicha tirada), la probabilidad de que gane el jugador A es

$$p(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_{2i-1}) .$$

Ahora bien, $p(A_1) = \frac{1}{6}$ y $p(A_3) = (\frac{5}{6})^2 \frac{1}{6}$, ya que es la probabilidad de que A no obtenga un uno en la primera tirada, B no lo obtenga en la segunda y A lo obtenga en la tercera, esto es, $p(\overline{A}_3) = p(\overline{A}_1 \overline{B}_2 A_3) = p(\overline{A}_1) \cdot p(\overline{B}_2) \cdot p(A_3)$.

En general, $p(A_{2i-1}) = (\frac{5}{6})^{2i-2} \frac{1}{6}$ y, en consecuencia,

$$p(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_{2i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i-2} \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i-2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{5}{6})^2} = \frac{6}{11} .$$

Análogamente,

$$p(B) = \sum_{i=1}^{\infty} p(B_{2i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i-1} \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2i-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{1 - (\frac{5}{6})^2} = \frac{5}{11} .$$

Observe el lector que ambas probabilidades suman la unidad, es decir que la probabilidad de que el juego no acabe nunca (esto es, que los jugadores no obtengan nunca un uno) es igual a cero.

La *ganancia del jugador A* es una variable aleatoria, X, que vale $(c_1 + c_2) - c_1 = c_2$ si gana, y $0 - c_1 = -c_1$ si pierde. La función de probabilidad de X es, pues,

$$p[X = c_2] = \frac{6}{11} \quad \text{y} \quad p[X = -c_1] = \frac{5}{11} .$$

Por tanto, la ganancia esperada para ese jugador vale

$$E(X) = c_2 \cdot \frac{6}{11} - c_1 \cdot \frac{5}{11} .$$

Si queremos que el juego sea justo, dicha esperanza ha de ser nula, por lo que debe cumplirse la condición

$$6 \cdot c_2 = 5 \cdot c_1 .$$

Obviamente, en los juegos denominados *de suma nula*, en los que las ganancias del primer jugador son las pérdidas del segundo, un juego justo para uno de ellos lo es también para el otro. En efecto, puede comprobar el lector que, si llamamos Y a la variable *ganancia del jugador B*, se cumple que $Y = -X$ y, entonces,

$$E(Y) = -E(X) = -c_2 \cdot \frac{6}{11} + c_1 \cdot \frac{5}{11} = 0 ,$$

garantizando la condición anterior que $E(Y)$ también será nula.

Ejercicio 5.4.

a) El rendimiento esperado, en toneladas, de una hectárea de trigo es

$$E(X) = \int_1^3 x \cdot \frac{3(x-1)(3-x)}{4}\, dx .$$

Por tanto,

$$E(X) = \frac{3}{4} \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x)\, dx = 2 ,$$

es decir, el rendimiento esperado de una hectárea es de 2 toneladas de trigo.

Para calcular la varianza,

$$\text{Var } (X) = E(X^2) - [E(X)]^2 ,$$

obtengamos previamente $E(X^2)$. Así,

$$E(X^2) = \int_1^3 x^2 \cdot \frac{3(x-1)(3-x)}{4}\, dx = \frac{21}{5}$$

y, en consecuencia,

$$\text{Var } (X) = \frac{21}{5} - 2^2 = \frac{1}{5} .$$

b) La variable Y, *ingreso por hectárea de un agricultor*, es función del *rendimiento*, X; en concreto,

$$Y = 20\,000 \cdot X + 5\,000 .$$

Entonces, el ingreso medio por hectárea es

$$E(Y) = 20\,000 \cdot E(X) + 5\,000 = 45\,000 \text{ pesetas.}$$

Observe el lector que puede obtenerse la función de densidad de Y, f_Y, y hallar el ingreso medio por hectárea como

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy \,.$$

Naturalmente, el resultado será el mismo, pero los cálculos suelen ser más tediosos.

Ejercicio 5.5.

a) Observará el lector que se trata de una variable aleatoria mixta, puesto que, como puede comprobarse, se comporta como una variable continua para los valores positivos, mientras que en el punto cero tiene probabilidad no nula:

$$p[X = 0] = F(0) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F(0 - \varepsilon) = \left(1 - \frac{2}{3} \cdot e^0\right) - 0 = \frac{1}{3} = 0.333 \,.$$

En la figura 5.1 se recoge la representación gráfica de esta función de distribución.

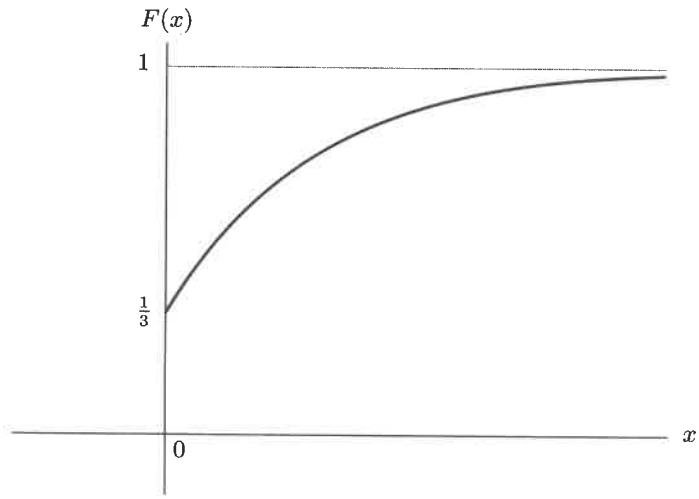


FIG. 5.1.

Por tanto, el 33,3 % de los clientes paga al contado, es decir, el tiempo que tardan en abonar la factura, X, vale cero.

b) Obtengamos, en primer lugar, la función de probabilidad/densidad de esta variable. A la vista de la función de distribución, el único valor que toma X con probabilidad

no nula es el cero. Por tanto, la función de probabilidad/densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{dx}0 = 0 & x < 0 \\ p[X=0] = \dfrac{1}{3} & x = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(1 - \dfrac{2}{3}e^{-x/2}\right) = \dfrac{1}{3}\cdot e^{-x/2} & x > 0 \end{cases}$$

Como sabemos, el tiempo medio de pago es la esperanza de X, que se obtiene sumando para los valores discretos e integrando para los continuos:

$$E(X) = \sum_{x_i \in \mathcal{D}} x_i \cdot f_X(x_i) + \int_C x \cdot f_X(x)\,dx = 0 \cdot \frac{1}{3} + \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-x/2}\,dx = \frac{4}{3} = 1.33 \text{ días},$$

donde el segundo sumando se calcula integrando *por partes*.

Ejercicio 5.6.

a) Al igual que en el problema anterior, X es una variable aleatoria mixta. Puede observar el lector este hecho en la figura 5.2, en la que se representa la función de distribución de X.

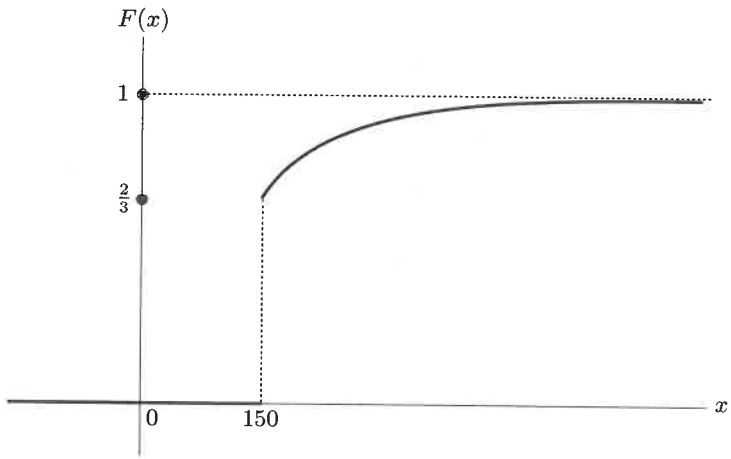


FIG. 5.2.

Calculemos la función de probabilidad/densidad de X. Como

$$p[X = 150] = F_X(150) - \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} F_X(150 - \varepsilon) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{2}{3},$$

dicha función resulta

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 150 \\ p[X = 150] = \dfrac{2}{3} & x = 150 \\ \dfrac{1}{3} \cdot e^{-(x-150)} & x > 150 \end{cases}$$

El número esperado de días para concluir la obra es la esperanza de X, que vale

$$E(X) = 150 \cdot \frac{2}{3} + \int_{150}^{\infty} x \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-(x-150)}\, dx = 150 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 151 = 150.33 \text{ días.}$$

b) Interpretemos, en primer lugar, el enunciado. Supondremos que la penalización de dos millones de pesetas se produce si existe retraso y no es superior a una semana, esto es, si la realización del edificio dura más de 150 días pero no más de 157. La penalización es de cuatro millones, si dura entre 157 y 164 días, y así sucesivamente. Son posibles distintas interpretaciones del enunciado, aunque con cálculos similares en todos los casos.

Llamando Z al *número de semanas de retraso*, e Y a la variable aleatoria que describe *los ingresos*, tendremos que $Y = 100 - 2 \cdot Z$ y, por tanto, $E(Y) = 100 - 2 \cdot E(Z)$. Calcularemos la esperanza de la variable Z y, a partir de ella, obtendremos la de Y.

La variable Z, función de X, es discreta, con valores $0, 1, 2, \ldots$; hallemos su función de probabilidad. Así, la probabilidad de que *la constructora realice la obra sin retraso* es

$$p[Z = 0] = p[X \leq 150] = p[X = 150] = \frac{2}{3}\,,$$

según hemos obtenido anteriormente.

La probabilidad de *una semana de retraso* es

$$\begin{aligned} p[Z = 1] \; &= p[150 < X \leq 157] = F_X(157) - F_X(150) = \\ &= \left[1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-(157-150)}\right] - \left[1 - \tfrac{1}{3} \cdot e^{-(150-150)}\right] = \tfrac{1}{3}\left(1 - e^{-7}\right). \end{aligned}$$

Análogamente,

$$p[Z = 2] = p[157 < X \leq 164] = F_X(164) - F_X(157) = \frac{1}{3}\left(e^{-7} - e^{-14}\right).$$

Puede comprobar el lector que, en general, para $k > 1$,

$$p[Z = k] = \frac{1}{3}\left[e^{-7(k-1)} - e^{-7k}\right].$$

Obtengamos ahora la esperanza de la variable Z:

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p[Z=k] =$$

$$= \frac{1}{3}(1-e^{-7}) + \frac{2}{3}(e^{-7}-e^{-2\cdot 7}) + \frac{3}{3}(e^{-2\cdot 7}-e^{-3\cdot 7}) + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1+e^{-7}+e^{-2\cdot 7}+e^{-3\cdot 7}+\cdots\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-e^{-7}} = 0.334 .$$

En consecuencia, el número medio de semanas de retraso es 0.334, por lo que la cantidad que la constructora espera recibir por la realización de la obra es

$$E(Y) = 100 - 2\cdot E(Z) = 100 - 2\cdot 0.334 = 99.33 \text{ millones de pesetas.}$$

Ejercicio 5.7.

a) La esperanza de la variable X vale

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p[X=k] \geq \sum_{k=1}^{\infty} p[X=k] = 1 ,$$

deduciéndose la última igualdad del hecho de que el sumatorio que la precede es la suma de todos los valores de la función de probabilidad de X. Por tanto, $E(X) \geq 1$.

Si el lector conoce que las variables no negativas tienen esperanza no negativa, el resultado puede probarse de forma más sencilla, construyendo la variable aleatoria $Y = X-1$, que toma como valores los números $0, 1, \ldots$, es decir, $Y \geq 0$ y, por tanto, $E(Y) \geq 0$. Pero, $E(Y) = E(X) - 1$, y de la anterior desigualdad se deduce que $E(X) - 1 \geq 0$, esto es, $E(X) \geq 1$.

b) Si, en la expresión que proporciona la esperanza de X, descomponemos, para $k \geq 2$, la cantidad $k \cdot p[X=k]$ en la forma

$$k \cdot p[X=k] = p[X=k] + (k-1)\cdot p[X=k] ,$$

la esperanza de X puede escribirse como

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} p[X=k] + \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot p[X=k] =$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot p[X=k] .$$

Si la esperanza de X es igual a la unidad, entonces,

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\cdot p[X=k] = 0 .$$

Dado que los términos de este sumatorio son no negativos, deben ser todos ellos iguales a cero para que su suma sea nula, esto es,

$$(k-1)\cdot p[X=k] = 0 , \qquad \text{para } k = 2, 3, \ldots$$

Por tanto, $p[X = k] = 0$ para $k = 2, 3, \ldots$ y, como la suma de las probabilidades debe ser igual a la unidad, $p[X = 1] = 1$.

Ejercicio 5.8.
Como X es una variable aleatoria discreta, su esperanza, si existe, será

$$E(X) = 1 \cdot p[X = 1] + 2 \cdot p[X = 2] + \cdots + k \cdot p[X = k] + \cdots$$

La expresión anterior también puede escribirse como

$$\begin{aligned} E(X) \quad &= p[X = 1] + \\ &+ p[X = 2] + p[X = 2] + \\ &+ p[X = 3] + p[X = 3] + p[X = 3] + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &+ p[X = k] + p[X = k] + p[X = k] + \cdots + p[X = k] + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} E(X) \quad &= (p[X = 1] + p[X = 2] + \cdots + p[X = k] + \cdots) + \\ &+ (p[X = 2] + \cdots + p[X = k] + \cdots) + \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &+ (p[X = k] + \cdots) + \end{aligned}$$

Luego,

$$E(X) = p[X \geq 1] + p[X \geq 2] + \cdots + p[X \geq k] + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} p[X \geq k] ,$$

tal como queríamos probar.

La demostración puede escribirse de una forma más compacta, aunque menos evidente desde el punto de vista intuitivo. Así,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} p[X = k] .$$

Cambiando el orden de los sumatorios, j variará desde uno hasta infinito y k desde j hasta infinito, con lo que

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} p[X = k] = \sum_{j=1}^{\infty} p[X \geq j] .$$

Ejercicio 5.9.
Si X es discreta, su negatividad se traduce en que los valores que toma son todos negativos. En consecuencia,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p[X = x_i] \leq \sum_{i=1}^{\infty} 0 \cdot p[X = x_i] = 0 .$$

Si X es continua, la afirmación de que es negativa se traduce en que $f(x)$ es igual a cero para $x \geq 0$, donde f es la función de densidad de X. Por tanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} x f(x)\, dx \leq 0 .$$

En este ejercicio ocurre como en el apartado *a)* del ejercicio 5.7. Si el lector conoce, o ha demostrado previamente, que las variables aleatorias positivas tienen esperanza que es, asimismo, positiva, el resultado puede probarse de forma inmediata.

En efecto, si X es negativa, la variable $-X$ es positiva, por lo que $E(-X)$ es mayor o igual que cero. Pero $E(-X) = -E(X)$, de donde se deduce que $E(X) \leq 0$.

Ejercicio 5.10.
Podemos hallar la distribución de la variable aleatoria Y, que describe el *ingreso por aparcamiento*, o bien de la variable aleatoria Z, que representa el *número de horas (incluyendo la última hora incompleta), que un vehículo permanece en el parking.* Con esta segunda estrategia, que es la que desarrollaremos, se obtiene la función de probabilidad de Z y, una vez calculada la esperanza de Z, como $Y = 75 + 60 \cdot (Z - 1)$, se calculará la esperanza de Y mediante la expresión $E(Y) = 75 + 60 \cdot [E(Z) - 1]$. El lector puede plantearse la obtención directa de $E(Y)$ como alternativa.

La variable Z toma los valores $1, 2, \ldots$ Puesto que la función de distribución de la variable X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

las probabilidades de los distintos valores de Z son

$$p[Z = 1] = p[0 \leq X \leq 1] = F_X(1) - F_X(0) = 1 - e^{-1} ,$$

$$p[Z = 2] = p[1 < X \leq 2] = F_X(2) - F_X(1) = e^{-1} - e^{-2}$$

y, en general,

$$p[Z = k] = p[k - 1 < X \leq k] = F_X(k) - F_X(k-1) = e^{-(k-1)} - e^{-k} ,$$

para $k = 1, 2, \ldots$

Por tanto, la esperanza de Z vale

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p[Z = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (e^{k-1} - e^{-k}) =$$

$$= 1 + e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + \cdots = \frac{1}{1 - e^{-1}} = 1.58 .$$

En definitiva, el ingreso medio por aparcamiento es

$$E(Y) = 75 + 60 \cdot [E(Z) - 1] = 75 + 60(1.58 - 1) = 109.8 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 5.11.
La esperanza de X vale

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{2}{9} \cdot (1+x)\, dx + \int_1^2 x \cdot \frac{2}{3}\, dx =$$
$$= \frac{32}{27} = 1.185\ .$$

De la misma forma,

$$E(X^2) = \int_0^1 x \cdot \frac{2}{9} \cdot x(1+x)\, dx + \int_1^2 x \cdot \frac{2}{3} \cdot x\, dx = \frac{91}{54} = 1.685\ .$$

Por tanto,

$$\text{Var } (X) = E(X^2)\,(E(X))^2 = \frac{91}{54} - \left(\frac{32}{27}\right)^2 = 0.28\ .$$

Ejercicio 5.12.
a) En la primera opción, el precio es de 20 dólares por barril, por lo que *la cantidad mensual a pagar* será $Y_1 = 20 \cdot X$.

Con la segunda opción, *la cantidad a pagar* será de 15 millones de dólares si $X \leq 0.5$, y si $X > 0.5$ habrá que pagar, además de los 15 millones, $14(X - 0.5)$ millones, correspondientes a la cantidad en que se supera el medio millón de barriles, que se paga a 14 dólares por barril. En definitiva,

$$Y_2 = \begin{cases} 15 & \text{si } X \leq 0.5 \\ 15 + 14(X - 0.5) & \text{si } X \geq 0.5 \end{cases}$$

b) Podemos entender que la opción más favorable es la que implica un menor pago esperado. En la primera opción, el pago esperado para el país es

$$E(Y_1) = E(20 \cdot X) = \int_0^2 20x f_X(x)\, dx = \int_0^1 20x^2 dx + \int_1^2 20x(2-x)\, dx =$$
$$= 20 \text{ millones de dólares.}$$

Este resultado podría haberse obtenido teniendo en cuenta que X es simétrica en torno al eje $x = 1$, como muestra la figura 5.3, por lo que su esperanza, que existe por ser acotada la variable, es $E(X) = 1$, según probaremos en el ejercicio 5.16. En consecuencia, $E(Y_1) = 20E(X) = 20$.

Para la segunda opción, puede escribirse $Y_2 = g(X)$, donde g es la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de hecho, de $[0, 2]$ en $\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 15 & \text{si } x \leq 0.5 \\ 8 + 14x & \text{si } x > 0.5 \end{cases}$$

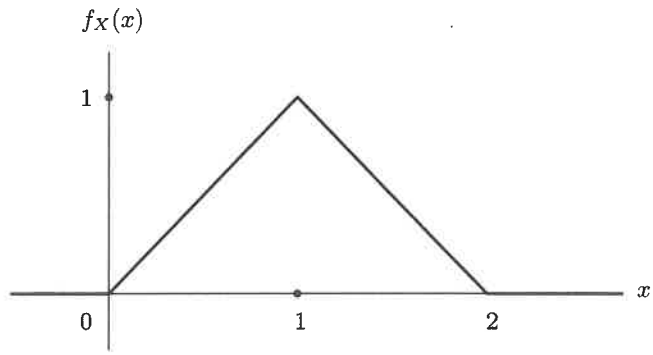


FIG. 5.3.

Por tanto,

$$\begin{aligned} E(Y_2) &= E[g(X)] = \int_0^2 g(x) f_X(x)\, dx = \\ &= \int_0^{0.5} 15 f_X(x)\, dx + \int_{0.5}^2 (8+14x)\, f_X(x)\, dx = \\ &= \int_0^{0.5} 15x\, dx + \int_{0.5}^1 (8+14x)\, x\, dx + \int_1^2 (8+14x)\cdot(2-x)\, dx = \\ &= 22.29 \text{ millones de dólares.} \end{aligned}$$

En definitiva, con el criterio basado en la minimización de la esperanza, la opción más favorable es la primera (20 dólares por barril), porque proporciona un ahorro esperado de 2.29 millones de dólares mensuales frente a la segunda opción.

c) Obtengamos, en primer lugar, la probabilidad de que *el pago con la opción elegida por el primer ministro*, esto es, la segunda, *sea superior al pago con la primera opción*, es decir, $p[Y_2 > Y_1]$. Si escribimos este último suceso en función de X, tendremos $[g(X) > 20X]$, donde g es la función enunciada anteriormente, o dicho de otra forma, $[g(X) - 20X > 0]$.

Veamos para qué valores de X se verifica el suceso. A partir de la expresión que definía g,

$$g(x) - 20x = \begin{cases} 15 - 20x & \text{si } 0 \le x \le 0.5 \\ 8 + 14x - 20x = 8 - 6x & \text{si } 0.5 < x \le 2 \end{cases}$$

La figura 5.4 representa esta función y muestra que $g(x) - 20x$ es mayor que cero para los valores, x, menores que $\frac{4}{3}$, solución de la ecuación $8 - 6x = 0$.

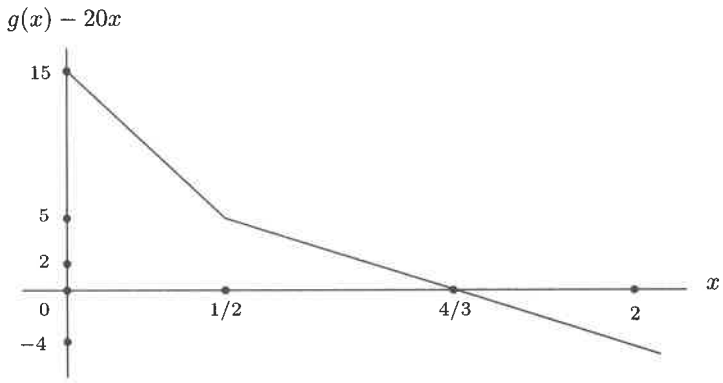


FIG. 5.4.

En definitiva, la probabilidad de que, en un mes, *la segunda opción implique pagos superiores a la primera* es

$$p[Y_2 > Y_1] = p[g(X) - 20X > 0] = p\left[X < \frac{4}{3}\right] =$$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^{\frac{4}{3}} (2 - x)\,dx = \frac{7}{9} = 0.778\,.$$

Finalmente, la probabilidad de que *el presidente mande ajusticiar al primer ministro* (la probabilidad de que realmente sea ajusticiado dependerá también del verdugo) es la probabilidad de que *el suceso* $[Y_2 > Y_1]$ *ocurra en seis o más meses de los doce del año.* La probabilidad de que ocurra *exactamente en seis meses* es

$$\binom{12}{6} (p[Y_2 > Y_1])^6 (1 - p[Y_2 > Y_1])^6\,,$$

donde el producto $(p[Y_2 > Y_1])^6 (1 - p[Y_2 > Y_1])^6$ es la probabilidad de que $[Y_2 > Y_1]$ ocurra en seis meses concretos, y el número combinatorio $\binom{12}{6}$ es el número de formas de elegir esos seis meses dentro del año. Como $p[Y_2 > Y_1] = 0.778$, la probabilidad anterior es 0.0245.

La siguiente tabla suministra la probabilidad de que *el suceso* $[Y_2 > Y_1]$ *ocurra exactamente en* k *meses*, para $k = 6, 7, \ldots, 12$.

Meses	Probabilidad
6	$\binom{12}{6}0.778^6(1-0.778)^6 = 0.0245$
7	$\binom{12}{7}0.778^7(1-0.778)^5 = 0.0737$
8	$\binom{12}{8}0.778^8(1-0.778)^4 = 0.1614$
9	$\binom{12}{9}0.778^9(1-0.778)^3 = 0.2514$
10	$\binom{12}{10}0.778^{10}(1-0.778)^2 = 0.2643$
11	$\binom{12}{11}0.778^{11}(1-0.778) = 0.1684$
12	$\binom{12}{12}0.778^{12} = 0.0492$

La probabilidad de que *el suceso* $[Y_2 > Y_1]$ *ocurra al menos seis meses en el año* es la suma de las siete probabilidades anteriores, esto es, 0.9928. El primer ministro tiene, pues, pocas posibilidades de salvarse.

Ejercicio 5.13.

Intuitivamente, el resultado es evidente. Si, en el primer sumatorio, agrupamos todos los sumandos para los que $g(x_i) = y_1$, su suma es igual a

$$\sum_{x_i|g(x_i)=y_1} y_1\, p[X = x_i] = y_1 \sum_{x_i|g(x_i)=y_1} p[X = x_i] = y_1 p[Y = y_1] .$$

Este argumento puede repetirse para todos los valores y_j $(j = 1, 2, \ldots)$ de Y, deduciéndose el resultado. Si formalizamos el razonamiento anterior de forma global,

$$E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)\, p[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{x_i|g(x_i)=y_j} y_j p[X = x_i] \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} y_j \left(\sum_{x_i|g(x_i)=y_j} p[X = x_i] \right) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j p[Y = y_j] = E(Y) .$$

Ejercicio 5.14.

a) Si g verifica las condiciones del teorema del cambio de variable, la función de densidad de Y puede escribirse en función de la de X como

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| .$$

Por tanto,

$$E(Y) = \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| dy .$$

Hagamos en esta integral el cambio de variable $x = g^{-1}(y)$. Para este cambio, $y = g(x)$. Además, si g^{-1} es creciente, los límites de integración se mantienen y $\frac{dx}{dy}$ es positiva. En consecuencia,

$$E(Y) = \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dx}{dy}\, dy =$$

$$= \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = E(g(X)) ,$$

Si g^{-1} es decreciente, los límites de integración se invierten. Además, $\frac{dx}{dy}$ es negativa, con lo que

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = -\frac{dx}{dy}$$

y, en definitiva,

$$E(Y) = -\int_{y=-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \cdot \frac{dx}{dy}\, dy =$$

$$= -\int_{x=\infty}^{-\infty} g(x)\, f_X(x) dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx = E(g(X)) .$$

Por tanto, en ambos casos, $E(Y) = E[g(X)]$.

b) Llamando Y al *coste de mantenimiento*, esto es,

$$Y = g(X) = 2X^2 + 1 ,$$

queremos calcular la cantidad que espera abonar la empresa por dicho concepto, esto es,

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x)\, dx = \int_{x=0}^{\infty} (2x^2 + 1)\, e^{-x}\, dx =$$

$$= 5 \text{ millones de pesetas.}$$

Para resolver la integral anterior, el lector deberá integrar dos veces *por partes.*

Otra forma de actuar consiste en hallar la esperanza de la nueva variable Y, obteniendo previamente su función de densidad. Así, para $y \geq 1$,

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[2X^2 + 1 \leq y] = p\left[X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right] = F_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) ,$$

de donde, derivando, se tiene

$$f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{\frac{y-1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{8(y-1)}} = \frac{e^{-\sqrt{(y-1)/2}}}{\sqrt{8(y-1)}} ,$$

función que se anula para $y < 1$. En consecuencia,

$$E(Y) = \int_{y=1}^{\infty} y \cdot \frac{e^{-\sqrt{(y-1)/2}}}{\sqrt{8(y-1)}}\, dy = 5 \text{ millones de pesetas.}$$

Ejercicio 5.15.

a) Como X varía en el intervalo $(0,1)$, la variable aleatoria $Y = \ln X$ toma sus valores en el intervalo $(-\infty, 0)$. La transformación, en ese campo de variación, es $y = \ln x$, que cumple las condiciones del teorema del cambio de variable para variables continuas. Además, como la transformación inversa es $x = e^y$, entonces,

$$\frac{dx}{dy} = e^y \,,$$

derivada que es positiva y, por tanto, coincide con su valor absoluto. De este modo,

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^y & 0 < e^y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Pero la doble desigualdad $0 < e^y < 1$ equivale a $-\infty < y < 0$. La función de densidad de Y puede, pues, escribirse como

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^y & -\infty < y < 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtengamos la distribución de la variable $Z = \frac{1}{X}$. Obsérvese que Z varía en el intervalo $(0, \infty)$ y que, en este campo de variación, la transformación $z = \frac{1}{x}$ cumple las condiciones del teorema del cambio de variable para variables continuas. La transformación inversa es, ahora, $x = \frac{1}{z}$ y su derivada vale

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z^2} \,,$$

que es negativa. Por tanto, $|\frac{dx}{dz}| = \frac{1}{z^2}$ y

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z^2} & 0 < \dfrac{1}{z} < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La doble desigualdad equivale a $z > 1$, con lo cual la función de densidad de Z se escribe como

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z^2} & z > 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) La esperanza de Y puede calcularse de dos maneras; la primera, utilizando f_Y:

$$E(Y) = \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{y=-\infty}^{0} y e^y \, dy = -1 \,,$$

siendo la última igualdad el resultado de integrar *por partes*.

Al mismo resultado llegaríamos mediante el segundo procedimiento:

$$E(Y) = E(\ln X) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \ln x f_X(x)\, dx = \int_{x=0}^{1} \ln x\, dx = -1\,,$$

como puede comprobar el lector integrando, asimismo, *por partes*.

c) La esperanza de Z vale

$$E(Z) = \int_{z=-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z)\, dz = \int_{z=1}^{\infty} z \cdot \frac{1}{z^2}\, dz = [\ln z]_{z=1}^{\infty}\,,$$

que no existe por ser infinito el límite de $\ln z$ cuando z tiende hacia infinito. Igual conclusión podría obtenerse, como comprobará el lector, calculando $E(Z)$ como la esperanza de una función de X, $\frac{1}{X}$, es decir, $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Ejercicio 5.16.

a) Si X es discreta, la simetría con respecto de un valor, a, es la simetría de su función de probabilidad, esto es, los valores de X pueden escribirse como

$$\ldots, a - d_n, \ldots, a - d_2, a - d_1, a + d_1, a + d_2, \ldots, a + d_n, \ldots\,,$$

donde d_i $(i = 1, \ldots, n, \ldots)$ son números reales tales que $0 \leq d_1 < d_2 < \ldots < d_n < \ldots$, y, además,

$$p[X = a - d_i] = p[X = a + d_i]\,, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

La gráfica de la función de probabilidad de la figura 5.5 ilustra esta situación.

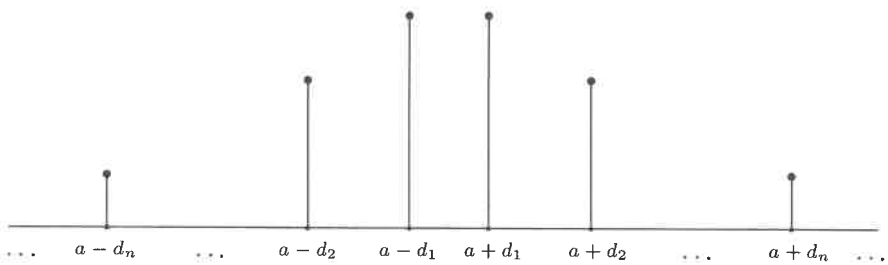


FIG. 5.5.

Obsérvese que, si $d_1 = 0$, el punto de simetría a, será el valor central de la variable. La variable aleatoria $Y = X - a$ toma los valores

$$\ldots, (a - d_n) - a, \ldots, (a - d_2) - a, (a - d_1) - a, (a + d_1) - a, (a + d_2) - a, \ldots, (a + d_n) - a, \ldots\,,$$

esto es,

$$\ldots, -d_n, \ldots, -d_2, -d_1, d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$$

y, además, para todo i,

$$p[Y = -d_i] = p[X - a = -d_i] = p[X = a - d_i]$$

y

$$p[Y = d_i] = p[X - a = d_i] = p[X = a + d_i] \, .$$

Por tanto, $p[Y = -d_i] = p[Y = d_i]$ para todo i, e Y es, entonces, simétrica respecto de cero.

Si X es una variable aleatoria continua, la simetría respecto de un valor, a, es la simetría de su función de densidad, esto es, dicha función toma el mismo valor para los puntos que equidisten de a. Descrito formalmente,

$$f_X(a - r) = f_X(a + r), \text{ para todo número real } r.$$

Si $Y = X - a$, como

$$F_Y(y) = p[Y \leq y] = p[X - a \leq y] = p[X \leq a + y] = F_X(a + y) \, ,$$

derivando esta expresión con respecto a y, resulta

$$f_Y(y) = f_X(a + y) \, ,$$

con lo cual,

$$f_Y(-y) = f_X(a - y) = f_X(a + y) = f_Y(y) \, ,$$

siendo la segunda igualdad consecuencia de la simetría de X con respecto de a.

En conclusión, Y es simétrica respecto de cero, ya que lo es su función de densidad.

b) Según el apartado anterior, la variable $Y = X - a$ es simétrica respecto de cero. Además, si existe $E(X)$, existe $E(Y)$, resultando $E(X) = E(Y) + a$. Demostremos que $E(Y)$ es, entonces, igual a cero.

Si Y es continua, se cumple que $f_Y(y) = f_Y(-y)$ por ser simétrica respecto de cero, con lo cual,

$$E(Y) = \int_{y=-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{y=-\infty}^{0} y f_Y(y)\, dy + \int_{y=0}^{\infty} y f_Y(y)\, dy \, .$$

Haciendo el cambio de variable $y = -t$ en la primera integral, ésta resulta

$$\int_{t=\infty}^{0} -t f_Y(-t)\,(-dt) = -\int_{t=0}^{\infty} t f_Y(t)\, dt \, ,$$

por lo que ambas integrales son de signos opuestos pero del mismo valor absoluto, siendo, por tanto, la esperanza cero.

En definitiva,

$$E(X) = E(Y) + a = a \, .$$

Para variables discretas, la demostración es similar.

c) Los momentos centrales de orden impar de las variables X e Y coinciden:

$$E[(Y - E(Y))^k] = E(Y^k) = E[(X - a)^k] = E[(X - E(X))^k] \, ;$$

por ello, basta con probar el resultado para Y. Como la esperanza de Y es igual a cero, sus momentos centrales coinciden con los no centrales.

Demostremos, por tanto, que si k es un número impar, $E(Y^k)$ vale cero. La demostración es análoga a la realizada para la esperanza en el apartado anterior. Así, si Y es continua,

$$E(Y^k) = \int_{y=-\infty}^{\infty} y^k f_Y(y)\, dy = \int_{y=-\infty}^{0} y^k f_Y(y)\, dy + \int_{y=0}^{\infty} y^k f_Y(y)\, dy \, .$$

Haciendo el cambio de variable $t = -y$, la primera integral resulta

$$\int_{t=\infty}^{0} (-t)^k f_Y(-t)\,(-dt) = -\int_{t=0}^{\infty} t^k f_Y(t)\, dt \, ,$$

ya que, como k es impar, $(-t)^k = -t^k$. En definitiva, ambas integrales son iguales en valor absoluto, pero de signos opuestos, y, consecuentemente, $E(Y^k)$ se anula.

La demostración es análoga si la variable Y es discreta.

Ejercicio 5.17.

Llamemos $\alpha_{(k)}$ al momento factorial de orden k, esto es,

$$\alpha_{(k)} = E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] \, .$$

No resulta difícil escribir los primeros momentos factoriales en función de los momentos no centrales. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\alpha_{(1)} &= E(X) = \alpha_1 \, , \\
\alpha_{(2)} &= E[X(X-1)] = E(X^2 - X) = \alpha_2 - \alpha_1 \qquad \text{o} \\
\alpha_{(3)} &= E[X(X-1)(X-2)] = E(X^3 - 3X^2 + 2X) = \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1 \, .
\end{aligned}$$

Nótese que, debido a la linealidad de la esperanza, los mismos coeficientes que intervienen en el producto $X(X-1)\cdots(X-k+1)$, son los que aparecen en la expresión que relaciona los momentos factoriales con los no centrales. Si desarrollamos dicho producto,

$$X(X-1)\cdots(X-k+1) = b_{k,1}X + b_{k,2}X^2 + \cdots + b_{k,k-1}X^{k-1} + X^k \, ,$$

por lo que

$$\begin{aligned}\alpha_{(k)} &= E[X(X-1)\cdots(X-k+1)] = \\ &= E(b_{k,1}X + b_{k,2}X^2 + \cdots + b_{k,k-1}X^{k-1} + X^k) = \\ &= b_{k,1}E(X) + b_{k,2}E(X^2) + \cdots + b_{k,k-1}E(X^{k-1}) + E(X^k) = \\ &= b_{k,1}\alpha_1 + b_{k,2}\alpha_2 + \cdots + b_{k,k-1}\alpha_{k-1} + \alpha_k \ ,\end{aligned}$$

siendo α_j el momento no central de orden j, $\alpha_j = E(X^j)$ $(j = 1, \ldots, k)$ y $b_{k,j}$ el coeficiente de α_j en el desarrollo de $\alpha_{(k)}$. Como puede observarse, el coeficiente de α_k en el desarrollo de $\alpha_{(k)}$ es siempre igual a la unidad.

Aunque la expresión general de los coeficientes $b_{k,j}$ es demasiado complicada como para obtenerla en este libro, daremos una regla general que permita calcular dichos coeficientes sucesivamente. Por ejemplo, para $k = 4$,

$$\begin{aligned}X(X-1)(X-2)(X-3) &= \\ &= [X(X-1)(X-2)](X-3) = (X^3 - 3X^2 + 2X)(X-3) = \\ &= (X^4 - 3X^3 + 2X^2) - 3(X^3 - 3X^2 + 2X) = \\ &= X^4 + (-3 - 3\cdot 1)X^3 + [2 - 3(-3)]X^2 + (0 - 3\cdot 2)X = \\ &= X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 6X \ ,\end{aligned}$$

y, consecuentemente,

$$\alpha_{(4)} = \alpha_4 - 6\alpha_3 + 11\alpha_2 - 6\alpha_1 \ .$$

Por tanto, el coeficiente de α_j en $\alpha_{(4)}$ se obtiene restando al coeficiente de α_{j-1} en $\alpha_{(3)}$, tres veces el coeficiente de α_j en $\alpha_{(3)}$, es decir,

$$b_{4,j} = b_{3,j-1} - 3b_{3,j} \ .$$

El resultado es completamente general, aunque tedioso de demostrar. Así, supongamos que

$$\alpha_{(k-1)} = b_{k-1,1}\alpha_1 + b_{k-1,2}\alpha_2 + \cdots + b_{k-1,k-2}\alpha_{k-2} + b_{k-1,k-1}\alpha_{k-1} \ ,$$

donde, como es sabido, $b_{k-1,k-1}$ es igual a la unidad. La igualdad anterior implica que

$$\begin{aligned}&X(X-1)\cdots(X-(k-1)+1) = \\ &= b_{k-1,1}X + b_{k-1,2}X^2 + \cdots + b_{k-1,k-2}X^{k-2} + b_{k-1,k-1}X^{k-1} \ ,\end{aligned}$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
&X(X-1)\cdots(X-k+1) = \\
&\quad = [X(X-1)\cdots(X-(k-1)+1)]\,[X-(k-1)] = \\
&\quad = (b_{k-1,1}X + b_{k-1,2}X^2 + \cdots + b_{k-1,k-2}X^{k-2} + b_{k-1,k-1}X^{k-1})\,[X-(k-1)] = \\
&\quad = X(b_{k-1,1}X + b_{k-1,2}X^2 + \cdots + b_{k-1,k-2}X^{k-2} + b_{k-1,k-1}X^{k-1}) - \\
&\qquad - (k-1)\,(b_{k-1,1}X + b_{k-1,2}X^2 + \cdots + b_{k-1,k-2}X^{k-2} + b_{k-1,k-1}X^{k-1}) = \\
&\quad = (0-(k-1)\,b_{k-1,1})\,X + (b_{k-1,1} - (k-1)\,b_{k-1,2})\,X^2 + \cdots + \\
&\qquad + (b_{k-1,k-2} - (k-1)\,b_{k-1,k-1})\,X^{k-1} + (b_{k-1,k-1} - (k-1)\cdot 0)\,X^k\ .
\end{aligned}
$$

Si escribimos $\alpha_{(k)}$ en la misma forma que $\alpha_{(k-1)}$, es decir,

$$\alpha_{(k)} = b_{k,1}\alpha_1 + b_{k,2}\alpha_2 + \cdots + b_{k,k-1}\alpha_{k-1} + \alpha_k\ ,$$

e igualamos coeficientes, tendremos

$$
\begin{aligned}
&b_{k,1} = 0 - (k-1)\,b_{k-1,1}\ , \\
&b_{k,2} = b_{k-1,1} - (k-1)\,b_{k-1,2}\ , \\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&b_{k,k-1} = b_{k-1,k-2} - (k-1)\,b_{k-1,k-1} \qquad \text{y} \\
&b_{k,k} = 1\ .
\end{aligned}
$$

En definitiva, si llamamos $b_{k,j}$ al coeficiente de α_j en $\alpha_{(k)}$, se verifica la relación

$$b_{k,j} = b_{k-1,j-1} - (k-1)\,b_{k-1,j}\ , \qquad j = 1,\ldots,k-1\ ,$$

donde $b_{k,0} = 0$, para todo k.

Esta relación permite hallar los coeficientes de $\alpha_{(k)}$, conocidos los de $\alpha_{(k-1)}$. Por ejemplo, si se necesita expresar $\alpha_{(6)}$ en función de α_1, α_2, ... α_6, habrá que construir la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0
2	−1	1	0	0	0	0
3	2	−3	1	0	0	0
4	−6	11	−6	1	0	0
5	24	−50	35	−10	1	0
6	−120	274	−225	85	−15	1

La tabla anterior utiliza la relación recurrente que hemos obtenido. Así, la fila k-ésima indica los coeficientes correspondientes a $\alpha_{(k)}$ y, dentro de ella, el elemento de la columna

j-ésima indica el coeficiente de α_j. Por ejemplo, el valor 35, que aparece en la tercera columna de la quinta fila, es $b_{5,3}$, esto es, el coeficiente de α_3 en $\alpha_{(5)}$; como puede verse, se calcula restando a 11 (el elemento $b_{4,2}$), cuatro veces el valor -6, es decir, $(5-1)$ veces el valor $b_{4,3}$. Simbólicamente,

$$b_{5,3} = b_{4,2} - (5-1)\, b_{4,3} \ .$$

Se obtendría, en definitiva,

$$\alpha_{(6)} = -120\alpha_1 + 274\alpha_2 - 225\alpha_3 + 85\alpha_4 - 15\alpha_5 + \alpha_6 \ .$$

Ejercicio 5.18.
Llamemos X a la variable aleatoria que representa los *salarios actuales de los trabajadores.* Con la propuesta de la empresa, los *nuevos salarios* vendrán dados por la variable aleatoria $Y = (1+k)\cdot X$, que supone un incremento salarial del $100 \cdot k$ %.

Con la propuesta sindical, los *nuevos salarios* estarían determinados por la variable $Z = X + c$, donde c es la subida salarial común a todos los trabajadores.

En función de los momentos de la variable X se deducen los de las nuevas variables:

$$E(Y) = (1+k)\, E(X), \quad \text{Var}\,(Y) = (1+k)^2\ \text{Var}\,(X)\ ,$$

$$E(Z) = E(X) \quad \text{y} \quad \text{Var}\,(Z) = \ \text{Var}\,(X)\ .$$

En consecuencia, los salarios estarían más dispersos con la propuesta de la empresa que con la de los sindicatos, ya que Var (Y) > Var (Z). Pero, además, la variabilidad relativa es también superior. Si calculamos los coeficientes de variación de ambas variables,

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{(1+k)\,\sigma_X}{(1+k)\,\mu_X} = CV_X = \frac{20}{80} = 0.25\ ,$$

mientras que

$$CV_Z = \frac{\sigma_Z}{\mu_Z} = \frac{\sigma_X}{\mu_X + c} = \frac{20}{80+c}\ .$$

Por tanto, el coeficiente de variación de Z es inferior al de Y, ya que c es una constante positiva.

Ejercicio 5.19.
Sin otra información referente a las variables *altura*, X, y *peso*, Y, como podría ser el conocimiento de sus distribuciones de probabilidad, puede responderse a la pregunta del enunciado tipificando las medidas obtenidas, esto es, midiendo sus diferencias a la media en la escala de la desviación típica. Así,

$$\frac{60-\mu_X}{\sigma_X} = \frac{60-45}{3} = 5 \qquad \text{y} \qquad \frac{4-\mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{4-3.5}{0.4} = 1.25\ ,$$

es decir, que el peso del bebé rebasa el peso medio en 1.25 veces la desviación típica, y la altura rebasa la altura media en cinco veces su desviación típica.

En definitiva, la niña está por encima de la media en ambas medidas, pero es relativamente mayor en altura.

Ejercicio 5.20.

a) Llamemos X a la *puntuación obtenida en el primer ejercicio.* Su esperanza es

$$E(X) = \int_0^4 x \cdot \frac{x}{20}\, dx + \int_4^{10} x \cdot \frac{10-x}{30}\, dx = \frac{14}{3} = 4.667 .$$

Para calcular su varianza, obtenemos primero

$$E(X^2) = \int_0^4 x^2 \cdot \frac{x}{20}\, dx + \int_4^{10} x^2 \cdot \frac{10-x}{30}\, dx = 26 .$$

Por tanto,

$$\text{Var } (X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 26 - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{38}{9} = 4.22 .$$

La varianza o la desviación típica son medidas absolutas de dispersión. Si lo que quiere obtenerse es una medida relativa del grado de dispersión de la variable, puede hallarse el coeficiente de variación, que es el cociente entre la desviación típica y la esperanza de la puntuación. Así, como la desviación típica de X vale

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var } (X)} = \sqrt{\frac{38}{9}} = 2.055 ,$$

dicho coeficiente es

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{2.055}{4.667} = 0.44 .$$

b) Responderemos a esta pregunta calculando el coeficiente de variación de *la puntuación en el segundo ejercicio*, Y, comparándolo con el obtenido para X. Las puntuaciones más homogéneas, esto es, menos dispersas relativamente, serán las que presenten un menor coeficiente de variación.

Hallemos los dos primeros momentos de Y. Su esperanza es igual a cinco, ya que la función de densidad es simétrica con respecto a ese punto, siendo la variable acotada. Puede comprobar el lector este resultado, obteniendo

$$E(Y) = \int_0^5 y \cdot \frac{y}{25}\, dy + \int_5^{10} y \cdot \frac{10-y}{25}\, dy = 5 .$$

Además,

$$E(Y^2) = \int_0^5 y^2 \cdot \frac{y}{25}\, dy + \int_5^{10} y^2 \cdot \frac{10-y}{25}\, dy = \frac{175}{6} = 29.17 .$$

En consecuencia,

$$\text{Var } (Y) = 29.17 - 5^2 = 4.17 .$$

El coeficiente de variación de Y es, pues,

$$CV_Y = \frac{\sqrt{4.17}}{5} = \frac{2.042}{5} = 0.41 .$$

Comparando este coeficiente de variación con el de la variable X obtenido en el apartado *a*), se observa que las puntuaciones del segundo ejercicio son más homogéneas que las del primero, si medimos esa propiedad en términos del coeficiente de variación, aunque las diferencias son escasas.

c) Tipifiquemos ambos valores. Para el valor 6 del primer ejercicio resulta

$$\frac{6 - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{6 - 4.667}{2.055} = 0.65 .$$

Si tipificamos la puntuación del segundo ejercicio obtenemos

$$\frac{7 - \mu_Y}{\sigma_Y} = \frac{7 - 5}{2.042} = 0.98 .$$

Por tanto, la puntuación del segundo ejercicio es mejor que la del primero en relación con la actuación general de los opositores.

Ejercicio 5.21.

a) El valor buscado es aquel que divide el campo de variación de los salarios en dos intervalos de igual probabilidad, de forma que los salarios superiores a dicho valor tengan una probabilidad igual a 0.5. Obviamente, se trata de calcular la mediana de la variable aleatoria.

Llamemos X a la variable aleatoria *salario mensual, en cientos de miles de pesetas, de los trabajadores de una pequeña empresa.* Su función de distribución se obtiene integrando la función de densidad y vale

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 - \dfrac{(3-x)^2}{2} & 2 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

Para una variable continua, como es la que estamos estudiando, la mediana, Me, es el valor tal que $F(Me) = 0.5$. Si resolvemos esta ecuación, la solución es $Me = 2$. El salario mínimo del 50 % los trabajadores que más cobran es, pues, de doscientas mil pesetas.

Este apartado podría haberse resuelto de forma gráfica. La función de densidad es simétrica en torno al punto $x = 2$, como se comprueba observando su representación gráfica presentada en la figura 5.6 (un triángulo isósceles de longitud de la base igual a dos y altura igual a la unidad). La mediana es, pues, el punto respecto al cual la función de densidad es simétrica, ya que las probabilidades a su izquierda y a su derecha son iguales entre sí y, por consiguiente, iguales a 0.5; este punto es $x = 2$.

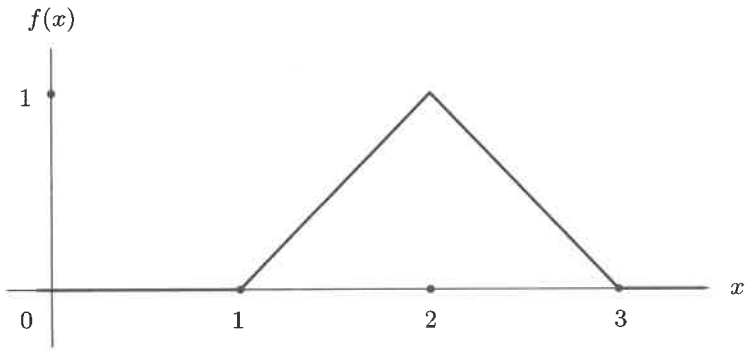


FIG. 5.6.

b) El salario máximo del 10 % de los trabajadores que menos cobran es el cuantil $x_{0.1}$, que se obtiene resolviendo la ecuación $F(x_{0.1}) = 0.1$, pues la variable aleatoria es continua. Como el punto $x_{0.1}$ está a la izquierda de 2 (ya que la mediana toma ese valor), tenemos que resolver la ecuación

$$\frac{(x_{0.1} - 1)^2}{2} = 0.1 ,$$

cuyas soluciones son $1 + \sqrt{0.2}$ y $1 - \sqrt{0.2}$. La segunda es menor que la unidad, por lo que es inválida para nuestro problema. En definitiva, el cuantil buscado resulta

$$x_{0.1} = 1 + \sqrt{0.2} = 1.44721 ,$$

esto es, el salario máximo del 10 % de los trabajadores que menos cobran es de 144.721 pesetas. Recuerde el lector que el cuantil $x_{0.1}$ es el denominado primer decil, d_1 o, también, décimo percentil, p_{10}.

Para calcular un cuantil situado a la derecha de la mediana, por ejemplo, el cuantil $x_{0.8}$, esto es, el mínimo salario correspondiente al 20 % de los trabajadores que más cobran, resolveríamos la ecuación

$$1 - \frac{(3 - x_{0.8})^2}{2} = 0.8 ,$$

cuyas soluciones son $3 + \sqrt{0.4}$ y $3 - \sqrt{0.4}$. La primera de ellas es mayor que 3, por lo cual no sirve para nuestro problema; en consecuencia, el cuantil $x_{0.8}$ es $3 - \sqrt{0.4} = 2.36754$, es decir, el salario mínimo del 20 % de los trabajadores que más cobran es 236.754 pesetas.

Los dos cuantiles se podrían haber obtenido por métodos geométricos en la gráfica que representa la función de densidad.

Ejercicio 5.22.
a) Al igual que en el ejercicio anterior, X es una variable continua. Su mediana y el cuantil de orden q pueden obtenerse, por tanto, resolviendo las ecuaciones

$$F(Me) = 0.5$$

y

$$F(x_q) = q\ ,$$

respectivamente. Integrando la función de densidad, se halla la función de distribución,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x/b & 0 < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

En definitiva, la mediana cumple $\frac{Me}{b} = 0.5$, es decir, vale $Me = 0.5 \cdot b$, y el cuantil de orden q es $x_q = b \cdot q$, ya que es la solución de la ecuación $\frac{x_q}{b} = q$. Observe el lector que podría haberse llegado a estas soluciones teniendo en cuenta que la función de densidad es constante para todos los valores de la variable, por lo que la mediana se encuentra exactamente en el centro del intervalo de valores de X, esto es, $Me = \frac{b}{2}$, que es la solución obtenida anteriormente. Análogamente, el cuantil x_q debe determinar un rectángulo de área q bajo la función de densidad, desde el origen. Como la altura del rectángulo (la de la función de densidad) es $\frac{1}{b}$, la base debe tener una longitud $b \cdot q$ desde el origen.

b) Si en la mitad de las ocasiones el retraso es inferior a 3 minutos, este valor es la mediana, es decir, $Me = 0.5 \cdot b = 3$. De esta igualdad se deduce, además, que b es igual a 6. La función de densidad es, por tanto,

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & 0 < x < 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y la de distribución,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x/6 & 0 < x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

Los cuartiles primero y tercero verifican $\frac{x_{0.25}}{6} = 0.25$ y $\frac{x_{0.75}}{6} = 0.75$, respectivamente, con lo cual, $x_{0.25} = 1.5$ y $x_{0.75} = 4.5$. El recorrido intercuartílico es la diferencia entre ambos, por lo que vale

$$R_c = x_{0.75} - x_{0.25} = 4.5 - 1.5 = 3\ .$$

Obsérvese que, como la función de densidad es constante, la probabilidad de un intervalo depende sólo de su longitud. Por lo tanto, la cuarta parte de los retrasos son los inferiores o iguales a 1.5 minutos, ya que el intervalo $(0, 0.5)$ ocupa la cuarta parte del intervalo de valores de X, que es el intervalo $(0, 6)$. Análogamente, la cuarta parte de

los retrasos son los superiores a 4.5 minutos (las tres cuartas partes son los inferiores o iguales a dicho valor), por lo que 4.5 es el cuantil $x_{0.75}$. Con un razonamiento geométrico resulta también obvio que un intervalo que incluya la mitad de los retrasos debe tener una longitud que sea la mitad de la del intervalo $(0, 6)$; por ello, el recorrido intercuartílico, que es la longitud del intervalo intercuartílico, tiene longitud igual a 3.

Ejercicio 5.23.
Como puede observarse en la figura 5.7, que muestra la función de distribución de X, se trata de una variable mixta. Recuerde el lector que su función de probabilidad/densidad se obtiene derivando la función de distribución en los tramos continuos, y obteniendo en los puntos de discontinuidad las probabilidades no nulas. Así,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} & 0 < x < \dfrac{1}{2}\,, \quad \dfrac{1}{2} < x < 1 \\ p[X = \dfrac{1}{2}] = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

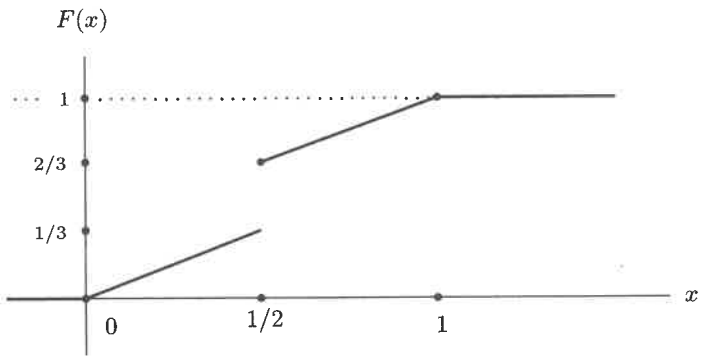


FIG. 5.7.

La esperanza de X vale, entonces,

$$E(X) = \sum_{x_i \in \mathcal{D}} x_i \cdot p[X = x_i] + \int_{x \in C} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \int_0^1 x \cdot \frac{2}{3}\, dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} = 0.5\,.$$

Además,

$$E(X^2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{3} + \int_0^1 x^2 \cdot \frac{2}{3}\, dx = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} = \frac{11}{36} = 0.305$$

y, por tanto,

$$\text{Var}\,(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{11}{36} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{18} = 0.055\,.$$

La mediana es un valor, Me, tal que

$$p[X \leq Me] \geq \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad p[X \geq Me] \geq \frac{1}{2} .$$

En este caso, la ecuación $F(x) = \frac{1}{2}$ no tiene solución, cumpliéndose estrictamente las anteriores desigualdades para $Me = \frac{1}{2}$:

$$p\left[X \leq \frac{1}{2}\right] = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

y

$$p\left[X \geq \frac{1}{2}\right] = p\left[X = \frac{1}{2}\right] + p\left[X > \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{3} + \left(1 - p\left[X \leq \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} .$$

Ejercicio 5.24.

a) La moda es el valor, o los valores, para los que se alcanza el máximo absoluto de la función de probabilidad o de la función de densidad. Como un cambio de origen y de escala no modifica las posiciones relativas de los valores de la variable, parece natural que la moda varíe de acuerdo con dicho cambio. Comprobémoslo analíticamente.

Sea X una variable discreta. Una moda de X, Mo_X, es un valor de la variable que verifica:

$$p[X = Mo_X] \geq p[X = x_i] , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Hagamos un cambio de origen y escala, $Y = \frac{X-o}{e}$. Entonces, $X = e \cdot Y + o$. Los valores de Y son $y_i = \frac{x_i - o}{e}$ y entre ellos se encuentra el valor $\frac{Mo_X - o}{e}$.

Pero,

$$p\left[Y = \frac{Mo_X - o}{e}\right] = p[e \cdot Y + o = Mo_X] = p[X = Mo_X] ,$$

y, como Mo_X es una moda de X,

$$p[X = Mo_X] \geq p[X = x_i] = p\left[\frac{X - o}{e} = \frac{x_i - o}{e}\right] = p[Y = y_i] ,$$

para $i = 1, 2, \ldots$ En definitiva,

$$p\left[Y = \frac{Mo_X - o}{e}\right] \geq p[Y = y_i] , \qquad i = 1, 2, \ldots ,$$

es decir, $\frac{Mo_X - o}{e}$ es una moda de Y.

Si X es una variable continua y f_X es su función de densidad, se comprueba sin dificultad que Y es también continua, y que

$$f_Y(y) = e \cdot f_X(e \cdot y + o) ,$$

para todo y. Si Mo_X es una moda de X,

$$f_X(Mo_X) \geq f_X(x) ,$$

para todo x. Pero,

$$f_Y\left(\frac{Mo_X - o}{e}\right) = e \cdot f_X\left(e \cdot \frac{Mo_X - o}{e} + o\right) = e \cdot f_X(Mo_X)$$

y, aplicando la desigualdad anterior a $x = e \cdot y + o$,

$$f_Y\left(\frac{Mo_X - o}{e}\right) = e \cdot f_X(Mo_X) \geq e \cdot f_X(e \cdot y + o) = f_Y(y) .$$

El valor $\frac{Mo_X - o}{e}$ es, pues, una moda de Y.

Por lo que se refiere a las medianas, obsérvese que, si Me_X es una mediana de X, cumple

$$p[X \leq Me_X] \geq 0.5 \qquad \text{y} \qquad p[X \geq Me_X] \geq 0.5 .$$

Entonces,

$$p\left[Y \leq \frac{Me_X - o}{e}\right] = p\left[\frac{X - o}{e} \leq \frac{Me_X - o}{e}\right] = p[X \leq Me_X] \geq 0.5$$

y

$$p\left[Y \geq \frac{Me_X - o}{e}\right] = p\left[\frac{X - o}{e} \geq \frac{Me_X - o}{e}\right] = p[X \geq Me_X] \geq 0.5 .$$

Por tanto, el valor $\frac{Me_X - o}{e}$ es una mediana de Y.

b) La moda de la variable X es el valor $Mo_X = 2$, ya que en él la función de probabilidad de X alcanza su máximo valor. Por otro lado, para calcular la mediana,

$$p[X \leq 2] = 0.6 \geq 0.5 \qquad \text{y} \qquad p[X \geq 2] = 0.8 \geq 0.5 ,$$

y, consecuentemente, $Me_X = 2$.

Si hacemos el cambio de variable $Y = (X + 5)/2$, la función de probabilidad de la variable Y resulta:

Y	$p[Y = y]$
3	0.2
3.5	0.4
4	0.3
5	0.1

La moda de Y es el valor $Mo_Y = 3.5$, pues en él se alcanza el máximo de la función de probabilidad de Y. La mediana de Y es $Me_Y = 3.5$, ya que

$$p[Y \leq 3.5] = 0.6 \geq 0.5 \qquad \text{y} \qquad p[Y \geq 3.5] = 0.8 \geq 0.5 .$$

Se verifican, por tanto, las relaciones obtenidas en el apartado anterior:

$$Mo_Y = 3.5 = \frac{2 + 5}{2} = \frac{Mo_X + 5}{2} .$$

y

$$Me_Y = 3.5 = \frac{2+5}{2} = \frac{Me_X + 5}{2}$$

Ejercicio 5.25.
Supondremos que la media existe. Si X es simétrica respecto de un punto a, dicha esperanza tiene que valer a, como demostramos en el ejercicio 5.16. Además, por ser simétrica respecto de a,

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx\ ,$$

donde f es la función de densidad de X. Pero, la integral de la izquierda vale $p[X \leq a]$ y la de la derecha, $p[X \geq a]$. Por tanto,

$$p[X \leq a] = p[X \geq a] = 0.5\ ,$$

pues ambas probabilidades suman la unidad. El valor a es, por consiguiente, una mediana de la variable.

En definitiva, si la variable es simétrica respecto de a, y si existe la esperanza de la variable, ésta coincide con la mediana, y ambas medidas de posición son iguales al valor a.

Ejercicio 5.26.
a) La media de X vale $\mu = \frac{8}{7}$, según puede comprobar el lector. Además, como

$$p[X \leq 1] = \frac{5}{7} \geq 0.5 \qquad \text{y} \qquad p[X \geq 1] = \frac{5}{7} \geq 0.5\ ,$$

el valor 1 es una mediana de la variable que, en este caso, es única. Así, $Me = 1$.

La moda se obtiene inspeccionando la función de probabilidad. Obviamente, el valor con mayor probabilidad es el 1 y, por tanto, $Mo = 1$.

b) En este apartado calculamos distintas medidas de dispersión de la variable. Para hallar la varianza, utilizaremos el momento no central de orden dos, $\alpha_2 = E(X^2) = \frac{16}{7}$. La varianza es, entonces,

$$\sigma^2 = \text{Var}\ (X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{16}{7} - \frac{64}{49} = \frac{48}{49} = 0.9796\ .$$

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza,

$$\sigma = \sqrt{\frac{48}{49}} = 0.9897\ .$$

El coeficiente de variación es el cociente entre la desviación típica y la esperanza. Así,

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{48/49}}{8/7} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\ ,$$

es decir, la desviación típica resulta ser el 86.6 % de la media.

La desviación absoluta media con respecto a la mediana se define como

$$d_{Me} = E[|X - Me|]$$

y dado que, este caso, la mediana es el valor 1, d_{Me} es

$$d_{Me} = |0-1| \cdot p[X=0] + |1-1| \cdot p[X=1] + |2-1| \cdot p[X=2] + |3-1| \cdot p[X=3] =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{7} = 0.7143 .$$

El lector hubiera llegado al mismo resultado calculando la esperanza de la variable $Y = |X - Me|$, cuya función de probabilidad es $p[Y=0] = p[Y=1] = \frac{3}{7}$ y $p[Y=2] = \frac{1}{7}$.

El recorrido intercuartílico es la diferencia $R_c = x_{0.75} - x_{0.25}$, esto es, la distancia entre los cuartiles primero y tercero. En este caso, puede comprobarse que el primer cuartil es $x_{0.25} = 0$ y el tercer cuartil $x_{0.75} = 2$, por lo que

$$R_c = x_{0.75} - x_{0.25} = 2 - 0 = 2 .$$

c) Para obtener los coeficientes de asimetría y de curtosis hay que hallar previamente los momentos centrales de órdenes tres y cuatro. Para ello, calculemos los no centrales hasta el orden cuatro. Los dos primeros ya son conocidos, por lo que hemos de calcular los de órdenes tercero y cuarto. Así,

$$\alpha_3 = E(X^3) = \frac{3}{7} + 8 \cdot \frac{1}{7} + 27 \cdot \frac{1}{7} = \frac{38}{7} = 5.429$$

y

$$\alpha_4 = E(X^4) = \frac{3}{7} + 16 \cdot \frac{1}{7} + 81 \cdot \frac{1}{7} = \frac{100}{7} = 14.286 .$$

Entonces, expresando los momentos centrales en función de los momentos no centrales,

$$\mu_3 = E[(X-\mu)^3] = E[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3] = \alpha_3 - 3\alpha_2\mu + 2\mu^3 =$$

$$= \frac{38}{7} - 3 \cdot \frac{16}{7} \cdot \frac{8}{7} + 2\left(\frac{8}{7}\right)^3 \frac{198}{343} = 0.577$$

y

$$\mu_4 = E[(X-\mu)^4] = E[X^4 - 4X^3\mu + 6X^2\mu^2 - 4X\mu^3 + \mu^4] =$$

$$= \alpha_4 - 4\alpha_3\mu + 6\alpha_2\mu^2 - 3\mu^4 =$$

$$= \frac{100}{7} - 4 \cdot \frac{38}{7} \cdot \frac{8}{7} + 6 \cdot \frac{16}{7}\left(\frac{8}{7}\right)^2 - 3\left(\frac{8}{7}\right)^4 = \frac{5\,436}{2\,401} = 2.264 .$$

Estos momentos pueden hallarse también directamente:

$$\mu_3 = E[(X-\mu)^3] = \left(0 - \frac{8}{7}\right)^3 \cdot \frac{2}{7} + \left(1 - \frac{8}{7}\right)^3 \cdot \frac{3}{7} + \left(2 - \frac{8}{7}\right)^3 \cdot \frac{1}{7} + \left(3 - \frac{8}{7}\right)^3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{198}{343} = 0.58 .$$

El lector puede practicar este método directo calculando el momento μ_4.

En definitiva, el coeficiente de asimetría es

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{198}{343}}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^3} = \frac{33}{32\sqrt{3}} = 0.595$$

y el coeficiente de curtosis

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\frac{5\,436}{2\,401}}{\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^4} - 3 = \frac{5\,436}{2\,304} - 3 = -0.641\,.$$

El signo positivo del coeficiente de asimetría γ_1 indica una desviación hacia la derecha, como puede observarse inspeccionando la gráfica de la función de probabilidad que se muestra en la figura 5.8.

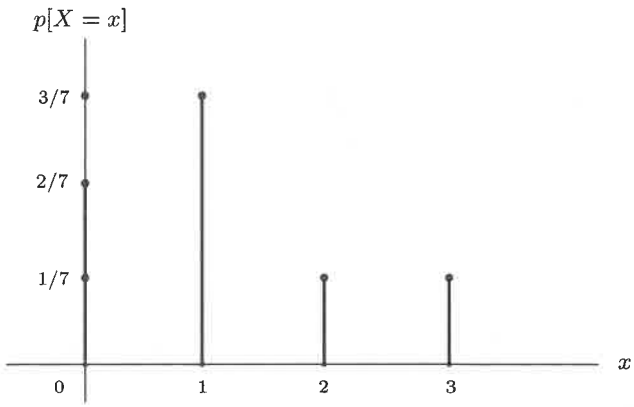


FIG. 5.8.

La negatividad del coeficiente de curtosis indica que la distribución es de las denominadas platicúrticas. Ahora bien, puesto que se trata de una variable discreta, no tiene sentido decir que el perfil de su función de probabilidad es más aplastado que el de la función de densidad de la distribución normal con la misma media y varianza que X, sino, más bien, que la probabilidad está menos acumulada en el centro y más en las colas que en la correspondiente distribución normal.

Se utiliza, a veces, un coeficiente de asimetría basado en los cuartiles y la mediana,

$$d = \frac{x_{0.25} + x_{0.75} - 2Me}{2Me}\,.$$

Obsérvese que este coeficiente puede escribirse como

$$d = \frac{\frac{x_{0.25}+x_{0.75}}{2} - Me}{Me}\,,$$

interpretándose de forma más clara como diferencia entre la mediana y el punto medio entre los dos cuartiles; valores positivos de d sugerirían mayores probabilidades en la zona izquierda de la distribución (asimetría positiva), y valores negativos, mayores probabilidades en la zona derecha (asimetría negativa). En nuestro caso,

$$d = \frac{2 + 0 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 0 .$$

Este coeficiente, por tanto, no muestra la asimetría presente en la distribución de la variable.

Ejercicio 5.27.

a) La función de densidad de la variable X es simétrica respecto del origen, como muestra la figura 5.9. Por tanto, la esperanza, si existe, tiene que ser igual a cero, según demostramos en el ejercicio 5.16.

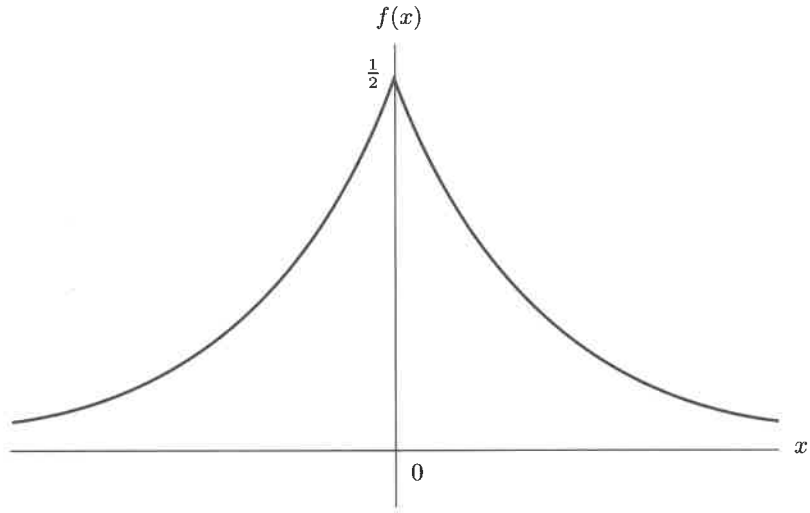


FIG. 5.9.

Comprobémoslo analíticamente:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}\, dx\right) .$$

Pero, integrando *por partes*,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\, dx = -1$$

y

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1\,.$$

En consecuencia,

$$E(X) = \frac{1}{2}\,(-1+1) = 0\,,$$

como habíamos anticipado.

La mediana es también igual a cero, según demostramos, en general, en el ejercicio 5.25. De hecho,

$$p[X \leq 0] = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\cdot e^{-|x|}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \frac{1}{2}$$

y, por tanto, el valor cero es solución de la ecuación $F(x) = 0.5$, donde F es la función de distribución de la variable. Consecuentemente, $Me = 0$.

A la vista de su representación gráfica, la función de densidad de la variable X alcanza su máximo, también, para el valor cero. La variable X es, pues, unimodal, siendo su moda $Mo = 0$.

Esta coincidencia entre las tres medidas de posición se produce para toda variable simétrica y unimodal.

b) Obsérvese que, dado que la mediana es igual a cero, la desviación absoluta media respecto a la mediana vale

$$d_{Me} = E[|X - Me|] = E[|X|]\,.$$

Por tanto,

$$d_{Me} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot\frac{1}{2}\,e^{-|x|}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} xe^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx\,.$$

Teniendo en cuenta el valor de las integrales calculadas en el apartado anterior, obtenemos

$$d_{Me} = -\frac{1}{2}\,(-1) + \frac{1}{2}\,(1) = 1\,.$$

Para hallar el recorrido intercuartílico, es necesario calcular los cuartiles primero y tercero. Al ser continua la variable, el primer cuartil, $x_{0.25}$, se obtiene resolviendo la ecuación

$$0.25 = F(x_{0.25}) = \int_{t=-\infty}^{x_{0.25}} f(t)\,dt\,.$$

Como $x_{0.25}$ no puede ser mayor que la mediana y ésta es igual a cero, $x_{0.25}$ es un valor negativo. Por ello, la ecuación anterior es

$$0.25 = \int_{t=-\infty}^{x_{0.25}} \frac{1}{2}\cdot e^{t}\,dt = \frac{1}{2}\cdot e^{x_{0.25}}\,.$$

En consecuencia, $x_{0.25} = \ln(0.5) = -0.693$.

Como la variable aleatoria es simétrica respecto del origen,

$$p[X \geq 0.693] = p[X \leq -0.693] = 0.25 .$$

Entonces,

$$p[X \leq 0.693] = 1 - p[X \geq 0.693] = 0.75$$

y el tercer cuartil es $x_{0.75} = 0.693$. En definitiva, el recorrido intercuartílico vale

$$R_c = x_{0.75} - x_{0.25} = 1.386 .$$

c) Como la función de densidad es simétrica respecto del origen, el momento central de orden tres, μ_3, es igual a cero, por ser de orden impar, de acuerdo con el ejercicio 5.16. En consecuencia el coeficiente de asimetría, $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, se anula, según puede comprobar el lector realizando los cálculos pertinentes.

Obtengamos el coeficiente de curtosis y, para ello, los momentos no centrales de órdenes dos y cuatro.

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(2+2) = 2 ,$$

integrando dos veces *por partes*.

El momento no central de orden cuatro vale

$$\alpha_4 = E(X^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} x^4 e^{x}\, dx + \int_{0}^{\infty} x^4 e^{-x}\, dx\right) .$$

Tras integrar tres veces *por partes*, se obtiene

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(24 + 24) = 24 .$$

Dado que la esperanza es igual a cero, los momentos centrales y no centrales coinciden, por lo cual

$$\mu_2 = \text{Var}\,(X) = \alpha_2 = 2$$

y

$$\mu_4 = \alpha_4 = 24 .$$

En definitiva, el coeficiente de curtosis es

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{24}{4} - 3 = 3 .$$

La variable aleatoria X es, pues, simétrica y leptocúrtica ($\gamma_3 > 0$), es decir, el perfil de su función de densidad es más apuntado que el de la distribución normal de igual media y varianza.

Ejercicio 5.28.

a) Obtengamos la función de distribución. Si $1 \leq x \leq 2$,

$$F(x) = \int_{t=1}^{x} \frac{2}{t^2}\, dt = 2 - \frac{2}{x}\,.$$

Por tanto, la función de distribución vale

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 2 - \dfrac{2}{x} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

La mediana es la solución de la ecuación $F(x) = 0.5$, es decir, de

$$2 - \frac{2}{x} = 0.5\,,$$

cuya única solución es $Me = \frac{4}{3}$.

Análogamente, el primer cuartil, $x_{0.25}$, y el segundo decil, $x_{0.2}$ o, utilizando una notación más específica C_1 y d_2, respectivamente, son las soluciones de las ecuaciones

$$2 - \frac{2}{x} = 0.25$$

y

$$2 - \frac{2}{x} = 0.2\,,$$

respectivamente. En consecuencia, $x_{0.25} = \frac{8}{7}$ y $x_{0.2} = \frac{10}{9}$.

b) Los coeficientes de asimetría y de curtosis pueden calcularse obteniendo previamente los momentos no centrales. Así,

$$\mu = E(X) = \int_1^2 x \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = 1.386\,,$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = 2\,,$$

$$\alpha_3 = E(X^3) = \int_1^2 x^3 \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = 3 \qquad \text{y}$$

$$\alpha_4 = E(X^4) = \int_1^2 x^4 \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = 4.667\,.$$

Utilizando las expresiones desarrolladas en el ejercicio 5.26,

$$\mu_2 = \sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = 0.078 ,$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\mu + 2\mu^3 = 0.009$$

y, consecuentemente,

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0.009}{(\sqrt{0.078})^3} = 0.413 .$$

Como $\gamma_1 > 0$, la variable aleatoria es asimétrica positiva (hacia la derecha), como puede observar el lector dibujando la función de densidad.

Por otro lado,

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\mu + 6\alpha_2\mu^2 - 3\mu^4 = 0.0159 ,$$

de donde

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = -0.3797 .$$

El signo negativo de este coeficiente indica que la variable es de las denominadas platicúrticas, es decir, con función de densidad más achatada que la de la normal de la misma media y varianza.

Ejercicio 5.29.

Sea X una variable aleatoria con coeficiente de asimetría

$$\gamma_{1X} = \frac{\mu_{3X}}{\sigma_X^3}$$

y de curtosis,

$$\gamma_{2X} = \frac{\mu_{4X}}{\sigma_X^4} - 3 ,$$

donde $\mu_{3X} = E[(X - \mu_X)^3]$, $\mu_{4X} = E[(X - \mu_X)^4]$, $\sigma_X^2 = \mu_{2X} = E[(X - \mu_X)^2]$, siendo μ_X la esperanza de la variable, $\mu_X = E(X)$.

Hagamos un cambio de origen y escala, esto es, definamos la variable $Y = \frac{X-o}{e}$, donde e es un número positivo. Como la esperanza es lineal,

$$\mu_Y = E\left(\frac{X - o}{e}\right) = \frac{\mu_X - o}{e} ,$$

con lo cual, para cualquier número entero positivo, k,

$$(Y - \mu_Y)^k = \left(\frac{X - o}{e} - \frac{\mu_X - o}{e}\right)^k = \left(\frac{X - \mu_X}{e}\right)^k .$$

Consecuentemente,

$$\mu_{kY} = E[(Y - \mu_Y)^k] = E\left[\frac{(X - \mu_X)^k}{e^k}\right] = \frac{\mu_{kX}}{e^k}$$

y, en particular,

$$\sigma_Y = \sqrt{\mu_{2Y}} = \sqrt{\frac{\mu_{2X}}{e^2}} = \frac{\sigma_X}{e} .$$

Aplicando estos resultados a los coeficientes de asimetría y curtosis,

$$\gamma_{1Y} = \frac{\mu_{3Y}}{\sigma_Y^3} = \frac{\mu_{3X}/e^3}{\sigma_X^3/e^3} = \gamma_{1X}$$

y

$$\gamma_{2Y} = \frac{\mu_{4Y}}{\sigma_Y^4} - 3 = \frac{\mu_{4X}/e^4}{\sigma_X^4/e^4} - 3 = \gamma_{2X} ,$$

es decir, los coeficientes de asimetría y curtosis son invariantes ante cambios de origen y de escala.

Ejercicio 5.30.

a) Trabajaremos suponiendo que k es positivo; si fuese negativo, el problema se desarrollaría de forma similar. Calculemos la esperanza y la varianza de la variable X. Así,

$$\mu = E(X) = -\frac{k}{8} + \frac{k}{8} = 0 ,$$

como era de esperar, ya que la variable es simétrica respecto del origen. La varianza coincide, entonces, con el momento no central de orden dos, es decir,

$$\sigma^2 = E(X^2) = \frac{k^2}{8} + \frac{k^2}{8} = \frac{k^2}{4} ,$$

y, por tanto,

$$\sigma = \frac{k}{2} .$$

La probabilidad pedida vale,

$$p[|X - \mu| \geq 2\sigma] = p[|X| \geq k] = p[X = k] + p[X = -k] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} .$$

b) Aplicando la desigualdad de CHEBYSHEV,

$$p[|X - \mu| \geq K] \leq \frac{\sigma^2}{K^2} ,$$

para $K = 2\sigma$,

$$p[|X - \mu| \geq 2\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)^2} = \frac{1}{4} .$$

En este caso, la desigualdad de CHEBYSHEV es una igualdad. Como sabe el lector, con frecuencia no ocurre este hecho.

Ejercicio 5.31.
a) Si k es un número entre 0 y 1,

$$p[|X| \geq k] = 1 - p[-k < X < k] = (1 - k)^2 .$$

Este cálculo puede realizarlo el lector integrando la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

o valiéndose únicamente de procedimientos geométricos, ya que la gráfica de la función de densidad está formada por los lados iguales del triángulo isósceles que tiene por vértices los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. (La representación de esta función de densidad puede verse en el ejercicio 3.18.)

b) Hallemos su esperanza y varianza. La primera es igual a cero, al ser la función de densidad simétrica en torno al origen y existir la esperanza, ya que la variable está acotada. La varianza vale, entonces,

$$\text{Var } (X) = E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1 + x)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(1 - x)\, dx = \frac{1}{6} .$$

La desigualdad de CHEBYSHEV permite, entonces, obtener una cota superior de la probabilidad anterior. Así,

$$p[|X| \geq k] = p[|X - 0| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2} = \frac{1}{6k^2} .$$

c) Ahora, obtengamos $p[|X| \geq k]$ y la cota superior de esta probabilidad calculada por la desigualdad de CHEBYSHEV, para los distintos valores de k, cálculos que se recogen en la siguiente tabla:

k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$(1-k)^2$	0.81	0.64	0.49	0.36	0.25	0.16	0.09	0.04	0.01
$\frac{1}{6k^2}$	16.67	4.17	1.85	1.04	0.67	0.46	0.34	0.26	0.21

Como puede observarse, la holgura entre el verdadero valor de la probabilidad y la cota que proporciona la desigualdad de CHEBYSHEV es muy amplia, siendo la cota no informativa acerca del valor de la probabilidad para los cuatro valores menores de k, ya que una probabilidad es siempre menor o igual que la unidad.

Ejercicio 5.32.

a) Aunque la competencia tiene un número medio de clientes algo superior (100 frente a 95), la dispersión en el número de clientes es muy superior para aquélla. Con la información disponible, pueden calcularse los coeficientes de variación. Así, para el zapatero,

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{5}{95} = 0.05 \,,$$

mientras que para la competencia,

$$CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} = \frac{9}{100} = 0.09 \,,$$

siendo X e Y las variables que denotan el *número de clientes que acuden a la zapatería* y *a la competencia*, respectivamente.

La dispersión relativa del número de clientes del zapatero es solamente el 55,6 % de la correspondiente al número de clientes de la competencia, confirmándose la intuición del vendedor.

b) Sin información adicional sobre la distribución de probabilidades de las variables en estudio, no es posible calcular la probabilidad de que el número de clientes que acuden a la zapatería sea superior a 150.

Podemos, sin embargo, obtener una cota superior de dicha probabilidad a través de la desigualdad de CHEBYSHEV, si aceptamos que la variable es simétrica respecto de la media, hipótesis que se cumple de manera aproximada con cierta frecuencia. Así,

$$p[X \geq 150] = p[X - 95 \geq 55]$$

y, si aceptamos que la distribución es simétrica respecto de la media,

$$p[X - 95 \geq 55] = p[X - 95 \leq -55] \,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p[|X - 95| \geq 55] \; &= p[X - 95 \geq 55] + p[X - 95 \leq -55] = \\ &= 2 \cdot p[X - 95 \geq 55] = 2 \cdot p[X \geq 150] \,; \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de CHEBYSHEV

$$p[|X - \mu| \geq K] \leq \frac{\sigma^2}{K^2} \,,$$

para $K = 55$,

$$p[|X - 95| \geq 55] \leq \frac{25}{55^2} = 0.008 \,.$$

En definitiva,

$$p[X \geq 150] \leq \frac{0.008}{2} = 0.004 \,.$$

El porcentaje de días en que acceden a la zapatería al menos 150 clientes es, como mucho, del 0.4 %.

Ejercicio 5.33.
Sea X la variable *número de periódicos vendidos diariamente en el quiosco* y n el número mínimo de periódicos que el propietario tendrá que comprar para que se cumpla la condición

$$p[X < n] \geq 0.99$$

o, equivalentemente,

$$p[X \geq n] \leq 1 - 0.99 = 0.01 \, .$$

Si aceptamos que la variable X es simétrica respecto de la media, entonces,

$$p[X \geq n] = p[X - 200 \geq n - 200] = \frac{1}{2} \cdot p[|X - 200| \geq n - 200] \, .$$

Aplicando la desigualdad de CHEBYSHEV para $K = n - 200$,

$$p[|X - 200| \geq n - 200] \leq \frac{10^2}{(n - 200)^2} \, ,$$

y, consecuentemente,

$$p[X \geq n] \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{(n - 200)^2} \, .$$

Igualando a 0.01 la cota de la derecha,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{(n - 200)^2} = 0.01 \, ,$$

de donde se obtiene $n - 200 = 70.7$, esto es, el quiosquero debe encargar un mínimo de $n = 271$ periódicos para tener una seguridad de al menos un 99 % de no venderlos todos.

Si no aceptamos la simetría de la variable X respecto de la media, podemos utilizar el hecho de que

$$p[X - 200 \geq n - 200] \leq p[|X - 200| \geq n - 200] \leq \frac{10^2}{(n - 200)^2} \, ,$$

e igualando ahora esta última cota a 0.01, se tiene $n - 200 = 100$, esto es, el quiosquero necesitaría, en este caso, encargar al menos $n = 300$ periódicos para que la seguridad de no venderlos todos sea de al menos un 99 %.

La diferencia entre ambas soluciones estriba en que, si no aceptamos la simetría de la variable, nos vemos obligados a acotar superiormente por 0.01 una probabilidad que, sin duda, será bastante mayor que la que realmente deseamos acotar.

Obsérvese que, en cualquiera de los casos, las dos desigualdades pueden estar muy holgadas, por lo que previsiblemente la probabilidad de no quedarse sin existencias sea bastante superior a 0.99.

Ejercicio 5.34.
Obsérvese que

$$p[475 < X < 525] = p[-25 < X - 500 < 25] = p[|X - 500| < 25] .$$

En consecuencia, $p[|X - 500| < 25] \geq 0.99$.

La desigualdad de CHEBYSHEV indica que

$$p[|X - 500| < 25] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{25^2} .$$

Igualando las cotas de las dos últimas expresiones,

$$1 - \frac{\sigma^2}{25^2} = 0.99 ,$$

se tiene un valor de σ^2 igual a 6.25.

En definitiva, si ambas cotas son similares, la varianza, medida de dispersión absoluta, del número de vehículos diarios aparcados en la zona es, aproximadamente, de 6.25; asimismo, el coeficiente de variación, medida de dispersión relativa, es, aproximadamente,

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} = 0.0046 .$$

Ejercicio 5.35.
Sea X el *número de días al año que un trabajador está de baja.* La variable aleatoria Y, *pérdidas anuales, en miles de pesetas, por trabajador*, es función de X, $Y = 10 \cdot X$. Entonces, Y tiene una media de $\mu_Y = 10 \cdot \mu_X = 10 \cdot 10 = 100.000$ pesetas y una desviación típica de $\sigma_Y = 10 \cdot \sigma_X = 10 \cdot 2 = 20$ pesetas. Aplicando la desigualdad de CHEBYSHEV,

$$p[|Y - 100| < K] \geq 1 - \frac{20^2}{K^2} .$$

Haciendo esta cota igual a 0.95,

$$1 - \frac{400}{k^2} = 0.95 ,$$

resulta $k = 89.443$. En consecuencia,

$$p[10.557 < Y < 189.443] \geq 0.95$$

y, por tanto, estas dos cifras suministran los límites inferior y superior de las pérdidas anuales por trabajador con una fiabilidad de, al menos, el 95 %, esto es, con una probabilidad de que ese suceso ocurra, al menos, 0.95.

Capítulo 6

CARACTERÍSTICAS DE UNA VARIABLE ALEATORIA n-DIMENSIONAL

Dada una variable aleatoria bidimensional (X, Y), podemos definir una serie de características que resuman su distribución conjunta y sus distribuciones condicionadas.

Si $g(X, Y)$ es una variable aleatoria unidimensional, su **esperanza** es

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) \cdot f_{(X,Y)}(x_i, y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) \cdot p[X = x_i, Y = y_j] \,, \end{aligned}$$

cuando (X, Y) y, por tanto, $g(X, Y)$ son discretas, y

$$E[g(X,Y)] = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \,,$$

cuando (X, Y) y $g(X, Y)$ son continuas.

Esta definición puede generalizarse a una variable n-dimensional, $(X_1, \ldots, X_n)$, discreta o continua.

Recordemos algunas propiedades de las esperanzas de variables aleatorias n-dimensionales.

1. $E(a_1 \cdot X_1 + \cdots + a_n \cdot X_n) = a_1 \cdot E(X_1) + \cdots + a_n \cdot E(X_n)$.
   En particular, si $X_1, \ldots, X_n$ tienen la misma esperanza, μ, la esperanza de su media muestral, $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, es μ.
2. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes,

$$E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n) \,.$$

Se llama **momento centrado respecto del origen de orden r en X y de orden s en Y**, o **momento no central**, a la cantidad

$$\alpha_{r,s} = E(X^r \cdot Y^s),$$

y **momento centrado respecto de las medias de orden r en X y de orden s en Y**, o bien **momento central**, a

$$\mu_{r,s} = E[(X - \mu_X)^r \cdot (Y - \mu_Y)^s] \,, \qquad \text{donde} \qquad r, s = 0, 1, 2, \ldots$$

Es de especial interés el momento

$$\mu_{1,1} = E[(X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y)] \,,$$

denominado **covarianza** entre X e Y, y que designaremos, también, como σ_{XY}, μ_{XY} o Cov (X, Y). Si (X, Y) es una variable bidimensional discreta,

$$\text{Cov } (X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - \mu_X) \cdot (y_j - \mu_Y) \cdot p[X = x_i, Y = y_j] \,,$$

y, si (X, Y) es continua,

$$\text{Cov } (X, Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} (x - \mu_X) \cdot (y - \mu_Y) \cdot f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy \,.$$

Algunas de las propiedades más utilizadas de la covarianza son las siguientes:

1. Cov $(X, Y) = Cov(Y, X)$.
2. Cov $(X, X) = \text{Var}(X)$.
3. Cov $(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$.
4. Cov $(a \cdot X + b, c \cdot Y + d) = a \cdot c \cdot$ Cov (X, Y).
5. Cov $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \text{Cov } (X_i, Y_j)$.
6. $$\text{Cov } \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \text{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i b_i \text{Cov } (X_i, X_j) \,.$$
7. Si X e Y son variables aleatorias independientes, Cov $(X, Y) = 0$.
8. Var $(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var } (Y) + 2\text{Cov } (X, Y)$.
9. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes,

$$\text{Var } \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var } (X_i) \,.$$

10. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes de media μ y varianza σ^2, la varianza de su media muestral, $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$, vale $\frac{\sigma^2}{n}$.

El **coeficiente de correlación lineal** entre las variables X e Y,

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}\,(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}\,(X) \cdot \text{Var}\,(Y)}}\,,$$

mide el grado de relación lineal que existe entre ellas.

Si el coeficiente de correlación entre dos variables X e Y, que siempre toma valores entre -1 y 1, es igual a cero, se dice que estas variables están incorrelacionadas o que existe **incorrelación** entre ellas.

Dos propiedades de interés son:

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, están incorrelacionadas, no siendo cierto el resultado recíproco.
2. Sean las variables $U = a \cdot X + b$ y $V = c \cdot Y + d$; entonces,

$$\rho_{UV} = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} \cdot \rho_{XY}\,.$$

Según vimos en el capítulo 4, cuando un experimento aleatorio da lugar a la obtención de una variable aleatoria bidimensional (X,Y), a veces se desea estudiar la distribución de una de ellas, X, condicionada por el conocimiento de que la otra, Y, ha tomado un valor concreto, o que su valor pertenece a un cierto conjunto. Para cada una de estas distribuciones condicionadas, puede plantearse el mismo tipo de resúmenes que vimos en el capítulo anterior: medias, varianzas, medianas, etcétera.

Así, se llama **esperanza de X condicionada por $Y = y$**, siendo y un valor posible de Y, a la cantidad

$$E(X \mid Y = y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot f_{(X \mid Y=y)}(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p[X = x_i \mid Y = y]\,,$$

si (X,Y) es discreta, y

$$E(X \mid Y = y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot f_{(X \mid Y=y)}(x)\,dx\,,$$

si (X,Y) es continua.

De forma análoga se define la esperanza de X, o de una función de ella, condicionada por cualquier subconjunto de Borel.

Las esperanzas condicionadas verifican todas las propiedades generales de la esperanza de una variable unidimensional. Además,

1. Si X e Y son variables aleatorias independientes, $E(X \mid Y = y) = E(X)$.

2. $E[E(h(X) \mid Y = y)] = E[h(X)]$.

Pueden definirse los momentos condicionados como los momentos de las distribuciones condicionadas. Así, se llama **momento de X condicionado por $Y = y$ centrado respecto del origen de orden k**, o **momento condicionado no central**, a

$$E(X^k \mid Y = y) ,$$

y **momento de X condicionado por $Y = y$ centrado respecto de la media condicionada de orden k**, o **momento condicionado central**, a

$$E[(X - E(X \mid Y = y))^k \mid Y = y] , \quad \text{donde} \quad k = 0, 1, \ldots$$

En este caso, para $k = 2$ se obtiene el momento denominado **varianza de X condicionada por $Y = y$**,

$$\text{Var}\,(X \mid Y = y) = E[(X - E(X \mid Y = y))^2 \mid Y = y] ,$$

que también puede expresarse como

$$\text{Var}\,(X \mid Y = y) = E(X^2 \mid Y = y) - [E(X \mid Y = y)]^2 .$$

Entonces, la varianza de X se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\text{Var}\,(X) = E\,[\text{Var}\,(X \mid Y = y)] + \text{Var}\,\,[E(X \mid Y = y)] .$$

Con frecuencia estamos interesados en el estudio de la relación entre dos (o más) variables aleatorias, de cara a explicar una de ellas a partir de la otra (u otras) y, en última instancia, poder predecir el valor de una cuando conocemos el que toma la otra (o el resto). Trataremos de encontrar relaciones matemáticas que expliquen, de la mejor manera posible, una variable a partir de otra (u otras). Las técnicas que permiten hacerlo se agrupan bajo el nombre genérico de **regresión**.

Dada una variable aleatoria bidimensional (X, Y), se busca una función de X, $\tilde{Y} = g(X)$, que explique todo cuanto pueda a la variable Y, es decir, que proporciona algo *parecido* a Y. Para ello, trataremos de que el error, ε, que se comete al considerar $\tilde{Y}$ en lugar de Y,

$$\varepsilon = Y - \tilde{Y} = Y - g(X) ,$$

sea lo más pequeño posible. El criterio más usual para minimizar dicho error es el **criterio de los mínimos cuadrados**:

$$\min_g E(\varepsilon^2) = \min_g E[(Y - g(X))^2] .$$

Una vez decidido el criterio, el problema de la búsqueda de la función g puede enfocarse de dos maneras:

1) **Regresión con restricciones.** Buscaremos g dentro de un cierto tipo de funciones. En concreto, si exigimos que $g(X)$ sea una función lineal, es decir, $g(X) = \alpha \cdot X + \beta$, el criterio de los mínimos cuadrados proporciona la recta que mejor explica Y a partir de X: la **recta de regresión de Y sobre X**,

$$\tilde{Y} - E(Y) = \frac{\text{Cov}\,(X,Y)}{\text{Var}\,(X)} \cdot [X - E(X)]\,.$$

Haciendo el mismo planteamiento para explicar X a partir de una función lineal de Y, se obtiene

$$\tilde{X} - E(X) = \frac{\text{Cov}\,(X,Y)}{\text{Var}\,(Y)} \cdot [Y - E(Y)]\,,$$

recta de regresión de X sobre Y.

Ambas rectas pasan por el centro de gravedad de la nube de puntos, esto es, se cortan en el punto $(E(X), E(Y))$.

Al realizar la regresión de Y sobre X, se deduce que

$$\text{Var}\,(Y) = \text{Var}\,(\tilde{Y}) + \text{Var}\,(\varepsilon)\,,$$

expresión conocida como **descomposición de la varianza**, y que proporciona la varianza de la variable a explicar, Var (Y), como suma de la varianza explicada por la regresión, Var $(\tilde{Y})$, y la varianza no explicada o residual, Var (ε).

Debemos plantearnos el problema de la **bondad de ajuste**. La recta de regresión de Y sobre X es la mejor explicación lineal de Y a partir de X, pero ¿es buena dicha explicación? La bondad de la regresión puede evaluarse por el *tamaño* de los errores, es decir, por la varianza de ε, variable de esperanza nula. Como

$$\text{Var}\,(\varepsilon) = \text{Var}\,(Y)\,(1 - \rho^2)\,,$$

es el valor de ρ^2 el que informe sobre el *tamaño* de los errores y, por tanto, sobre la bondad de la regresión. Las dos situaciones extremas que pueden presentarse son las siguientes:

a) Si $\rho^2 = 1$, la recta de regresión de Y sobre X proporciona una explicación de Y perfecta, sin errores, dado que entre las variables X e Y existe una relación lineal exacta, determinista.

b) Si $\rho^2 = 0$, la recta de regresión de Y sobre X no explica nada de la variabilidad de Y. Entonces, $\tilde{Y} = E(Y)$.

Otros valores de ρ^2 se interpretan por aproximación. Así, valores altos de ρ^2 ($\rho^2 \geq 0.64$) indican relaciones más o menos lineales entre las variables y, por consiguiente, la recta de regresión de Y sobre X proporciona, en tales casos, una explicación aceptable de Y, es decir, con pocos errores. Por el contrario, valores de ρ^2 próximos a cero ponen en evidencia una escasa relación lineal entre las variables y, en consecuencia, la inconveniente explicación que de Y proporciona la recta de regresión.

La misma discusión sobre la bondad del ajuste para la recta de regresión de Y sobre X, puede trasladarse a la de X sobre Y.

Además, las pendientes de las rectas de regresión tienen el mismo signo y verifican $|p_{X\,|\,Y}| \geq |p_{Y\,|\,X}|$.

Podemos interpretar el valor del coeficiente de correlación y su signo:

Caso 1. $\rho \geq 0.8$. Existe una cierta relación lineal y creciente o directa entre las variables (correlación positiva). Cuando $\rho = 1$, las rectas, crecientes, coinciden.

Caso 2. $\rho \leq -0.8$. Existe cierta relación lineal y decreciente o inversa entre las variables (correlación negativa). Cuando $\rho = -1$, las dos rectas de regresión coinciden.

Caso 3. X e Y están incorrelacionadas ($\rho = 0$). No hay ningún indicio de linealidad entre X e Y, y no tiene ningún sentido la explicación que proporcionan las rectas de regresión, $\tilde{Y} = E(Y)$ y $\tilde{X} = E(X)$, que son perpendiculares.

Por otro lado, el cuadrado del coeficiente de correlación lineal puede escribirse como

$$\rho^2 = \frac{\text{Var}\,(\tilde{Y})}{\text{Var}\,(Y)} = \frac{\text{Var}\,(\tilde{X})}{\text{Var}\,(X)}\,,$$

con lo cual ρ^2 representa la proporción entre la varianza explicada por la regresión y la varianza a explicar.

2) **Regresión sin restricciones.** Buscaremos g entre todas las posibles funciones, sin someterla a ningún tipo de restricciones. La función obtenida de esta forma recibe el nombre de **función o curva general de regresión de Y sobre X.**

Así, se demuestra que

$$\tilde{Y} = g(X) = E(Y \mid X = x)$$

proporciona la mejor explicación de Y a partir de X, recibiendo el nombre de **función** o **curva general de regresión de Y sobre X.**

Por su parte,

$$\tilde{X} = g(Y) = E(X \mid Y = y)$$

es la **función** o **curva general de regresión de X sobre Y.**

En la regresión general de Y sobre X, volvemos a encontrar la **descomposición de la varianza**,

$$\text{Var}\,(Y) = \text{Var}\,(\tilde{Y}) + \text{Var}\,(\varepsilon)\,,$$

de la que se deduce

$$\text{Var } (\varepsilon) = \text{Var } (Y) \left[1 - \frac{\text{Var } (\tilde{Y})}{\text{Var } (Y)}\right] .$$

Por analogía con la regresión lineal, se llama **razón de correlación de Y sobre X** a

$$\eta^2_{Y \mid X} = \frac{\text{Var } (\tilde{Y})}{\text{Var } (Y)} ,$$

que tiene, en la regresión general, el mismo papel que el cuadrado del coeficiente de correlación, ρ^2, en la regresión lineal, y, al igual que éste, está comprendida entre cero y uno.

Lo anterior permite plantearse el problema de la **bondad de ajuste**.

Caso 1. Si $\eta^2_{Y \mid X} = 1$, la regresión es perfecta, en el sentido de que la función o curva general de regresión proporciona exactamente la variable Y que se trata de explicar. Existe una relación funcional entre X e Y.

Cuando $\eta^2_{Y \mid X}$ toma valores cercanos a la unidad (por convenio, si $\eta^2_{Y \mid X}$ es mayor o igual que 0.64) se interpreta todo lo anterior por aproximación, hablándose de regresiones aceptables.

Caso 2. Si $\eta^2_{Y \mid X} = 0$, la explicación que proporciona la curva de regresión es totalmente inadecuada al no existir atisbos de una relación funcional que proporcione Y a partir de X.

La discusión sobre la bondad del ajuste de la regresión general de Y sobre X puede trasladarse a la regresión de X sobre Y. Ahora, si llamamos ε' al error de la regresión,

$$\text{Var } (X) = \text{Var } (\tilde{X}) + \text{Var } (\varepsilon') ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\text{Var } (\varepsilon') = \text{Var } (X) (1 - \eta^2_{X \mid Y}) ,$$

donde $\eta^2_{X \mid Y}$, **razón de correlación de X sobre Y**, se define como

$$\eta^2_{X \mid Y} = \frac{\text{Var } (\tilde{X})}{\text{Var } (X)} .$$

En general,

$$\eta^2_{Y \mid X} \neq \eta^2_{X \mid Y} ,$$

por lo cual la bondad del ajuste de Y sobre X no tiene por qué coincidir con la de X sobre Y.

Las razones de correlación pueden interpretarse, también, como el porcentaje de variabilidad explicada sobre la variabilidad a explicar. La regresión general (sin restricciones) proporciona una mejor explicación que la regresión lineal (con restricciones), es decir,

$$\eta^2_{Y \mid X} \geq \rho^2 \qquad \text{y} \qquad \eta^2_{X \mid Y} \geq \rho^2 .$$

En el caso de que la curva de regresión de Y sobre X sea una recta,

$$\rho^2 = \eta^2_{Y \mid X} ,$$

siendo la bondad del ajuste igual para las regresiones general y lineal. Lo mismo sucederá cuando la curva de regresión de X sobre Y sea una recta.

Definamos, por último, la esperanza de una variable aleatoria n-dimensional y su matriz de varianzas-covarianzas.

Si $\mathbf{X}$ una variable aleatoria n-dimensional,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} ,$$

su esperanza es la matriz

$$E(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix} ,$$

y su matriz de varianzas-covarianzas es

$$V(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} ,$$

con

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \text{Var } (X_i) & i = j \\ \text{Cov } (X_i, X_j) & i \neq j \end{cases}$$

La matriz de varianzas-covarianzas puede expresarse como

$$V(\mathbf{X}) = E[(\mathbf{X} - E(\mathbf{X})) \cdot (\mathbf{X} - E(\mathbf{X}))']$$

o como

$$V(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}\mathbf{X}') - E(\mathbf{X})\,(E(\mathbf{X}))'\,.$$

Algunas propiedades de interés para las matrices de momentos de una variable n-dimensional son:

1. Si $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son dos matrices de constantes de dimensión $m \times n$ y $m \times 1$, respectivamente, entonces,

$$E(\mathbf{Y}) = E(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot E(\mathbf{X})+\mathbf{B}$$

y

$$V(\mathbf{Y}) = V(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot V(\mathbf{X})\cdot\mathbf{A}'\,.$$

2. $V(\mathbf{X})$ es una matriz simétrica y semidefinida positiva, siendo definida positiva si, y sólo si, no existe ninguna combinación lineal entre las variables $X_1,\ldots,X_n$.

Ejercicios propuestos

¶ 6.1. *a)* Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta y sea $Z = g(X,Y)$ una función de (X,Y). Demuéstrese que, si existen,

$$E[g(X,Y)] = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)\cdot p[X=x_i, Y=y_j]$$

y

$$E(Z) = \sum_{h=1}^{\infty} z_h \cdot p[Z=z_h]\,,$$

coinciden.

b) Se lanzan dos dados perfectos de forma independiente. Sean X e Y las variables aleatorias que recogen el resultado de cada uno de los dos lanzamientos. Hállese la suma esperada de las puntuaciones, es decir, $E(X+Y)$, utilizando las dos expresiones del apartado *a)*.

¶ 6.2. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional continua y sea $Z = g(X,Y)$ una función de (X,Y) tal que la transformación $z = g(x,y)$, $u = x$ verifica las condiciones del teorema del cambio de variable para variables aleatorias bidimensionales continuas. Demuéstrese que, si existen,

$$E[g(X,Y)] = \int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$$

y

$$E(Z) = \int_{z=-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z)\, dz$$

coinciden.

6.3. Sean X e Y dos variables aleatorias, siendo Y degenerada, es decir, constante. Pruébese que Cov $(X, Y) = 0$.

6.4. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta cuya función de probabilidad conjunta viene dada en la siguiente tabla de doble entrada:

$X \backslash Y$	0	1	
-1	0.1	0.2	0.3
0	0.3	0.1	0.4
1	0.1	0.2	0.3
	0.5	0.5	

Compruébese que la covarianza entre ambas variables es igual a cero, mientras que X e Y son dependientes.

¶ **6.5.** Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias incorrelacionadas de media μ y varianza σ^2, y sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales cualesquiera.

a) Calcúlese la varianza de la combinación lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$.

b) ¿Para qué valores $a_1, \ldots, a_n$ la combinación lineal anterior tiene media μ y varianza mínima?

6.6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias incorrelacionadas de varianza σ^2, y sean $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ constantes. ¿Qué deben cumplir estas constantes para que $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ estén incorrelacionadas?

6.7. Sea X una variable aleatoria que toma los valores -1, 0 y 1, todos ellos con la misma probabilidad. Demuéstrese que X y X^2 están incorrelacionadas, pero son dependientes.

6.8. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese el coeficiente de correlación entre las variables $X \cdot Y$ y $(1 - X)(1 - Y)$.

6.9. Sean X, Y y Z variables aleatorias incorrelacionadas con igual varianza. Hállese el coeficiente de correlación entre $X+Y$ y $X+Z$.

6.10. Sean X e Y los salarios mensuales percibidos por dos empleados de un banco. Suponiendo que estas dos variables están incorrelacionadas:

a) Hállese el coeficiente de correlación entre la ganancia conjunta de estos empleados y su diferencia salarial.

b) Demuéstrese que, si X e Y están igualmente distribuidas, las variables definidas en el apartado anterior están incorrelacionadas.

6.11. Sean X e Y dos variables aleatorias con varianza σ^2 y coeficiente de correlación ρ. Calcúlese la varianza de la media aritmética de X e Y. ¿Qué valor de ρ minimiza dicha varianza?

6.12. Se realiza un estudio sobre la condición de los trabajadores de un sector del pequeño comercio. Siendo X el número de trabajadores por establecimiento e Y el número de los que no pertenecen a la familia propietaria del mismo, se ha obtenido la siguiente función de probabilidad conjunta:

$X\backslash Y$	0	1	2
1	2/9	1/9	0
2	1/9	2/9	0
3	0	1/9	2/9

a) Hállense las curvas y rectas de regresión y estúdiese la bondad de los ajustes. Dibújense estas curvas y rectas sobre la correspondiente nube de puntos en un sistema cartesiano.

b) Calcúlese la función de distribución del número de trabajadores que pertenecen a la familia propietaria.

c) Si un establecimiento cuenta a lo sumo con dos trabajadores, ¿cuál será el número esperado de los que pertenecen a la familia?

6.13. Un estudio sociológico ha estimado que el número total de habitaciones, X, y el número de dormitorios, Y, de las viviendas de una gran ciudad, se distribuyen de acuerdo con la siguiente función de probabilidad:

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0.05	0	0	0
2	0.10	0	0	0
3	0	0.35	0	0
4	0	0.10	0.35	0
5	0	0	0.01	0.02
6	0	0	0	0.02

a) Hállense las curvas y rectas de regresión y estúdiese la bondad de los ajustes.

b) Una vivienda tiene más de 3 habitaciones, ¿cuál es el número esperado de dormitorios?

6.14. Se elige un número al azar, X, entre los cuatro primeros números naturales: 1, 2, 3 y 4. Elegido un determinado número, se hace una segunda elección, Y, entre los mismos números, excluidos los inferiores al ya elegido.

a) Hállese la distribución de (X, Y).

b) Calcúlense las curvas y rectas de regresión, estudiando la bondad de los ajustes.

c) Dibújense, sobre un sistema de ejes cartesianos, la nube de puntos y las curvas y rectas de regresión.

d) Sabiendo que el segundo número elegido fue mayor que 2, hállese el valor esperado del producto de los dos números elegidos.

6.15. La variable aleatoria bidimensional (X, Y) representa la renta disponible y el ahorro asociado que, efectuando una cambio de unidades, tiene la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese la recta de regresión que explica el ahorro en función de la renta.

b) Obténgase el ahorro esperado para un nivel de renta fijo x.

6.16. Con objeto de llevar a cabo una campaña publicitaria de lanzamiento de una nueva marca de cereales para el desayuno, se realiza un estudio estadístico sobre los hábitos en el desayuno de las familias de una cierta ciudad. De este análisis se obtiene que la proporción de individuos que toman leche en una familia, X, y la de los que toman cualquier tipo de infusión, Y, responde a la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x+y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállense las rectas y curvas de regresión.

b) Estúdiese la bondad de los ajustes anteriores.

c) ¿Cuál es la proporción esperada de consumidores de leche en una familia en la que el 70 % de sus miembros toma infusiones?

d) Si en una familia la mitad de sus individuos toma leche, ¿cuál es la proporción esperada de individuos que no toman ni infusiones ni leche suponiendo que ningún individuo toma ambas bebidas?

6.17. Una persona contrae el virus de una cierta enfermedad que necesita hospitalización. Sea X la variable aleatoria que designa el tiempo, en semanas, que tarda en manifestarse la enfermedad. Sea Y la variable aleatoria que expresa el tiempo total, también en semanas, desde que el virus es contraído, hasta que el paciente es dado de alta. Se supone que en el mismo momento en que los síntomas aparecen, el enfermo es hospitalizado.

Se ha estimado que la variable aleatoria (X, Y) tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-y} & 0 \leq x \leq y < \infty \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállense las curvas y las rectas de regresión y estúdiese la bondad de los ajustes.

b) Represéntense las curvas y rectas de regresión en un sistema de ejes cartesianos sobre el recinto de valores posibles de (X, Y).

c) Calcúlese la probabilidad de que un paciente esté hospitalizado durante menos de una semana.

d) Suponiendo que un paciente sale hoy del hospital después de 5 días de tratamiento, ¿cuál es la probabilidad de que contrajera el virus hace menos de dos semanas?

6.18. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional cuya función de densidad conjunta es

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in S \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde S es el recinto rayado en la figura 6.1.

a) Estúdiese la independencia y la incorrelación entre X e Y.

b) Hállense las curvas y rectas de regresión y discútase la bondad de los ajustes.

c) Calcúlese $p\left[X \cdot Y > \frac{1}{8}\right]$.

6.19. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} k & \text{si } (x,y) \in S \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde S es el recinto señalado en la figura 6.2.

a) Hállese el valor de la constante k.

b) Compruébese que las variables X e Y son dependientes, pero están incorrelacionadas.

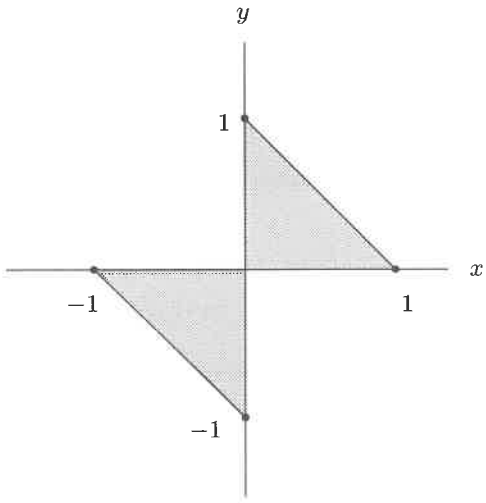


FIG. 6.1.

c) Obténganse las rectas y las curvas de regresión y coméntese el ajuste en todos los casos.

d) Calcúlese el valor esperado de Y, si $X - Y$ es igual a $\frac{1}{4}$.

6.20. Se quiere estudiar la renta mensual, X, y el consumo en alimentación, Y, de las familias de un cierto país. El consumo mensual en alimentación, en cientos de miles de pesetas, de las familias con una cantidad x de renta, se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} 8 \cdot \dfrac{y}{x^2} & 0 < y < \dfrac{x}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por su parte, la renta mensual, X, expresada en las mismas unidades, es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot x^2 e^{-x} & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la mejor explicación lineal del consumo en alimentación a partir de la renta mensual. Estúdiese la bondad de este ajuste.

b) Si una familia tiene unos ingresos mensuales de 250.000 pesetas, ¿cuál es la cantidad esperada que dedica a alimentación?

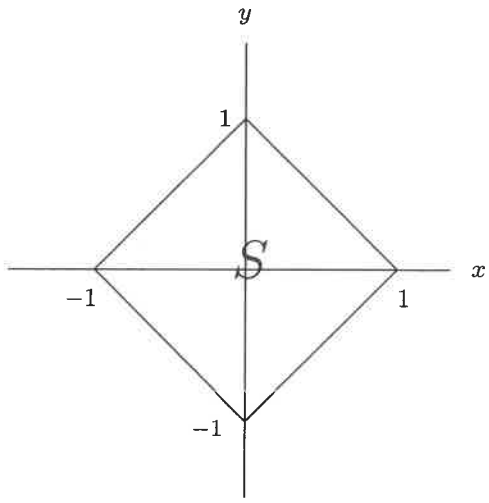


FIG. 6.2.

c) Obténgase la renta mensual media de una familia, sabiendo que gasta 50.000 pesetas en alimentación.

6.21. Dada una variable aleatoria (X, Y), interesa explicar la variable Y a partir de la variable X, bien mediante una curva del tipo $y = a \cdot |x|$, bien mediante una parábola centrada en el origen, $y = b \cdot x^2$.

a) ¿Cuáles son los valores de a y de b que proporcionan un mejor ajuste, en cada caso, por el método de mínimos cuadrados?

b) Hállense las funciones de regresión obtenidas en el apartado anterior para la variable aleatoria bidimensional (X, Y) cuya distribución viene dada por la tabla:

$X \backslash Y$	0	1	2
−1	0	1/6	1/6
0	2/6	0	0
1	0	2/6	0

c) De acuerdo con el criterio mínimo cuadrático, ¿cuál de las dos regresiones explica mejor Y a partir de X en la distribución anterior?

d) Calcúlese $E(Y \mid X = x)$ y Var $(Y \mid X = x)$.

6.22. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional. Sea $\tilde{Y}$ la función de X dada por la recta de regresión de Y sobre X, y ε el error de la regresión.

a) Compruébese que $\rho_{Y\hat{Y}} = |\rho_{XY}|$.

b) Demuéstrese que $\tilde{Y}$ y ε están incorrelacionadas.

c) Hállese el coeficiente de correlación entre X e $\tilde{Y}$ y entre X y ε.

d) Demuéstrese que $\rho^2_{Y\varepsilon} = 1 - \rho^2_{XY}$.

e) Sea (X, Y) una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

$X\backslash Y$	-1	0	1
-1	$2/6$	0	$1/6$
1	$1/6$	$1/6$	$1/6$

Compruébense, para esta distribución, todos los resultados anteriores.

¶ **6.23.** Sean X, Y y Z tres variables de esperanza cero. Se define $\rho_{XY\,|\,Z}$ como el coeficiente de correlación entre las variables $X - b_{X\,|\,Z} \cdot Z$ e $Y - b_{Y\,|\,Z} \cdot Z$, donde

$$b_{X\,|\,Z} = \frac{\text{Cov}\,(X, Z)}{\text{Var}\,(Z)} \qquad \text{y} \qquad b_{Y\,|\,Z} = \frac{\text{Cov}\,(Y, Z)}{\text{Var}\,(Z)}\,,$$

es decir, son los coeficientes de la regresión de X sobre Z y de Y sobre Z, respectivamente. Demuéstrese que

$$\rho_{XY\,|\,Z} = \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{YZ}}{(1 - \rho^2_{XZ})^{1/2} \cdot (1 - \rho^2_{YZ})^{1/2}}\,.$$

6.24. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional cuya función de densidad es

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese $E(X\,|Y = y)$, Var $(X\,|Y = y)$, $E(Y\,|X = x)$ y Var $(Y\,|X = x)$.

b) Hállese la matriz de esperanzas y la matriz de varianzas-covarianzas de (X, Y).

c) Obténganse las esperanzas, varianzas y covarianza de U y V, donde $U = 2X + 3Y$ y $V = X - 2Y$.

6.25. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ variables aleatorias incorrelacionadas con media 0 y varianza σ^2. Definimos las variables $X_1 = Y_1$ y $X_i = \alpha \cdot X_{i-1} + Y_i$ $(i = 2, \ldots, n)$, donde α es una constante. Hállese la matriz de esperanzas y la matriz de varianzas-covarianzas de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 6.1.

a) En lugar de agrupar en $E[g(X,Y)]$ los términos del sumatorio de acuerdo con los valores de x_i e y_j, los agrupamos primero según los valores de $g(x_i, y_j)$. Así,

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j) \cdot p[X = x_i, Y = y_j] = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\substack{i,j \mid \\ g(x_i,y_j)=z_h}} g(x_i,y_j) \cdot p[X = x_i, Y = y_j] . \end{aligned}$$

Puesto que para todos los sumandos del segundo sumatorio, $g(x_i, y_j)$ es el mismo z_h, este valor puede salir como factor común del segundo sumatorio y, por tanto,

$$E[g(X,Y)] = \sum_{h=1}^{\infty} z_h \sum_{\substack{i,j \mid \\ g(x_i,y_j)=z_h}} p[X = x_i, Y = y_j] .$$

Pero,

$$\sum_{\substack{i,j \mid \\ g(x_i,y_j)=z_h}} p[X = x_i, Y = y_j] = p[g(X,Y) = z_h] = p[Z = z_h]$$

y, en definitiva,

$$E[g(X,Y)] = \sum_{h=1}^{\infty} z_h \cdot p[Z = z_h] = E(Z) .$$

b) La distribución conjunta es sencilla de obtener, pues teniendo en cuenta que X e Y son independientes,

$$p[X = x, Y = y] = p[X = x] \cdot p[Y = y] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} ,$$

para $x, y = 1, \ldots, 6$.

La esperanza de la variable suma, $X + Y$, es

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{x=1}^{6} \sum_{y=1}^{6} (x+y) \cdot p[X = x, Y = y] = \\ &= (1+1)\frac{1}{36} + \cdots + (6+6)\frac{1}{36} = 7 \text{ puntos.} \end{aligned}$$

También podríamos haber obtenido, previamente, la distribución de la variable suma, $Z = X + Y$. La siguiente tabla describe su función de probabilidad:

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p[Z = z]$	1/36	2/26	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Entonces,

$$E(X+Y) = E(Z) = 2 \cdot \frac{1}{36} + \cdots + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7 \text{ puntos.}$$

Como se ve, las dos técnicas conducen al mismo resultado.

Ejercicio 6.2.
Hagamos el cambio de variable $Z = g(X,Y)$, $U = X$. Este cambio resulta de la transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que, a cada punto (x,y) del plano lo envía en (u,z), con $u = x$ y $z = g(x,y)$. Si hacemos un cambio de variable en la integral doble del enunciado, teniendo en cuenta que la transformación inversa de la anterior es $x = u$, $y = h(u,z)$, el jacobiano de la transformación vale

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial u} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial z}$$

y, en consecuencia,

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} g(x,y) \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy = \\ &= \int_{z=-\infty}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} z \cdot f_{(X,Y)}(x(u,z), y(u,z)) \cdot |J|\, du\, dz \,. \end{aligned}$$

Pero la expresión $f_{(X,Y)}(x(u,z), y(u,z)) \cdot |J|$ es la función de densidad conjunta de (U,Z). Por tanto,

$$\begin{aligned} E[g(X,Y)] &= \int_{z=-\infty}^{\infty} z \cdot \left(\int_{u=-\infty}^{\infty} f_{(U,Z)}(u,z)\, du \right) dz = \\ &= \int_{z=-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z)\, dz \,, \end{aligned}$$

ya que la función de densidad marginal de la variable Z vale

$$f_Z(z) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f_{(U,Z)}(u,z)\, du \,.$$

Ejercicio 6.3.
Si Y es una constante k, $p[Y = k] = 1$, con lo cual, $E(Y) = k$. En consecuencia, la función de (X,Y),

$$(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))$$

vale cero, ya que

$$Y - E(Y) = k - k = 0 \,.$$

Por tanto,

$$\text{Cov}\,(X,Y) = E[(X - E(X))\,(Y - E(Y))] = E(0) = 0 \,.$$

Podría, asimismo, obtenerse el resultado teniendo en cuenta que, si $Y = k$, donde k es una constante,

$$E(X \cdot Y) = E(X \cdot k) = k \cdot E(X) = E(Y) \cdot E(X).$$

Pero,

$$\text{Cov}\ (X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)\ ,$$

con lo que dicha covarianza es nula.

Ejercicio 6.4.

Fácilmente se comprueba que X e Y son dependientes; por ejemplo,

$$p[X = -1, Y = 0] \neq p[X = -1] \cdot p[Y = 0]\ .$$

Calculemos las esperanzas de X e Y y la de su producto:

$$E(X) = -1 \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.3 = 0$$

y

$$E(Y) = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5\ .$$

Además, la distribución de la variable $X \cdot Y$ es

$$X \cdot Y : \left| \begin{array}{ll} -1 & p[X \cdot Y = -1] = 0.2 \\ 0 & p[X \cdot Y = 0] = 0.6 \\ 1 & p[X \cdot Y = 1] = 0.2 \end{array} \right.$$

y, por tanto, $E(X \cdot Y) = 0$, con lo que, evidentemente,

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)\ .$$

Es decir, la esperanza del producto es el producto de las esperanzas, siendo X e Y dependientes.

Ejercicio 6.5.

a) En el resumen de este capítulo comentamos que la varianza de una combinación lineal de variables es la suma de una combinación lineal de sus varianzas y otra de sus covarianzas dos a dos. Dado que estas últimas son iguales a cero, pues las variables están incorrelacionadas,

$$\text{Var}\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \text{Var}\ (X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ .$$

b) La esperanza de dicha combinación lineal vale

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Por tanto, para que esta esperanza sea igual a μ, los coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, deben cumplir la condición

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 .$$

Además, teniendo en cuenta el apartado *a*), la minimización de la varianza de la combinación lineal equivale a la de la suma $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$.

En definitiva, se trata de minimizar dicha suma de cuadrados, sujeta a la restricción lineal $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

La función a minimizar es, entonces, la lagrangiana

$$L(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - 1\right) .$$

Derivando con respecto a las $n + 1$ variables e igualando a cero dichas derivadas parciales, deducimos el sistema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial a_1} &= 2a_1 - \lambda = 0 \\
&\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
\frac{\partial L}{\partial a_n} &= 2a_n - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i - 1 = 0 .
\end{aligned}$$

Las n primeras condiciones equivalen a

$$a_1 = \frac{\lambda}{2}, \ldots, \; a_n = \frac{\lambda}{2}$$

y, por tanto, a

$$a_1 = \cdots = a_n .$$

Sustituyendo estos resultados en la última condición que, como siempre ocurre en este tipo de ejercicios, coincide con la restricción, se obtiene

$$a_1 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$$

y, consecuentemente, $\lambda = \frac{2}{n}$.

Para comprobar si existe un mínimo en la solución encontrada, debemos estudiar, a través de la matriz hessiana orlada, si se cumplen las condiciones de segundo orden, lo cual no resulta sencillo. Llamando $f(a_1,\ldots,a_n)$ a $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$, esto es, a la función a minimizar, y $g(a_1,\ldots,a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i - 1$ (escribimos, pues, la restricción en la forma $g(a_1,\ldots,a_n) = 0$)), la hessiana es

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial a_n} \\ \frac{\partial g}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial a_n^2} \end{pmatrix}$$

En nuestro caso, la matriz vale

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

Para que la solución obtenida sea un mínimo, tienen que ser negativos los menores principales

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad |H_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \ldots \quad \text{y} \quad |H_{n+1}| = |H|.$$

Pero, desarrollando uno cualquiera de estos menores por la última fila, se comprueba que

$$H_k = 2 \cdot H_{k-1} - 2^{k-2} \qquad k = 3,\ldots,n+1.$$

Ahora bien, $H_2 = -1$ es negativo, por lo cual, aplicando la fórmula recurrente que acabamos de obtener, H_3 es, también, negativo, ya que

$$H_3 = 2 \cdot H_2 - 2^{3-2}$$

es la suma de dos números negativos.

De la misma forma se comprueba sucesivamente que todos los menores principales son negativos. En definitiva, la mínima varianza se obtiene cuando todos los coeficientes valen $\frac{1}{n}$, esto es, para la combinación lineal $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Ejercicio 6.6.
Llamemos μ_i a $E(X_i)$, para $i = 1, \ldots, n$. Como

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \ ,$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i) \ .$$

En consecuencia, la covarianza entre las variables $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ y $\sum_{i=1}^{n} b_i X_i$, es decir,

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i X_i - E\left(\sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right)\right)\right]$$

es

$$E\left[\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i (X_i - \mu_i)\right)\right] =$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i E[(X_i - \mu_i)^2] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^{n} a_i b_j E[(X_i - \mu_i) \cdot (X_j - \mu_j)] \ .$$

Como las variables están incorrelacionadas, se cumplirá

$$\text{Cov}\ (X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_i) \cdot (X_j - \mu_j)] = 0$$

para $i \neq j$. Por tanto,

$$\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{n} b_j X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i E[(X_i - \mu_i)^2] = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

En definitiva, la condición para que ambas combinaciones lineales estén incorrelacionadas es que $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ sea igual a cero.

Ejercicio 6.7.
Se comprueba sin dificultad que $E(X) = 0$ y $E(X^2) = \frac{2}{3}$. Además,

$$E(X \cdot X^2) = E(X^3) = 0 \ .$$

En consecuencia,

$$\text{Cov}\ (X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2) = 0$$

y, por consiguiente, X y X^2 están incorrelacionadas.

Observará el lector que, de hecho, si una variable aleatoria es simétrica respecto del origen, como lo es la del enunciado, las variables X y X^2 están incorrelacionadas.

Veamos que las variables X y X^2 son dependientes. Este hecho es razonable, ya que el conocimiento de X no sólo condiciona, sino que determina, el de X^2. Probémoslo formalmente.

La distribución conjunta de (X, X^2) viene dada por la siguiente tabla de doble entrada:

$X^2 \backslash X$	-1	0	1	
0	0	$1/3$	0	$1/3$
1	$1/3$	0	$1/3$	$2/3$
	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

En dicha tabla se observa que la función de probabilidad conjunta no coincide con el producto de las marginales. Así, por ejemplo,

$$p[X = -1, X^2 = 0] = 0 \,,$$

mientras que

$$p[X = -1] \cdot p[X^2 = 0] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \,.$$

Ejercicio 6.8.

Calculemos, primeramente, los momentos de órdenes uno y dos de X e Y. Se obtiene con facilidad que

$$E(X) = E(Y) = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad E(X^2) = E(Y^2) = \frac{1}{3} \,.$$

Sean $U = X \cdot Y$ y $V = (1 - X)(1 - Y)$. Obsérvese que las variables X y $(1 - X)$ están igualmente distribuidas, al igual que ocurre con las variables Y y $(1 - Y)$, ya que X e Y son simétricas con respecto a $\frac{1}{2}$. En definitiva, U y V estarán igualmente distribuidas, hecho que nos ahorrará algunos cálculos. Así,

$$E(U) = E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

y, por el comentario anterior, $E(V) = \frac{1}{4}$.

Además, si X e Y son independientes, también lo son X^2 e Y^2, con lo cual,

$$E(U^2) = E(X^2 \cdot Y^2) = E(X^2) \cdot E(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

y $E(V^2) = \frac{1}{9}$. En consecuencia,

$$\text{Var}\,(U) = \text{Var}\,(V) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144} \,.$$

Obtengamos la covarianza entre ambas variables. La esperanza de su producto vale

$$E(U \cdot V) = E[XY \cdot (1 - X)(1 - Y)] = E[(X(1 - X)) \cdot (Y(1 - Y))] \,.$$

Pero $X(1-X)$ e $Y(1-Y)$ son independientes al serlo X e Y, por lo que $E(U \cdot V) = E[X(1-X)] \cdot E[Y(1-Y)]$. Como

$$E[Y(1-Y)] = E[X(1-X)] = E(X) - E(X^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

entonces,

$$E(U \cdot V) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

y

$$\text{Cov}\,(U,V) = E(U \cdot V) - E(U) \cdot E(V) = \frac{1}{36} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{5}{144}.$$

En definitiva, el coeficiente de correlación lineal entre U y V vale

$$\rho_{U,V} = \frac{-5/144}{7/144} = -\frac{5}{7}.$$

Ejercicio 6.9.
Calculemos las varianzas de las dos nuevas variables y su covarianza. Puesto que las tres variables iniciales están incorrelacionadas, llamando σ^2 a la varianza de cada una de las tres variables, se cumple

$$\text{Var}\,(X+Y) = \text{Var}\,(X) + \text{Var}\,(Y) = 2\sigma^2$$

y

$$\text{Var}\,(X+Z) = \text{Var}\,(X) + \text{Var}\,(Z) = 2\sigma^2.$$

Denotando por μ_X, μ_Y y μ_Z a las esperanzas de las variables,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\,(X+Y, X+Z) &= E[(X+Y-(\mu_X+\mu_Y)) \cdot (X+Z-(\mu_X+\mu_Z))] = \\
&= E[((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y)) \cdot ((X-\mu_X)+(Z-\mu_Z))] = \\
&= \text{Var}\,(X) + \text{Cov}\,(X,Z) + \text{Cov}\,(X,Y) + \text{Cov}\,(Y,Z) = \\
&= \text{Var}\,(X) = \sigma^2,
\end{aligned}$$

ya que $\text{Cov}\,(X,Z) = \text{Cov}\,(X,Y) = \text{Cov}\,(Y,Z) = 0$, por estar X, Y y Z incorrelacionadas. En definitiva,

$$\rho_{X+Y,X+Z} = \frac{\text{Cov}\,(X+Y, X+Z)}{\sqrt{\text{Var}\,(X+Y) \cdot \text{Var}\,(X+Z)}} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\sigma^2 \cdot 2\sigma^2}} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 6.10.
a) La ganancia salarial conjunta de ambos es $G = X + Y$ y su diferencia salarial es $D = X - Y$ (podría entenderse que la diferencia salarial es $|X-Y|$, pero el enunciado no suministra información suficiente para resolver el ejercicio si hacemos esta interpretación). Llamando μ_X y μ_Y a las esperanzas de ambos salarios y σ_X^2 y σ_Y^2 a sus varianzas respectivas,

$$\begin{aligned}\text{Cov}\,(G,D) &= E[(G-E(G))\cdot(D-E(D))] = \\ &= E[((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y))\cdot((X-\mu_X)-(Y-\mu_Y))] = \\ &= \text{Var}\,(X)-\text{Var}\,(Y)=\sigma_X^2-\sigma_Y^2\,.\end{aligned}$$

Además, como X e Y están incorrelacionadas,

$$\text{Var}\,(G)=\text{Var}\,(X+Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$$

y

$$\text{Var}\,(D)=\text{Var}\,(X-Y)=\sigma_X^2+\sigma_Y^2\,.$$

En definitiva,

$$\rho_{G,D}=\frac{\text{Cov}\,(G,D)}{\sqrt{\text{Var}\,(X)\cdot\text{Var}\,(Y)}}=\frac{\sigma_X^2-\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\,.$$

b) Si X e Y están igualmente distribuidas, σ_X^2 es igual a σ_Y^2 y, por tanto, $\rho_{G,D}=0$.

Obsérvese que, para que G y D estén incorrelacionadas, basta con que X e Y estén igualmente dispersas. Ni siquiera hace falta, por tanto, suponer que X e Y están incorrelacionadas (esta suposición sólo ayuda a obtener una expresión más sencilla de las varianzas de G y D), siempre que se suponga que G y D tienen varianza no nula, ya que, si se anulase alguna de ellas, el coeficiente de correlación no existiría. Por ejemplo, si X fuera igual a Y, entonces $G=2X$ y $D=0$; en este caso, el coeficiente de correlación no existiría, aunque sí su covarianza, que sería igual a cero.

Ejercicio 6.11.

La covarianza entre X e Y vale

$$\text{Cov}\,(X,Y)=\rho\cdot\sqrt{\text{Var}\,(X)\cdot\text{Var}\,(Y)}=\rho\cdot\sigma^2\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) &= \tfrac{1}{4}\cdot\text{Var}\,(X+Y)= \\ &= \frac{1}{4}[\text{Var}\,(X)+\text{Var}\,(Y)+2\text{Cov}\,(X,Y)]= \\ &= \frac{1}{4}\,(\sigma^2+\sigma^2+\rho\,\sigma^2)=\frac{2+\rho}{4}\cdot\sigma^2\,.\end{aligned}$$

Esta varianza se minimiza si ρ toma su menor valor, esto es, si $\rho=-1$. La varianza de la media aritmética vale, entonces, $\frac{\sigma^2}{4}$.

Obsérvese que el valor máximo de dicha varianza se obtiene para $\rho=1$ y vale $\frac{3}{4}\cdot\sigma^2$. En consecuencia, la media aritmética de dos variables está siempre menos dispersa que cada una de ellas.

Ejercicio 6.12.

a) Las columnas de la siguiente tabla presentan las distribuciones de Y condicionadas por los distintos valores de X:

	$p[Y = y \mid X = x]$		
Y	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
0	2/3	1/3	0
1	1/3	2/3	1/3
2	0	0	2/3

A partir de las probabilidades condicionadas dadas por la tabla anterior, se calculan, sin dificultad, las esperanzas de Y condicionadas por los distintos valores de X. Así,

$$E(Y \mid X = 1) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0 = \frac{1}{3} .$$

De la misma forma, se obtienen las esperanzas

$$E(Y \mid X = 2) = \frac{2}{3}$$

y

$$E(Y \mid X = 3) = \frac{5}{3} .$$

Por tanto, la función o curva general de regresión de Y sobre X es

$$\tilde{Y} = E(Y \mid X = x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x = 1 \\ 2/3 & \text{si } x = 2 \\ 5/3 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

esto es, está formada por los puntos

$$\left(1, \frac{1}{3}\right), \quad \left(2, \frac{2}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(3, \frac{5}{3}\right) .$$

Análogamente, las columnas de la siguiente tabla describen las distribuciones de X condicionadas por los valores de Y:

	$p[X = x \mid Y = y]$		
X	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
1	2/3	1/4	0
2	1/3	2/4	0
3	0	1/4	1

A partir de estas distribuciones de probabilidad se hallan las esperanzas condicionadas,

$$E(X \mid Y = 0) = \frac{4}{3} , \quad E(X \mid Y = 1) = 2 \quad \text{y} \quad E(X \mid Y = 2) = 3 ,$$

de modo idéntico a las anteriormente calculadas. La curva de regresión de X en Y es, por tanto,

$$\tilde{X} = E(X \mid Y = y) = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{si } y = 0 \\ 2 & \text{si } y = 1 \\ 3 & \text{si } y = 2 \end{cases}$$

es decir, está formada por los puntos

$$\left(\frac{4}{3}, 0\right), \quad (2,1) \quad \text{y} \quad (3,2)\,.$$

Para obtener las rectas de regresión, tenemos que calcular las esperanzas y varianzas de ambas variables, así como su covarianza. Dado que la función de probabilidad marginal de la variable X es

$$p[X=1] = \frac{1}{3}\,, \quad p[X=2] = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad p[X=3] = \frac{1}{3}\,,$$

fácilmente se obtiene $\mu_X = 2$. Análogamente, la función de probabilidad marginal de la variable Y es

$$p[Y=0] = \frac{1}{3}\,, \quad p[Y=1] = \frac{4}{9} \quad \text{y} \quad p[Y=2] = \frac{2}{9}\,,$$

y, por consiguiente, $\mu_Y = \frac{8}{9}$.

Mediante las anteriores distribuciones marginales, se calculan $E(X^2) = \frac{14}{3}$ y $E(Y^2) = \frac{4}{3}$. En consecuencia, $\sigma_X^2 = \frac{2}{3}$ y $\sigma_Y^2 = \frac{44}{81}$.

Por otro lado, utilizando la tabla de doble entrada del enunciado, esto es, la función de probabilidad conjunta de ambas variables, resulta

$$E(X \cdot Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{20}{9}\,,$$

de donde se deduce la covarianza entre ambas variables,

$$\text{Cov}\,(X,Y) = E(X \cdot Y) - \mu_X \cdot \mu_Y = \frac{20}{9} - \frac{16}{9} = \frac{4}{9}\,.$$

Estamos en condiciones de escribir las ecuaciones de ambas rectas de regresión; así, la de Y sobre X es

$$y - \frac{8}{9} = \frac{4/9}{2/3}\,(x-2)$$

que, una vez simplificada se escribe como

$$y = \frac{2}{3} \cdot x - \frac{4}{9}\,.$$

La recta de regresión de X sobre Y tiene por ecuación

$$x - 2 = \frac{4/9}{44/81}\left(y - \frac{8}{9}\right)\,,$$

que, simplificando, se convierte en

$$x = \frac{9}{11} \cdot y + \frac{14}{11}$$

o bien, en la forma habitual,

$$y = \frac{11}{9} \cdot x - \frac{14}{9} .$$

A modo de comprobación puede obtener el lector el punto de corte de ambas rectas, que resulta ser el *centro de gravedad* de la distribución de probabilidades conjunta, esto es, el punto $(2, \frac{8}{9})$.

Estudiemos la bondad de los ajustes. Para las curvas generales de regresión este estudio se realiza a través de

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\text{Var}\,(\tilde{Y})}{\text{Var}\,(Y)} \qquad \text{y} \qquad \eta^2_{X|Y} = \frac{\text{Var}\,(\tilde{X})}{\text{Var}\,(X)} ,$$

razones de correlación de las curvas generales de regresión de Y sobre X y de X sobre Y, respectivamente.

La distribución de la variable $\tilde{Y}$ es

$$\tilde{Y}: \left| \begin{array}{ll} 1/3 & p[\tilde{Y} = 1/3] = p[X = 1] = 1/3 \\ 2/3 & p[\tilde{Y} = 2/3] = p[X = 2] = 1/3 \\ 5/3 & p[\tilde{Y} = 5/3] = p[X = 3] = 1/3 \end{array} \right.$$

de donde se deduce que $E(\tilde{Y}) = \frac{8}{9}$ y $E(\tilde{Y}^2) = \frac{10}{9}$. Por tanto,

$$\text{Var}\,(\tilde{Y}) = E(\tilde{Y}^2) - [E(\tilde{Y})]^2 = \frac{10}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{26}{81} .$$

Obsérvese que la esperanza de la variable $\tilde{Y}$ coincide con la esperanza de la variable Y, pues

$$E(\tilde{Y}) = E[E(Y \mid X = x)] = E(Y) = \frac{8}{9} .$$

Análogamente, la distribución de la variable $\tilde{X}$ es

$$\tilde{X}: \left| \begin{array}{ll} 4/3 & p[\tilde{X} = 4/3] = p[Y = 0] = 1/3 \\ 2 & p[\tilde{X} = 2] = p[Y = 1] = 4/9 \\ 3 & p[\tilde{X} = 3] = p[Y = 2] = 2/9 \end{array} \right.$$

con lo cual, $E(\tilde{X}) = E(X) = 2$, $E(\tilde{X}^2) = \frac{118}{27}$ y, consecuentemente,

$$\text{Var}\,(\tilde{X}) = E(\tilde{X}^2) - [E(\tilde{X})]^2 = \frac{118}{27} - 2^2 = \frac{10}{27} .$$

El cálculo de las varianzas de las variables $\tilde{Y}$ y $\tilde{X}$ permite obtener las razones de correlación:

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\text{Var}\,(\tilde{Y})}{\text{Var}\,(Y)} = \frac{26/81}{44/81} = \frac{13}{22} = 0.59$$

y

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{\text{Var}\,(\tilde{X})}{\text{Var}\,(X)} = \frac{10/27}{2/3} = \frac{5}{9} = 0.56\,.$$

El ajuste de la distribución conjunta es, pues, muy similar en torno a ambas curvas de regresión. La bondad del ajuste puede ilustrarse adicionalmente, estudiando la descomposición de la varianza para ambas curvas. Así, la varianza residual para la curva de regresión de Y sobre X vale

$$\text{Var}\,(Y)\,(1-\eta^2_{Y|X}) = \frac{44}{81}\left(1-\frac{13}{22}\right) = \frac{44}{81}\cdot\frac{9}{22} = \frac{2}{9}$$

y, para la curva de regresión de X sobre Y,

$$\text{Var}\,(X)\,(1-\eta^2_{X|Y}) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{5}{9}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9} = \frac{8}{27}\,.$$

En definitiva, la curva de regresión de Y sobre X explica el $100\cdot\frac{13}{22}$ %, esto es, casi el 59,1 % de la varianza de Y, y deja sin explicar algo más del 40,9 % de dicha varianza. Un comentario análogo puede realizarse para la curva de regresión de X sobre Y, en relación con la explicación de la varianza de X, mediante la curva de regresión de X sobre Y.

Adviértase que la varianza residual para la curva de regresión de Y sobre X, varianza de la variable $\varepsilon = Y - \tilde{Y}$, puede ser calculada, también, mediante la distribución de probabilidades de ε. Así,

ε :		
	$-2/3$	$p[\varepsilon = -2/3] = p[X=2, Y=0] + p[X=3, Y=1] = \frac{1}{9}+\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$
	$-1/3$	$p[\varepsilon = -1/3] = p[X=1, Y=0] = 2/9$
	$1/3$	$p[\varepsilon = 1/3] = p[X=2, Y=1] + p[X=3, Y=2] = \frac{2}{9}+\frac{2}{9} = \frac{4}{9}$
	$2/3$	$p[\varepsilon = 2/3] = p[X=1, Y=1] = 1/9$

De igual modo puede el lector hallar la distribución de la variable $\varepsilon = X - \tilde{X}$ y, a partir de ella, la varianza residual para la curva de regresión de X en Y.

Por lo que se refiere a las rectas de regresión, la bondad del ajuste se estudia a través del cuadrado del coeficiente de correlación. Dado que

$$\rho = \frac{\text{Cov}\,(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = \frac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{44}{81}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{22}}\,,$$

entonces,

$$\rho^2 = \frac{4\cdot 3}{22} = \frac{6}{11} = 0.545\,;$$

por tanto, el 54.5 % de la varianza de cada variable es explicada a través de la recta de regresión correspondiente (obviamente, el 45.5 % queda sin explicar, por lo que las varianzas residuales son este último porcentaje de las varianzas marginales correspondientes).

Según puede observarse, la bondad del ajuste es superior para las curvas de regresión que para las rectas, lo que, como el lector conocerá, es un resultado completamente general.

La figura 6.3 muestra tanto la nube de puntos como la recta $(RR_{Y\mid X})$ y la curva de regresión de Y sobre X. El lector puede dibujar las correspondientes a las regresiones de X sobre Y. Obsérvese que esta curva de regresión consta únicamente de 3 puntos del plano (los marcados con el símbolo $\diamond$). El tamaño de los puntos de la nube se ha dibujado proporcional a su probabilidad, con el fin de incluir esta información en la representación gráfica.

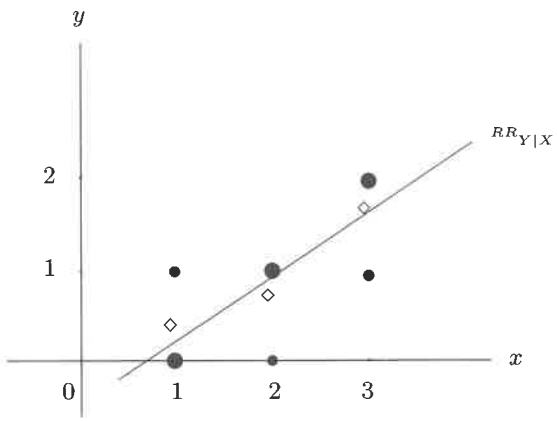


FIG. 6.3.

b) Llamemos Z a la variable que expresa el *número de trabajadores que pertenecen a la familia propietaria.* Obviamente, $Z = X - Y$, por lo que la función de probabilidad de Z se obtiene directamente, a partir de la función de probabilidad conjunta de X e Y. Así,

$$p[Z=1] = p[X=1, Y=0] + p[X=2, Y=1] + p[X=3, Y=2] = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}\,.$$

Análogamente, se comprueba que $p[Z=0] = \frac{1}{9}$ y $p[Z=2] = \frac{2}{9}$.

La función de distribución de Z es, por tanto,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1/9 & 0 \le z < 1 \\ 7/9 & 1 \le z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

c) La esperanza de la variable Z condicionada por el suceso $[X \leq 2]$ es

$$E(Z \mid X \leq 2) = \sum_{z=0}^{2} z \cdot p[Z = z \mid X \leq 2] .$$

Ahora bien, la función de probabilidad de Z condicionada por dicho suceso vale

$$p[Z = z \mid X \leq 2] = \frac{p[Z = z, X \leq 2]}{p[X \leq 2]} .$$

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} p[Z = 0, X \leq 2] &= p[Z = 0, X = 1] + p[Z = 0, X = 2] = \\ &= p[X = 1, Y = 1] + p[X = 2, Y = 2] = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

y, puesto que

$$p[X \leq 2] = p[X = 1] + p[X = 2] = \frac{2}{3} ,$$

entonces,

$$p[Z = 0 \mid X \leq 2] = \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{6} .$$

Análogamente se calculan el resto de probabilidades condicionadas, resultando

$$p[Z = z \mid X \leq 2] = \begin{cases} 1/6 & z = 0 \\ 2/3 & z = 1 \\ 1/6 & z = 2 \end{cases}$$

La esperanza condicionada vale, entonces,

$$E(Z \mid X \leq 2) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1 ,$$

esto es, si un establecimiento cuenta con no más de dos trabajadores, se espera que uno de ellos pertenezca a la familia.

Ejercicio 6.13.

a) La curva general de regresión de Y sobre X es

$$\tilde{Y} = E(Y \mid X = x)$$

por lo que hemos de calcular las funciones de probabilidad de Y condicionada a los distintos valores de X. Las columnas de la siguiente tabla muestran dichas funciones de probabilidad condicionadas:

	$p[Y=y \mid X=x]$					
Y	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$
1	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	10/45	0	0
3	0	0	0	35/45	1/3	0
4	0	0	0	0	2/3	1

A partir de estas distribuciones condicionadas se calculan las correspondientes esperanzas condicionadas:

$$E(Y \mid X=1)=1, \quad E(Y \mid X=2)=1, \quad E(Y \mid X=3)=2,$$
$$E(Y \mid X=4)=\frac{25}{9}, \quad E(Y \mid X=5)=\tfrac{11}{3} \quad \text{y} \quad E(Y \mid X=6)=4.$$

La curva de regresión de Y sobre X es, en consecuencia,

$$\tilde{Y}=E(Y \mid X=x)=\begin{cases} 1 & x=1,2 \\ 2 & x=3 \\ 25/9 & x=4 \\ 11/3 & x=5 \\ 4 & x=6 \end{cases}$$

De igual modo, las columnas de la siguiente tabla muestran las funciones de probabilidad de X condicionadas por los distintos valores de Y:

	$p[X=x \mid Y=y]$			
X	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
1	1/3	0	0	0
2	2/3	0	0	0
3	0	35/45	0	0
4	0	10/45	35/36	0
5	0	0	1/36	1/2
6	0	0	0	1/2

Las esperanzas condicionadas valen, pues, $E(X \mid Y=1)=5/3$, $E(X \mid Y=2)=29/9$, $E(X \mid Y=3)=145/36$ y $E(X \mid Y=4)=11/2$.

En definitiva, la curva de regresión de X sobre Y es

$$\tilde{X}=E(X \mid Y=y)=\begin{cases} 5/3 & y=1 \\ 29/9 & y=2 \\ 145/36 & y=3 \\ 11/2 & y=4 \end{cases}$$

Obtengamos, ahora, las rectas de regresión. Con la tabla de doble entrada del enunciado, se hallan las funciones de probabilidad marginales de X e Y. Ello permite calcular los momentos no centrales de órdenes primero y segundo de ambas variables, $E(X)=3.37$, $E(Y)=2.29$, $E(X^2)=12.27$ y $E(Y^2)=5.83$. A partir de ellos, se hallan las varianzas, $\mathrm{Var}\,(X)=0.91$ y $\mathrm{Var}\,(Y)=0.59$.

La función de probabilidad conjunta permite obtener

$$E(X \cdot Y) = 8.38 \,,$$

con lo cual la covarianza entre ambas variables es

$$\mathrm{Cov}\,(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 8.38 - 3.37 \cdot 2.29 = 0.66 \,.$$

Las rectas de regresión se deducen, entonces, sin dificultad; la de Y sobre X resulta

$$y - 2.29 = \frac{0.66}{0.91}\,(x - 3.37) \,,$$

esto es,

$$y = 0.73 \cdot x - 0.15 \,.$$

La recta de X sobre Y es

$$x - 3.37 = \frac{0.66}{0.59}\,(y - 2.29)$$

que, operando, puede reescribirse como

$$y = 0.89 \cdot x - 0.81 \,.$$

Estudiaremos, a continuación, la bondad de los ajustes. Comencemos por las curvas generales de regresión. Para obtener las razones de correlación tenemos que calcular las varianzas de las esperanzas condicionadas. Así,

$$E(\tilde{Y}) = E[E(Y \mid X = x)] = E(Y) = 2.29$$

y, puesto que $\tilde{Y}$ es una variable aleatoria función de X, $\tilde{Y} = g(X)$, entonces,

$$\begin{aligned} E(\tilde{Y}^2) \;&= \sum_{x=1}^{6} g(x) \cdot p[X = x] = 1^2 \cdot \frac{5}{100} + 1^2 \cdot \frac{10}{100} + 2^2 \cdot \frac{35}{100} + \\ &+ \left(\frac{25}{9}\right)^2 \frac{45}{100} + \left(\frac{11}{3}\right)^2 \frac{3}{100} + 4^2 \cdot \frac{2}{100} = 5.75 \,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathrm{Var}\,(\tilde{Y}) = E(\tilde{Y}^2) - [E(\tilde{Y})]^2 = 5.75 - 2.29^2 = 0.51$$

y, en definitiva, la razón de correlación de Y sobre X es

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\mathrm{Var}\,(\tilde{Y})}{\mathrm{Var}\,(Y)} = \frac{0.51}{0.59} = 0.86 \,.$$

Con cálculos similares se obtiene la razón de correlación de X sobre Y:

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{\mathrm{Var}\,(\tilde{X})}{\mathrm{Var}\,(X)} = \frac{0.78}{0.91} = 0.86 \,.$$

El ajuste en torno a las curvas de regresión es, por consiguiente, razonablemente bueno; cada curva explica aproximadamente el 86 % de la varianza correspondiente, con lo que las varianzas residuales, que el lector puede calcular, son apenas un 14 % de las varianzas marginales correspondientes.

Para estudiar la bondad del ajuste proporcionado por las rectas de regresión, calculemos el coeficiente de correlación lineal:

$$\rho = \frac{\text{Cov}\ (X,Y)}{\sqrt{\text{Var}\,(X)\cdot\text{Var}\,(Y)}} = \frac{0.66}{\sqrt{0.91\cdot 0.59}} = 0.90\ ,$$

de donde $\rho^2 = 0.81$. El ajuste en torno a las rectas de regresión es, por tanto, bueno, con un 81 % de varianza explicada por las rectas de regresión y una varianza residual del 19 % de la varianza marginal correspondiente.

b) Obtengamos la función de probabilidad del *número de dormitorios*, Y, condicionada porque el número de habitaciones es superior a tres, $[X > 3]$. Así

$$\begin{aligned} p[Y=1 \mid X>3] &= \frac{p[Y=1, X>3]}{p[X>3]} = \\ &= \frac{p[Y=1,X=4]+p[Y=1,X=5]+p[Y=1,X=6]}{p[X>3]} = 0\ . \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} p[Y=2 \mid X>3] &= \frac{0.1}{0.5} = 0.2\ , \\ p[Y=3 \mid X>3] &= \frac{0.36}{0.5} = 0.72 \quad \text{y} \\ p[Y=4 \mid X>3] &= \frac{0.04}{0.5} = 0.08\ . \end{aligned}$$

La esperanza pedida es, entonces,

$$\begin{aligned} E(Y \mid X>3) &= \textstyle\sum_{y=1}^{4} y\cdot p[Y=y \mid X>3] = \\ &= 2\cdot 0.2 + 3\cdot 0.72 + 4\cdot 0.08 = 2.88 \text{ dormitorios.} \end{aligned}$$

Ejercicio 6.14.

a) En este ejercicio se conoce la función de probabilidad marginal de la variable X. Como los cuatro números se eligen al azar, parece aceptable que todos tengan la misma probabilidad. En consecuencia,

$$p[X=x] = \frac{1}{4}\ , \qquad x = 1,2,3,4\ .$$

Asimismo, se conocen las funciones de probabilidad de Y, condicionadas por los distintos valores de X. Por ejemplo, si el primer número elegido es el 2, habremos de eliminar el

número 1 como valor de Y, con lo cual hay una probabilidad igual a $\frac{1}{3}$ de elegir cualquiera de los restantes en la segunda elección:

$$p[Y = y \mid X = 2] = \begin{cases} 1/3 & y = 2, 3, 4 \\ 0 & y = 1 \end{cases}$$

Del mismo modo se calcularía el resto de las funciones de probabilidad condicionadas, presentadas en las columnas de la siguiente tabla:

	$p[Y = y \mid X = x]$			
Y	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$
1	1/4	0	0	0
2	1/4	1/3	0	0
3	1/4	1/3	1/2	0
4	1/4	1/3	1/2	1

De forma abreviada, para $x = 1, 2, 3, 4$,

$$p[Y = y \mid X = x] = \begin{cases} \dfrac{1}{5 - x} & y = x, x + 1, \ldots, 4 \\ 0 & y = 1, \ldots, x - 1 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que

$$p[X = x, Y = y] = p[X = x] \cdot p[Y = y \mid X = x], \qquad x, y = 1, 2, 3, 4,$$

podemos hallar la función de probabilidad conjunta. Así,

$$p[X = 1, Y = 1] = p[X = 1] \cdot p[Y = 1 \mid X = 1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

De igual manera se deduce el resto de los valores de la función de probabilidad conjunta, mostrados en la siguiente tabla de doble entrada:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	1/12	1/12	1/12
3	0	0	1/8	1/8
4	0	0	0	1/4

b) Hallemos, en primer lugar, las curvas generales de regresión. Mediante las distribuciones de Y condicionadas por los distintos valores de X, obtenidas en el apartado anterior, calculamos la esperanza de Y condicionada por cada uno de dichos valores, $E(Y \mid X = 1) = 2.5$, $E(Y \mid X = 2) = 3$, $E(Y \mid X = 3) = 3.5$ y $E(Y \mid X = 4) = 4$.

Por tanto, la curva de regresión de Y sobre X está formada por los puntos

$$(1, 2.5), \quad (2, 3), \quad (3, 3.5) \text{ y } \quad (4, 4).$$

Puede observar el lector que estos puntos están alineados; todos ellos se encuentran en la recta

$$y = 0.5 \cdot x + 2 \,,$$

que es, consecuentemente, la recta de regresión de Y sobre X.

Para obtener la curva de regresión de X sobre Y hay que calcular las funciones de probabilidad de X condicionadas por los distintos valores de Y. Se hallan considerando que

$$p[X = x \mid Y = y] = \frac{p[X = x, Y = y]}{p[Y = y]} \,,$$

y aparecen agrupadas en las columnas de la siguiente tabla:

	$p[X = x \mid Y = y]$			
X	$y = 1$	$y = 2$	$y = 3$	$y = 4$
1	1	3/7	3/13	3/25
2	0	4/7	4/13	4/25
3	0	0	6/13	6/25
4	0	0	0	12/25

De este modo, las esperanzas condicionadas resultan $E(X \mid Y = 1) = 1$, $E(X \mid Y = 2) = 11/7$, $E(X \mid Y = 3) = 29/13$ y $E(X \mid Y = 4) = 77/25$, con lo cual, la curva de regresión de X sobre Y está formada por los puntos

$$(1,1)\,, \quad \left(\frac{11}{7}, 2\right)\,, \quad \left(\frac{29}{13}, 3\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{77}{25}, 4\right)\,.$$

Hallemos la recta de regresión de X sobre Y. Para ello calculemos las esperanzas de X e Y. Así, $E(X) = 2.5$ y $E(Y) = 3.25$. Esta segunda esperanza podría obtenerse sin cálculos directos, ya que el punto $(E(X), E(Y))$ está en la recta de regresión de Y sobre X, por lo que

$$E(Y) = 0.5 \cdot E(X) + 2 = 0.5 \cdot 2.5 + 2 = 3.25 \,.$$

Por otro lado, $E(Y^2) = 11.42$ y $E(X \cdot Y) = 8.75$, de donde

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 11.42 - 3.25^2 = 0.86$$

y

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 8.75 - 2.5 \cdot 3.25 = 0.63 \,.$$

La recta de regresión de X sobre Y es

$$x - 2.5 = \frac{0.63}{0.86}\,(y - 3.25)\,,$$

esto es,

$$y = 1.36 \cdot x - 0.16 \,.$$

Estudiemos la bondad de los ajustes. La varianza de X puede obtenerse del modo habitual mediante la distribución marginal de la variable X, o bien considerando que la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es $0.5 = \frac{\text{Cov}\ (X,Y)}{\text{Var}\,(X)}$. Sustituyendo el valor de la covarianza tenemos $\text{Var}\,(X) = 1.25$. En consecuencia,

$$\rho = \frac{\text{Cov}\ (X,Y)}{\sqrt{\text{Var}\,(X)\cdot \text{Var}\,(Y)}} = 0.61$$

y, por consiguiente, $\rho^2 = 0.37$. Como la recta y curva de regresión de Y sobre X coinciden, $\eta^2_{Y|X} = \rho^2 = 0.37$. Nos resta conocer la razón de correlación de X sobre Y.

La variable $\tilde{X}$ es función de Y, $\tilde{X} = g(Y)$, con lo cual,

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}^2) &= \textstyle\sum_{y=1}^{4} [g(y)]^2 \cdot p[Y=y] = \\ &= \frac{1}{16} + \left(\frac{11}{7}\right)^2 \frac{7}{48} + \left(\frac{29}{13}\right)^2 \frac{13}{48} + \left(\frac{77}{25}\right)^2 \frac{25}{48} = 6.71 \,. \end{aligned}$$

Además, $E(\tilde{X}) = E(X) = 2.5$, de donde

$$\text{Var}\,(\tilde{X}) = E(\tilde{X}^2) - [E(\tilde{X})]^2 = 6.71 - 2.5^2 = 0.46$$

y, en consecuencia,

$$\eta^2_{X|Y} = \frac{\text{Var}\,(\tilde{X})}{\text{Var}\,(X)} = \frac{0.46}{1.25} = 0.37 \,.$$

Se pueden hacer comentarios similares a los realizados en los ejercicios anteriores respecto al comportamiento de las varianzas residuales.

c) La figura 6.4 muestra la nube de puntos y las curvas y rectas de regresión; al igual que en el ejercicio 6.12, el tamaño de los puntos de la nube es proporcional a su probabilidad, con el fin de mejorar la representación. Los cuatro puntos de la curva de regresión de Y sobre X se representan mediante el símbolo $\odot$, mientras que los cuatro puntos de la de X sobre Y, por medio del símbolo $\diamond$. Puede observarse que los cuatro puntos de la curva de regresión de Y sobre X están alineados y se encuentran sobre la correspondiente recta de regresión.

d) Se trata de calcular la esperanza condicionada $E(X \cdot Y \mid Y > 2)$ por lo que, previamente, tenemos que hallar la función de probabilidad conjunta de (X,Y) condicionada por el suceso $[Y > 2]$, es decir,

$$p[X = x, Y = y \mid Y > 2] = \frac{p[X = x, Y = y, Y > 2]}{p[Y > 2]} \,.$$

El numerador es igual a cero, si $y \leq 2$, e igual a $p[X = x, Y = y]$, si $y > 2$. El denominador vale

$$p[Y > 2] = p[Y = 3] + p[Y = 4] = \frac{19}{24} \,.$$

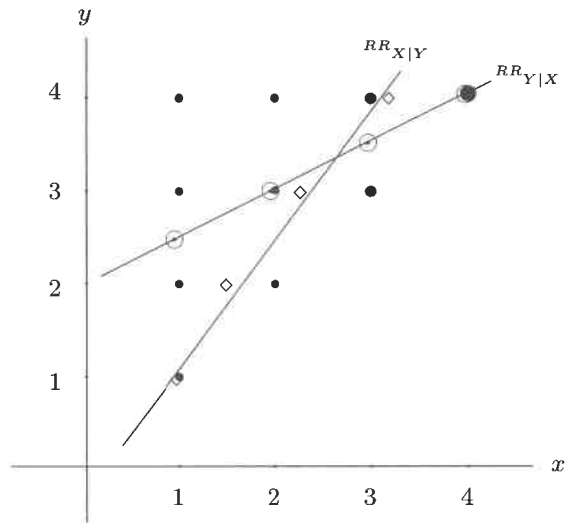


FIG. 6.4.

Se deduce, así, la función de probabilidad conjunta de (X, Y) condicionada por $[Y > 2]$, descrita en la siguiente tabla de doble entrada:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0	0	3/38	3/38
2	0	0	2/19	2/19
3	0	0	3/19	3/19
4	0	0	0	6/19

En consecuencia,

$$E(X \cdot Y \mid Y > 2) =$$

$$\sum_{x=1}^{4} \sum_{y=3}^{4} x \cdot y \cdot p[X = x, Y = y \mid Y > 2] =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{38} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{3}{38} + 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{19} + 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{19} + 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{19} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{3}{19} + 4 \cdot 4 \cdot \frac{6}{19} =$$

$$= \frac{395}{38} = 10.39 .$$

Ejercicio 6.15.

a) Se trata de obtener la recta de regresión de Y sobre X. Calculemos, para ello, los momentos que en dicha recta intervienen:

$$\mu_Y = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} 8xy^2 \, dy \, dx = 8 \int_{x=0}^{1} \frac{x^4}{3} \, dx = \frac{8}{15} .$$

Para obtener μ_X, hallaremos previamente la función de densidad marginal de la variable X, puesto que será necesaria en el siguiente apartado. Si $0 \leq x \leq 1$,

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{x} 8xy\, dy = 4x^3 .$$

Por tanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces,

$$\mu_X = \int_0^1 x \cdot 4x^3\, dx = \frac{4}{5}$$

y, además,

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 4x^3\, dx = \frac{2}{3} ,$$

de donde, $\mathrm{Var}\,(X) = \frac{2}{75}$.

Finalmente, obtengamos la covarianza entre X e Y. Así,

$$E(X \cdot Y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} xy \cdot 8xy\, dy\, dx = 8 \int_{x=0}^{1} x^5\, dx = \frac{4}{9} ,$$

con lo cual, $\mathrm{Cov}\ (X, Y) = \frac{4}{225}$.

En definitiva, la recta de regresión de Y sobre X, recta que explica el ahorro en función de la renta disponible, resulta

$$y - \frac{8}{15} = \frac{4/225}{2/75} \left(x - \frac{4}{5} \right)$$

o, simplificando,

$$y = \frac{2}{3} \cdot x .$$

b) Sea x un nivel de renta fijo, entre cero y uno. Tenemos que obtener la esperanza condicionada $E(Y \mid X = x)$. Para ello, hallemos, primero, la función de densidad condicionada. Así, si $0 < x < 1$,

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{8xy}{4x^3} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

que, simplificando, resulta

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{2y}{x^2} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El ahorro esperado para un nivel fijo, x, de renta, es la esperanza de la variable Y con la distribución condicionada anterior, esto es,

$$E(Y \mid X = x) = \int_{y=0}^{x} y \cdot \frac{2y}{x^2}\, dy = \frac{2}{3} \cdot x\ .$$

Resulta, por tanto, igual a las dos terceras partes de la renta disponible.

Si la renta, X, fuese igual a cero, la distribución de Y condicionada por el suceso $[X = 0]$ sería una variable degenerada (Y vale entonces cero con probabilidad igual a la unidad); entonces $E(Y \mid X = 0) = 0$ y el ahorro esperado sería cero.

Ejercicio 6.16.

a) Obsérvese que la función de densidad conjunta es simétrica con respecto a la bisectriz del primer cuadrante, es decir, que al cambiar entre sí x e y, dicha función no varía. Por ello, las variables X e Y están igualmente distribuidas, coincidiendo las características de ambas, con lo cual sólo calcularemos las de X. El lector puede obtener las de la variable Y por comprobar los resultados.

La función de densidad marginal de X, para $0 \leq x \leq 1$, es

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1-x} 24xy\, dy = 12x(1-x)^2\ .$$

Por tanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y, análogamente, la función de densidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} 12y(1-y)^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hallemos los momentos necesarios para obtener las rectas de regresión:

$$\mu_Y = \mu_X = \int_0^1 x \cdot 12x(1-x)^2\, dx = \frac{2}{5}\ ,$$

$$E(Y^2) = E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 12x(1-x)^2\, dx = \frac{1}{5}$$

y, por tanto,

$$\text{Var}\,(Y) = \text{Var}\ (X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}\ .$$

Además,

$$E(X \cdot Y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} xy \cdot 24xy \, dy \, dx = 8 \int_{x=0}^{1} x^2(1-x)^3 \, dx = \frac{2}{15} ,$$

de lo cual

$$\text{Cov } (X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{15} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{75} .$$

En definitiva, la recta de regresión de Y sobre X resulta, una vez simplificada,

$$y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{3}$$

y, la de X en Y, con cálculos similares, es

$$y = -\frac{3}{2} \cdot x + 1 .$$

Por lo que respecta a las curvas generales de regresión, necesitamos las funciones de densidad condicionadas. Así, para $0 < x < 1$, la función de densidad de Y condicionada por $X = x$ es

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{24xy}{12x(1-x)^2} & 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

función que, una vez simplificada, puede escribirse como

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{2y}{(1-x)^2} & 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

En consecuencia, si $0 < x < 1$, la esperanza de Y condicionada por el suceso $[X = x]$, esto es, la curva general de regresión de Y sobre X, resulta

$$\tilde{Y} = E(Y \mid X = x) = \int_{y=0}^{1-x} y \cdot \frac{2y}{(1-x)^2} \, dy = \frac{2}{3}(1-x)$$

o, equivalentemente,

$$y = \frac{2}{3}(1-x) ,$$

si $0 < x < 1$.

Por la simetría entre x e y que antes hemos destacado, para $0 < y < 1$, la esperanza de X condicionada por $Y = y$, esto es, la curva general de regresión de X sobre Y, es

$$\tilde{X} = E(X \mid Y = y) = \frac{2}{3}(1-y)$$

o, lo que es igual,

$$x = \frac{2}{3}(1 - y) ,$$

si $0 < y < 1$.

b) Como puede observarse, las curvas generales de regresión son rectas en su campo de definición, por lo que coinciden con las rectas de regresión correspondientes. La bondad del ajuste dado por la regresión general es, en consecuencia, la misma que la relativa a la regresión lineal, con lo cual,

$$\eta^2_{X|Y} = \eta^2_{Y|X} = \rho^2 .$$

Obtengamos, pues, el coeficiente de correlación lineal. Utilizando los valores calculados en el apartado anterior,

$$\rho = \frac{-2/75}{\sqrt{\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{25}}} = -\frac{2}{3}$$

y, por tanto, $\eta^2_{X|Y} = \eta^2_{Y|X} = \rho^2 = \frac{4}{9} = 0.444$.

En definitiva, las curvas y rectas de regresión explican el 44.4 % de la varianza marginal correspondiente. Las varianzas residuales son, consecuentemente, el 55.6 % de las varianzas marginales.

c) En este apartado se ha de calcular la esperanza de X condicionada por el suceso $[Y = 0.7]$. A la vista de la curva de regresión de X sobre Y obtenida en el apartado anterior,

$$E(X \mid Y = 0.7) = \frac{2}{3}(1 - 0.7) = 0.2 .$$

Por tanto, en una familia en la que el 70 % de sus miembros toma infusiones, debe esperarse que el 20 % tome leche.

d) La *proporción de individuos que no toma ninguna de las dos bebidas* viene dada por $1 - (X + Y)$ o, en porcentaje, el $100 \cdot (1 - X - Y)$ %.

La respuesta a esta pregunta es el valor de la esperanza condicionada

$$E(1 - X - Y \mid X = 0.5) .$$

Pero,

$$E(1 - X - Y \mid X = 0.5) = E(1 - 0.5 - Y \mid X = 0.5) = 0.5 - E(Y \mid X = 0.5) .$$

Dado que la curva de regresión de Y sobre X proporciona esta última esperanza condicionada, la proporción esperada que buscamos es

$$E(1 - X - Y \mid X = 0.5) = 0.5 - \frac{2}{3}, (1 - 0.5) = \frac{1}{6} = 0.167 .$$

Ejercicio 6.17.

a) Obtengamos, en primer lugar, las funciones de densidad marginales. Para $x \geq 0$,

$$f_X(x) = \int_{y=x}^{\infty} xe^{-y}\, dy = xe^{-x}\,,$$

anulándose en el resto de los casos.

Para la variable Y, si $y \geq 0$

$$f_Y(y) = \int_{x=0}^{y} xe^{-y}\, dx = \frac{1}{2} \cdot y^2 e^{-y}\,,$$

siendo igual a cero si $y < 0$.

Para $x > 0$, la función de densidad de Y condicionada por $X = x$ resulta

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{xe^{-y}}{xe^{-x}} = e^{-(y-x)} & \text{si } y \geq x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto, si $x > 0$, la esperanza de Y condicionada por $X = x$, esto es, la curva de regresión de Y sobre X, es

$$\tilde{Y} = E(Y \mid X = x) = \int_{y=x}^{\infty} ye^{-(y-x)}\, dy = x + 1\,.$$

Hallemos la curva de regresión de X sobre Y. Haciendo los cálculos correspondientes, que son análogos a los realizados para la otra curva de regresión, se tiene que, para $y > 0$,

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 2x/y^2 & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces, si $y > 0$, la curva de regresión de X sobre Y es

$$\tilde{X} = E(X \mid Y = y) = \int_{x=0}^{y} x \cdot \frac{2x}{y^2}\, dx = \frac{2}{3} \cdot y\,.$$

Observe el lector que ambas curvas de regresión son rectas, por lo que, como en el ejercicio anterior, cada recta de regresión coincide con la curva de regresión correspondiente. Así, $y = x + 1$ es la recta de regresión de Y sobre X, e $y = \frac{3}{2} \cdot x$ es la de X sobre Y.

La bondad del ajuste es la misma para todas las regresiones, con lo cual

$$\rho^2 = \eta^2_{Y|X} = \eta^2_{X|Y}\,.$$

Obtengamos la razón de correlación de Y sobre X, $\eta^2_{Y|X} = \frac{\mathrm{Var}\,(\tilde{Y})}{\mathrm{Var}\,(Y)}$. Dado que, para $x > 0$, $\tilde{Y} = X + 1$, entonces, $\mathrm{Var}\,(\tilde{Y})$ coincide con $\mathrm{Var}\,(X)$ y, por tanto,

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{\mathrm{Var}\,(Y)}\,.$$

Ahora bien, la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es $\rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ y la de la recta de regresión de X sobre Y es $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$. Si multiplicamos ambas expresiones resulta

$$\rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} ,$$

es decir, el cociente de las varianzas. En nuestro caso, ambas pendientes son, respectivamente, 1 y $\frac{3}{2}$, por lo que

$$\frac{3}{2} = \frac{\text{Var}\,(Y)}{\text{Var}\,(X)} .$$

En definitiva,

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\text{Var}\,(X)}{\text{Var}\,(Y)} = \frac{2}{3} = 0.667 ,$$

valor que también toman ρ^2 y $\eta^2_{X|Y}$.

Las curvas y rectas explican, pues, el 66.7 % de las varianzas marginales correspondientes, siendo las varianzas residuales el 33.3 % de dichas varianzas marginales.

b) La representación de las curvas y rectas de regresión se presenta en la figura 6.5. La nube de puntos se representa en la forma de curvas de nivel de la función de densidad.

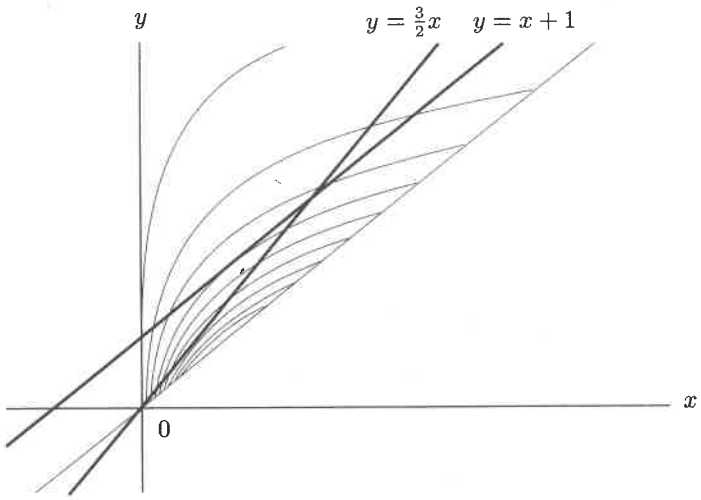


FIG. 6.5.

c) El *tiempo de hospitalización* es la variable aleatoria $Z = Y - X$. Calculemos, entonces, $p[Z < 1]$:

$$p[Z < 1] = p[Y - X < 1] = p[Y < X + 1] .$$

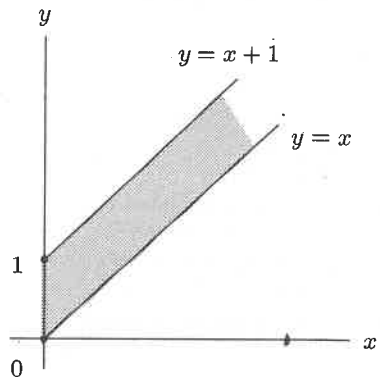


FIG. 6.6.

Dicha probabilidad es la del recinto sombreado en la figura 6.6. Por tanto,

$$p[Z < 1] = \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=x}^{x+1} xe^{-y}\, dy\, dx = (1 - e^{-1}) \int_{x=0}^{\infty} x \cdot e^{-x}\, dx = 1 - e^{-1} = 0.63 .$$

d) La probabilidad pedida es la del suceso $[Y < 2]$ condicionada por $[Y - X = \frac{5}{7}]$. Esta probabilidad no puede obtenerse a partir de la definición de probabilidad condicionada, ya que el suceso $[Y - X = \frac{5}{7}]$ tiene probabilidad nula. Hagamos un cambio de variable que proporcione la función de densidad conjunta de Y y $Z = Y - X$.

Tomemos $Z = Y - X$, $U = Y$; este cambio de variable viene inducido por la transformación del plano $z = y - x$, $u = y$. La transformación inversa es $y = u$, $x = u - z$, por lo que el determinante jacobiano tiene un valor absoluto igual a la unidad. En consecuencia, la función de densidad conjunta de (Z, U) es

$$f_{(Z,U)}(z,u) = \begin{cases} (u-z)e^{-u} & 0 \le u - z \le u < \infty \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El campo de variación de (Z, U) viene dado, entonces, por las desigualdades $u - z \ge 0$, es decir, $u \ge z$, $u - z \le u$, esto es, $z \ge 0$, y $u \ge 0$, pudiendo escribirse como $0 \le z \le u < \infty$.

Obtengamos la función de densidad marginal de la variable Z. Para $z > 0$, resulta

$$f_Z(z) = \int_{u=z}^{\infty} (u - z)\, e^{-u}\, du = e^{-z} .$$

Consecuentemente, para $z > 0$, la función de densidad condicionada es

$$f_{(U|Z=z)}(u) = \frac{f_{(Z,U)}(z,u)}{f_Z(z)} = \begin{cases} \dfrac{(u-z)e^{-u}}{e^{-z}} = (u-z)\,e^{-(u-z)} & u \geq z \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

En términos de U y Z, la probabilidad pedida, $p\left[U < 2 \mid Z = \frac{5}{7}\right]$, es

$$p\left[U < 2 \mid Z = \frac{5}{7}\right] = \int_{\frac{5}{7}}^{2} \left(u - \frac{5}{7}\right) e^{-\left(u-\frac{5}{7}\right)}\, du = 0.37\,.$$

Ejercicio 6.18.

a) Como puede observarse, la función de densidad conjunta es simétrica en X y en Y, es decir, al permutar entre sí x e y, dicha función no varía. Por tanto, haremos los cálculos para la variable X y deduciremos de ellos los referentes a la variable Y. El lector, con todo, puede comprobarlos directamente.

Veamos que las variables son dependientes. Obtengamos la función de densidad marginal de X. Si $-1 < x < 0$,

$$f_X(x) = \int_{y=-x-1}^{0} dy = x + 1$$

y, si $0 < x < 1$,

$$f_X(x) = \int_{y=0}^{1-x} dy = 1 - x\,.$$

En definitiva,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y, dado que X e Y están igualmente distribuidas,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y & -1 < y < 0 \\ 1-y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obviamente, las variables son dependientes. Por ejemplo, la función de densidad conjunta en el punto $(-0.5,\, 0.5)$ es igual a cero, mientras que el producto de las marginales vale

$$f_X(-0.5) \cdot f_Y(0.5) = (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.5) \neq 0$$

Estudiemos su incorrelación y, para ello, calculemos la covarianza entre ambas variables. Como la función de densidad de X es simétrica respecto del origen, $\mu_X = 0$, y, por el mismo motivo, $\mu_Y = 0$. Además,

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \int_{x=-1}^{0} \int_{y=-x-1}^{0} xy\, dy\, dx + \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} xy\, dy\, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{x=-1}^{0} x(x+1)^2\, dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x(x+1)^2\, dx = \\ &= \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}\,, \end{aligned}$$

con lo que Cov $(X, Y) = \frac{1}{12}$. Las variables, por tanto, no están incorrelacionadas. Hallemos su coeficiente de correlación lineal, para lo cual necesitamos las varianzas de las variables. Como

$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\, dx = \frac{1}{6}\,,$$

entonces, Var (X) = Var $(Y) = \frac{1}{6}$. En definitiva,

$$\rho = \frac{1/12}{\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}} = 0.5\,.$$

b) A partir de las funciones de densidad marginales, calculadas en el apartado anterior, se deducen las funciones de densidad condicionadas. Así, si $-1 < x < 0$,

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 1/(1+x) & -(1+x) < y < 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y, si $0 < x < 1$,

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} 1/(1-x) & 0 < y < 1-x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto, si $-1 < x < 0$,

$$E(Y \mid X = x) = \int_{y=-(1+x)}^{0} \frac{y}{1+x}\, dy = -\frac{1+x}{2}$$

y, si $0 < x < 1$,

$$E(Y \mid X = x) = \int_{y=0}^{1-x} \frac{y}{1-x}\, dy = \frac{1-x}{2}\,.$$

En definitiva, cuando x está entre -1 y 1, la curva de regresión de Y sobre X, $\tilde{Y}$, está formada por dos segmentos; si $-1 < x < 0$, es el segmento de la recta de ecuación $y = -\frac{1+x}{2}$, y cuando $0 < x < 1$, es el segmento de la recta $y = \frac{1-x}{2}$.

Puede el lector obtener directamente la curva de regresión de X sobre Y $\tilde{X}$. Utilizando el anterior argumento de simetría entre X e Y, esta curva de regresión es, cuando $-1 < y < 0$, el segmento de la recta $x = -\frac{1+y}{2}$, esto es, $y = -2 \cdot x - 1$; cuando $0 < y < 1$ es el segmento de la recta $x = \frac{1-y}{2}$, es decir, $y = 1 - 2 \cdot x$.

Hallemos, ahora, las rectas de regresión. Como ambas pasan por el origen de coordenadas, ya que las esperanzas marginales son iguales a cero, basta con calcular las pendientes. La pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es $\rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$, es decir, 0.5; la de la recta de regresión de X sobre Y es $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{1}{0.5} = 2$. Por tanto, la recta de regresión de Y sobre X es

$$y = 0.5 \cdot x \,,$$

y la de X sobre Y

$$y = 2 \cdot x \,.$$

Como puede observarse, ambas rectas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante. A la vista del recinto y del hecho de que la función de densidad conjunta es constante, tal vez sorprenda al lector que la recta que mejor resume la distribución de probabilidades conjunta de ambas variables no sea la bisectriz $y = x$. Ello ocurre porque el criterio de mínimos cuadrados no trata por igual a ambas variables. Por ejemplo, la recta de regresión de Y sobre X minimiza la función $E[(Y - (a + bX))^2]$, función que no coincide con la que se obtendría al permutar X e Y.

Estudiemos la bondad de los ajustes. La razón de correlación de Y sobre X es

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{\mathrm{Var}\,(\tilde{Y})}{\mathrm{Var}\,(Y)} \,.$$

Pero

$$E(\tilde{Y}) = E[E(Y \mid X = x)] = E(Y) = 0$$

y

$$E(\tilde{Y}^2) = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{1+x}{2}\right)^2 (1+x)\,dx + \int_{0}^{1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 (1-x)\,dx = \frac{1}{8} \,.$$

Por tanto, $\mathrm{Var}\,(\tilde{Y}) = \frac{1}{8}$ y

$$\eta^2_{Y|X} = \frac{1/8}{1/6} = \frac{3}{4} \,.$$

El anterior argumento de simetría implica que, también, $\eta^2_{X|Y} = \frac{3}{4}$.

Además, el coeficiente de correlación lineal es $\rho = 0.5$ y, por consiguiente, $\rho^2 = 0.25$.

El lector puede describir la bondad de los ajustes y obtener las varianzas residuales, a partir de los coeficientes que acabamos de obtener.

c) La probabilidad buscada es la del espacio sombreado en la figura 6.7, es decir, la que resulta de integrar la función de densidad conjunta en los puntos (x, y) pertenecientes al recinto S, tales que $x \cdot y > \frac{1}{8}$.

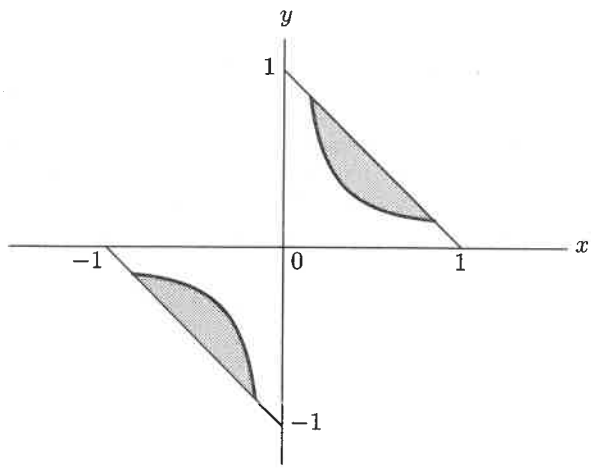


FIG. 6.7.

La función de densidad conjunta es constante y, por un argumento de simetría respecto del origen, la probabilidad coincide con el doble del volumen determinado por la función y uno cualquiera de los recintos, siendo suficiente calcular uno de los dos volúmenes.

Observe el lector que, además, por ser la función de densidad conjunta igual a la unidad, estos volúmenes coinciden con las correspondientes áreas de los recintos.

Resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$x + y = 1$$

y

$$x \cdot y = \frac{1}{8}\,,$$

se obtienen las soluciones para x, $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ y $\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$. En definitiva,

$$p\left[X \cdot Y > \frac{1}{8}\right] = 2\int_{x=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \int_{y=\frac{1}{8x}}^{1-x} 1\,dy\,dx = \int_{x=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} \left(1 - x - \frac{1}{8x}\right) dx = 0.27\,.$$

Ejercicio 6.19.

a) Como la función de densidad conjunta es constante en S, su integral en dicho recinto es k veces el área del mismo. Esta área vale $(\sqrt{2})^2 = 2$, por lo que

$$\int\int_S k\,dx\,dy = 2k\,.$$

En consecuencia, para que esta integral sea igual a la unidad, $k = \frac{1}{2}$.

b) El aspecto del recinto S indica claramente que las dos variables van a ser dependientes, como ocurría en el ejercicio anterior, ya que, por ejemplo, en el punto $(0.7, 0.7)$ la función de densidad conjunta es igual a cero, mientras que ninguna de las marginales se anula, no haciéndolo tampoco su producto.

Por otro lado, tanto el recinto S, como la función de densidad de (X, Y) son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante, por lo que las variables X e Y están igualmente distribuidas (basta, por tanto, con calcular las características de una de ellas). El lector puede realizar como un ejercicio los cálculos completos.

Así, la función de densidad marginal de X resulta, para $-1 < x < 0$,

$$f_X(x) = \int_{y=-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\, dy = 1 + x\ ,$$

y, para $0 < x < 1$,

$$f_X(x) = \int_{y=x-1}^{1-x} \frac{1}{2}\, dy = 1 - x\ .$$

En definitiva,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Análogamente se obtendría la función de densidad de Y,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+y & -1 < y < 0 \\ 1-y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Podemos comprobar, pues, que X e Y no son independientes, ya que la función de densidad conjunta no es igual al producto de las marginales. Por ejemplo, como ya adelantábamos, $f(0.7, 0.7) = 0$, y

$$f_X(0.7) \cdot f_Y(0.7) = 0.3^2 = 0.09 \neq 0\ .$$

Calculemos la covarianza entre X e Y, para estudiar si existe incorrelación. La esperanza de X y la de Y son iguales a cero, pues las funciones de densidad marginales de ambas son simétricas respecto del origen. Además,

$$E(X^2) = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\, dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\, dx = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}\ .$$

Entonces,

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{Var}\,(Y) = \frac{1}{6}\ .$$

Finalmente,

$$E(X \cdot Y) = \int_{x=-1}^{0} \int_{y=-1-x}^{x+1} \frac{1}{2} \cdot xy\, dy\, dx + \int_{x=0}^{1} \int_{y=x-1}^{1-x} \frac{1}{2} \cdot xy\, dy\, dx = 0 + 0 = 0\ .$$

Por tanto, Cov $(X,Y) = 0$ y las variables están incorrelacionadas.

c) Como las variables están incorrelacionadas y el centro de gravedad es el origen de coordenadas, las rectas de regresión de Y sobre X y de X sobre Y son $y = 0$ y $x = 0$, respectivamente. Obtengamos las curvas de regresión y, para ello, calculemos las funciones de densidad condicionadas. Para $-1 < x < 0$,

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1+x)} & -1-x \leq y \leq 1+x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Si $0 < x < 1$,

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)} & x-1 \leq y \leq 1-x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Las funciones de densidad condicionadas son simétricas respecto del origen, para cualquier x entre -1 y 1. Por tanto, $E(Y \mid X = x) = 0$, para $-1 < x < 1$.

Análogamente, $E(X \mid Y = y) = 0$, para $-1 < y < 1$. En definitiva, las curvas de regresión resultan ser

$$y = 0$$

la de Y sobre X, y

$$x = 0$$

la de X sobre Y.

Obsérvese que rectas y curvas de regresión coinciden, por lo que

$$\eta^2_{Y|X} = \eta^2_{X|Y} = \rho^2 = 0\,.$$

El ajuste es el peor posible. Las varianzas residuales coinciden con las marginales, esto es, las curvas y rectas de regresión no explican en absoluto la varianza de la variable correspondiente.

d) Al igual que en el último apartado del ejercicio 6.17, hay que realizar un cambio de variable. Hagamos $U = X - Y$ y $V = Y$. La transformación del plano en sí mismo que subyace bajo este cambio de variable es

$$u = x - y\,, \quad v = y$$

cuya transformación inversa es

$$x = u + v\,, \quad y = v\,.$$

El módulo del determinante jacobiano es igual a la unidad; por tanto, si S' es el recinto transformado de S por el cambio anterior,

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (u,v) \in S' \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Estudiemos cómo describir el recinto S'. Puede describirse S como $-1 \leq y \leq 1$, y para $-1 \leq y \leq 0$,

$$-1 - y \leq x \leq y + 1 \,,$$

siendo para $0 \leq y \leq 1$

$$y - 1 \leq x \leq 1 - y \,.$$

Sustituyendo x e y en función de u y v resulta el recinto transformado S': $-1 \leq v \leq 1$, y para $-1 \leq v \leq 0$,

$$-1 - v \leq u + v \leq 1 + v \,,$$

es decir,

$$-1 - 2v \leq u \leq 1 \,;$$

mientras, para $0 \leq v \leq 1$,

$$v - 1 \leq u + v \leq 1 - v \,,$$

es decir,

$$-1 \leq u \leq 1 - 2v \,.$$

La figura 6.8 muestra el aspecto de S'.
La esperanza que se pide en este apartado, descrita en función de U y V, es $E\left(V \mid U = \frac{1}{4}\right)$. Obtengamos, entonces, la función de densidad de V condicionada por el suceso $[U = \frac{1}{4}]$. La función de densidad marginal de U es, para $-1 \leq u \leq 1$,

$$f_U(u) = \int_{v=\frac{-1-u}{2}}^{\frac{1-u}{2}} \frac{1}{2}\, dv = \frac{1}{2} \,.$$

Por tanto, para $-1 < u < 1$, la función de densidad condicionada es

$$f_{(V|U=u)}(v) = \begin{cases} 1 & \dfrac{-1-u}{2} \leq v \leq \dfrac{1-u}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y la esperanza condicionada

$$E(V \mid U = u) = \int_{v=\frac{1-u}{2}}^{\frac{-1-u}{2}} v\, dv = -\frac{u}{2} \,.$$

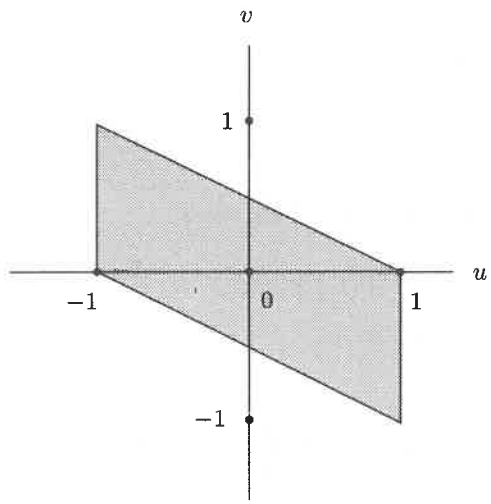


FIG. 6.8.

En definitiva, el valor esperado de V, si U es igual a $\frac{1}{4}$, resulta $E\left(V \mid U = \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$.

Ejercicio 6.20.

a) La recta de regresión de Y sobre X, que ha de calcularse en este apartado, puede obtenerse del modo habitual mediante los correspondientes momentos. Nótese, sin embargo, que, si hallamos la esperanza de Y condicionada por $X = x$, para $0 < x < \infty$,

$$E(Y \mid X = x) = \int_{y=0}^{\frac{x}{2}} y \cdot \frac{8y}{x^2}\, dy = \frac{x}{3}\,,$$

tendremos que, para $0 < x < \infty$, la curva de regresión de Y sobre X es la recta

$$y = \frac{x}{3}$$

y, por tanto, coincide con la recta de regresión de Y sobre X.

Para estudiar la bondad del ajuste hay que calcular el cuadrado del coeficiente de correlación lineal. Optaremos, también, por ilustrar en estos cálculos una técnica especial. Como la pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es

$$\frac{1}{3} = \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\,,$$

basta, entonces, con hallar las dos desviaciones típicas y deducir de la expresión anterior el valor de ρ.

Integrando *por partes*,

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot \tfrac{1}{2} \cdot x^2 e^{-x}\, dx = 3\,,$$
$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot x^2 e^{-x}\, dx = 12$$

y, por tanto, $\mathrm{Var}\,(X) = 12 - 3^2 = 3$.

La esperanza de la variable Y se obtiene como

$$E(Y) = E\,[E(Y \mid X = x)] = E\left(\frac{X}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1\,.$$

Además,

$$E(Y^2 \mid X = x) = \int_{y=0}^{\frac{x}{2}} y^2 \cdot \frac{8y}{x^2}\, dy = \frac{1}{8} \cdot x^2\,.$$

Por tanto,

$$E(Y^2) = E\left[E(Y^2 \mid X = x)\right] = E\left(\frac{1}{8} \cdot X^2\right) = \frac{1}{8} \cdot 12 = \frac{3}{2}\,.$$

Entonces, $\mathrm{Var}\,(Y) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$. En consecuencia,

$$\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,,$$

por lo que, despejando el valor de ρ,

$$\rho = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0.82\,.$$

Resulta, pues, $\rho^2 = \frac{2}{3}$. Las dos terceras partes de la varianza del *consumo en alimentación*, Y, quedan explicadas por la recta de regresión de Y sobre X.

b) La cantidad esperada destinada a alimentación es $E(Y \mid X = 2.5)$, es decir, $\frac{2.5}{3}$ cientos de miles de pesetas, cantidad que aproximadamente vale 83 333 pesetas.

c) Tenemos que obtener la esperanza condicionada $E(X \mid Y = 0.5)$. La función de densidad conjunta de ambas variables es

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_{(Y \mid X = x)}(y)$$

que, sustituyendo, resulta

$$f(x, y) = \begin{cases} 4ye^{-x} & 0 < y < \frac{x}{2}\,, \quad 0 < x < \infty \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto, si $y > 0$,

$$f_Y(y) = \int_{x=2y}^{\infty} 4ye^{-x}\,dx = 4ye^{-2y}\ .$$

En consecuencia, la función de densidad marginal de la variable Y es

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4ye^{-2y} & y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Dividiendo la función de densidad conjunta entre la marginal de Y resulta, para $y > 0$, la función de densidad condicionada

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \begin{cases} \dfrac{4ye^{-x}}{4ye^{-2y}} = e^{-(x-2y)} & x > 2y \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La esperanza condicionada se obtiene a partir de dicha función de densidad:

$$E(X \mid Y = y) = \int_{x=2y}^{\infty} xe^{-(x-2y)}\,dx = 2y + 1\ ,$$

para $y > 0$. En particular, si $y = 0.5$, el resultado es

$$E(X \mid Y = 0.5) = 1 + 2 \cdot 0.5 = 2\ .$$

La renta mensual media de una familia que gaste 50.000 pesetas en alimentación será, pues, de 200.000 pesetas.

Ejercicio 6.21.

a) En el primero de los casos, hemos de buscar un valor de a que minimice la esperanza del cuadrado de los errores. Como la variable error es $\varepsilon = Y - a \cdot |X|$, la función a minimizar es $E[(Y - a \cdot |X|)^2]$.

Desarrollando la esperanza anterior,

$$\begin{aligned} E[(Y - a \cdot |X|)^2] &= E(Y^2 - 2a \cdot |X| \cdot Y + a^2|X|^2) = \\ &= E(Y^2) - 2aE(|X| \cdot Y) + a^2E(|X|^2)\ . \end{aligned}$$

Puesto que se trata de una función cuadrática de a, el mínimo puede obtenerse por técnicas de derivación. Así, la primera derivada con respecto de a resulta

$$-2E(|X| \cdot Y) + 2aE(|X|^2)\ ,$$

que igualada a cero determina el valor de a:

$$a = \frac{E(|X| \cdot Y)}{E(|X|^2)}\ ,$$

siempre que $E(|X|^2)$ sea distinta de cero.

La segunda derivada, $2E(|X|^2)$, si es distinta de cero es positiva, como esperanza de una función no negativa de X. El valor de a obtenido, minimiza, por tanto, la función criterio y, en definitiva, la curva del tipo $y = a \cdot |x|$ que mejor explica la variable Y a partir de X es la curva

$$y = \frac{E(|X| \cdot Y)}{E(|X|^2)} \cdot x \, .$$

Obsérvese que $|X|^2$ no coincide con X^2 salvo que X sea una variable positiva, por lo que, en general, $E(|X|^2)$ no coincide con $E(X^2)$.

En el segundo caso, se trata de minimizar la función criterio $E[(Y - b \cdot X^2)^2]$. Si desarrollamos esta esperanza,

$$E[(Y - bX^2)^2] = E(Y^2) - 2b \cdot E(Y \cdot X^2) + b^2 E(X^4) \, .$$

Derivando dicha función con respecto a b e igualando dicha derivada a cero, se obtiene la ecuación

$$-2E(Y \cdot X^2) + 2bE(X^4) = 0$$

que, si $E(X^4)$ es distinta de cero, suministra el valor de b,

$$b = \frac{E(Y \cdot X^2)}{E(X^4)} \, .$$

La segunda derivada, $2E(X^4)$, si no se anula, es positiva, al ser el doble de la esperanza de una función positiva de X.

Se obtiene, pues, un mínimo de la función criterio, por lo que la función de la forma $y = bx^2$ que mejor resume la relación entre Y y X con el criterio de los mínimos cuadrados de los errores es

$$y = \frac{E(Y \cdot X^2)}{E(X^4)} \cdot x^2 \, .$$

b) Apliquemos a la variable bidimensional (X, Y) discreta cuya función de probabilidad se presenta en la tabla, los resultados del apartado anterior. Calculemos, para ello, los momentos que en los mismos aparecen. Así,

$$E(|X| \cdot Y) = \frac{5}{6} \, ,$$

$$E(|X|^2) = \frac{4}{6}$$

y, como en este caso $X^2 = |X|$,

$$E(Y \cdot X^2) = E(Y \cdot |X|) = \frac{5}{6} \, .$$

Finalmente,

$$E(X^4) = \frac{4}{6}\,.$$

Por tanto, con esta distribución, $a = b = \frac{5/6}{4/6} = \frac{5}{4}$, por lo que, si la función es del tipo $y = a \cdot |x|$, el mejor ajuste viene dado por la curva

$$y = \frac{5}{4} \cdot |x|$$

y, si es del tipo $y = b \cdot x^2$, por la curva

$$y = \frac{5}{4} \cdot x^2\,.$$

La coincidencia entre ambos coeficientes se produce porque, en este ejemplo, la variable $|X|$ coincide con X^2, ya que X toma únicamente los valores -1, 0 y 1.

c) Veamos cuál de las dos regresiones explica mejor Y a partir de X. Para ello, obtengamos los valores de la función criterio para las dos curvas que hemos construido.

Para la primera,

$$E\left[\left(Y - \frac{5}{4} \cdot |X|\right)^2\right] = \left(0 - \frac{5}{4} \cdot 0\right)^2 \frac{2}{6} + \left(1 - \frac{5}{4} \cdot 1\right)^2 \frac{3}{6} + \left(2 - \frac{5}{4} \cdot 1\right)^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

y, por ser en este caso X^2 igual a $|X|$,

$$E\left[\left(Y - \frac{5}{4} \cdot X^2\right)^2\right] = E\left[\left(Y - \frac{5}{4} \cdot |X|\right)^2\right] = \frac{1}{8}\,.$$

En consecuencia, la bondad del ajuste con el criterio de los mínimos cuadrados es, por tanto, igual en ambos casos.

d) Las columnas de la siguiente tabla expresan las funciones de probabilidad de Y, condicionadas por $X = x$, para los distintos valores de x:

	$p[Y = y \mid X = x]$		
Y	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$
0	0	1	0
1	1/2	0	1
2	1/2	0	0

Por consiguiente, las esperanzas condicionadas, que son las esperanzas de Y con las funciones de probabilidad condicionadas de la tabla anterior, valen

$$E(Y \mid X = -1) = 1.5\,, \quad E(Y \mid X = 0) = 0 \quad \text{y} \quad E(Y \mid X = 1) = 1\,.$$

Las varianzas condicionadas se obtienen, también, a partir de las distribuciones condicionadas. Para los valores $x = 0$ y $x = 1$, la varianza condicionada es igual a cero,

ya que la distribución de Y condicionada por $X = x$ es degenerada. Para x igual a -1,

$$E(Y^2 \mid X = -1) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.5 .$$

Por tanto,

$$\text{Var}\,(Y \mid X = -1) = 2.5 - 1.5^2 = 0.25 .$$

Ejercicio 6.22.
Demostraremos, previamente, el siguiente resultado, que utilizaremos frecuentemente en este ejercicio. Si X, Y y Z son tres variables aleatorias, y a, b y c números reales cualesquiera,

$$\text{Cov}\ (a \cdot X, b \cdot Y + c \cdot Z) = a \cdot b \cdot \text{Cov}\ (X, Y) + a \cdot c \cdot \text{Cov}\ (X, Z) .$$

En efecto, si llamamos μ_X, μ_Y y μ_Z a las esperanzas de dichas variables, se tiene que $E(a \cdot X) = a \cdot \mu_X$ y $E(b \cdot Y + c \cdot Z) = b \cdot \mu_Y + c \cdot \mu_Z$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Cov}\ (a \cdot X, b \cdot Y + c \cdot Z) &= E[(a \cdot X - a \cdot \mu_X) \cdot (b \cdot Y + c \cdot Z - b \cdot \mu_Y - c \cdot \mu_Z)] = \\ &= E[a(X - \mu_X) \cdot b(Y - \mu_Y)] + E[a(X - \mu_X) \cdot c(Z - \mu_Z)] = \\ &= a \cdot b \cdot \text{Cov}\ (X, Y) + a \cdot c \cdot \text{Cov}\ (X, Z) .\end{aligned}$$

Veamos, ahora, los resultados propuestos en el enunciado.

a) La variable $\tilde{Y}$ es

$$\tilde{Y} = \mu_Y + \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - \mu_X) .$$

Aplicando el resultado preliminar,

$$\text{Cov}\ (Y, \tilde{Y}) = \text{Cov}\ (Y, \mu_Y) + \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \text{Cov}\ (Y, X) = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \text{Cov}\ (Y, X) .$$

Además,

$$\text{Var}\,(\tilde{Y}) = \rho_{XY}^2 \cdot \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2} \cdot \text{Var}\,(X) = \rho_{XY}^2 \sigma_Y^2 .$$

Por tanto,

$$\rho_{Y\tilde{Y}} = \frac{\rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \text{Cov}\ (X, Y)}{\sigma_Y \cdot |\rho_{XY}| \sigma_Y} = \frac{\rho_{XY}}{|\rho_{XY}|} \cdot \frac{\text{Cov}\ (X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = |\rho_{XY}| .$$

a) Calculemos la covarianza entre $\tilde{Y}$ y ε. Aplicando, nuevamente, el resultado preliminar,

$$\text{Cov}\ , (\tilde{Y}, \varepsilon) = \text{Cov}\ (\tilde{Y}, Y - \tilde{Y}) = \text{Cov}\ (\tilde{Y}, Y) - \text{Cov}\ (\tilde{Y}, \tilde{Y}) .$$

Pero, Cov $(\tilde{Y}, Y) =$ Cov $(Y, \tilde{Y})$ y, según hemos visto en el apartado anterior,

$$\text{Cov } (Y, \tilde{Y}) = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \text{Cov } (X, Y) = \rho_{XY}^2 \sigma_Y^2 ,$$

sin más que sustituir Cov $, (X, Y)$ en función del coeficiente de correlación. Por otro lado,

$$\text{Cov } (\tilde{Y}, \tilde{Y}) = \text{Var}\,(\tilde{Y}) = \rho_{XY}^2 \sigma_Y^2 .$$

En consecuencia, Cov $(\tilde{Y}, \varepsilon) = 0$, es decir, $\tilde{Y}$ y ε están incorrelacionados.

b) Como

$$\text{Cov } (X, \tilde{Y}) = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \text{Cov } (X, X) = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot \sigma_X^2 = \rho_{XY} \sigma_Y \sigma_X ,$$

y $\text{Var}\,(\tilde{Y}) = \rho_{XY}^2 \sigma_Y^2$, entonces,

$$\rho_{X\tilde{Y}} = \frac{\rho_{XY} \sigma_Y \sigma_X}{|\rho_{XY}| \sigma_Y \sigma_X} = \frac{\rho_{XY}}{|\rho_{XY}|} .$$

El coeficiente de correlación lineal entre X e $\tilde{Y}$ vale, por tanto, la unidad si ρ_{XY} es positivo, es igual a -1 si ρ_{XY} es negativo, y no está definido si ρ_{XY} es igual a cero.

Además,

$$\begin{aligned} \text{Cov } (X, \varepsilon) &= \text{Cov } (X, Y - \tilde{Y}) = \text{Cov } , (X, Y) - \text{Cov } (X, \tilde{Y}) = \\ &= \text{Cov } (X, Y) - \text{Cov } (X, Y) = 0 . \end{aligned}$$

Por tanto, $\rho_{X\varepsilon} = 0$.

c) Por un lado,

$$\begin{aligned} \text{Cov } (Y, \varepsilon) &= \text{Cov } (Y, Y - \tilde{Y}) = \text{Var}\,(Y) - \text{Cov } (Y, \tilde{Y}) = \\ &= \sigma_Y^2 - \rho_{XY}^2 \sigma_Y^2 = \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2) . \end{aligned}$$

Además, $\text{Var}\,(\varepsilon)$ es la varianza residual que, como es conocido, vale $\sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)$. En consecuencia,

$$\rho_{Y\varepsilon}^2 = \frac{[\sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)]^2}{\sigma_Y^2 \cdot \sigma_Y^2 (1 - \rho_{XY}^2)} = 1 - \rho_{XY}^2 .$$

d) Calculemos los momentos de órdenes primero y segundo. Se obtiene con sencillez que

$$\mu_X = 0 , \quad \mu_Y = -\frac{1}{6} \qquad \text{y} \qquad \text{Var}\,(X) = E(X^2) = 1 ;$$

además, $E(Y^2) = \frac{5}{6}$, y, por tanto,

$$\text{Var}\,(Y) = \frac{29}{36}\,.$$

Por otra parte,

$$\text{Cov}\;(X,Y) = E(X\cdot Y) = \frac{1}{6}\,,$$

con lo que

$$\rho_{XY} = \frac{1/6}{\sqrt{29/36}} = \frac{1}{\sqrt{29}}\,.$$

En definitiva, la recta de regresión de Y sobre X es

$$y = \frac{1}{6}\cdot x - \frac{1}{6}\,,$$

con lo cual,

$$\tilde{Y} = \frac{1}{6}\,(X-1)$$

y

$$\varepsilon = Y - \frac{1}{6}\,(X-1)\,.$$

Comprobemos, entonces, los resultados de apartados anteriores. La comprobación directa obliga a obtener las funciones de probabilidad de distintos pares de variables y, a partir de ellas, hallar los correspondientes coeficientes de correlación. Como la mayor dificultad de este apartado reside en calcular las correspondientes funciones de probabilidad, será lo que haremos, dejando al lector el cálculo directo de los coeficientes de correlación mediante las mismas.

Para el apartado *a*), obsérvese que la función de probabilidad conjunta de Y e $\tilde{Y}$ es

$\tilde{Y}\backslash Y$	-1	0	1
$-1/3$	$2/6$	0	$1/6$
0	$1/6$	$1/6$	$1/6$

donde, por ejemplo,

$$p\left[\tilde{Y} = -\frac{1}{3}, Y = -1\right] = p[X=-1, Y=-1] = \frac{2}{6}\,.$$

Si el lector calcula las varianzas de las variables Y e $\tilde{Y}$ y su covarianza, comprobará que $\rho_{Y\tilde{Y}}$ vale $\frac{1}{\sqrt{29}}$, esto es, coincide con $|\rho_{XY}|$.

Comprobemos que $\tilde{Y}$ y ε están incorrelacionadas, según se demuestra para el caso general en el apartado *b*). Puesto que ε es la variable aleatoria $Y-\tilde{Y}$, esto es, $Y-\frac{1}{6}(X-1)$, toma seis valores, correspondientes a los pares de valores de la variable bidimensional (X,Y):

$$-1\,,\quad -\tfrac{2}{3}\,,\quad 0\,,\quad \tfrac{1}{3}\,,\quad 1\quad \text{y}\quad \tfrac{4}{3}\,.$$

No obstante, dado que $\varepsilon = \frac{1}{3}$ ocurre con probabilidad igual a cero (para $X = -1$ e $Y = 0$), eliminaremos este valor.

En definitiva, la función de probabilidad conjunta de $\tilde{Y}$ y ε es la que recoge la siguiente tabla de doble entrada:

$\tilde{Y}\backslash\varepsilon$	-1	$-2/3$	0	1	$4/3$
$-1/3$	0	$2/6$	0	0	$1/6$
0	$1/6$	0	$1/6$	$1/6$	0

donde, por ejemplo, $p[\tilde{Y} = -\frac{1}{3}, \varepsilon = -\frac{2}{3}] = p[X = -1, Y = -1] = \frac{2}{6}$.

A partir de esta tabla se calcula con sencillez la covarianza entre ambas variables. Como comprobará el lector, dicha covarianza es igual a cero, por lo que $\tilde{Y}$ y ε están incorrelacionadas.

En lo referente al apartado *c*), puesto que $\tilde{Y} = \frac{1}{6}(X - 1)$, la función de probabilidad conjunta de X e $\tilde{Y}$ viene dada por la tabla

$X\backslash\tilde{Y}$	$-1/3$	0
-1	$3/6$	0
1	0	$3/6$

siendo, por ejemplo, $p[X = 1, \tilde{Y} = 0] = p[X = 1] = \frac{3}{6}$.

Se comprueba, sin dificultad, que $\rho_{X\tilde{Y}} = 1$, es decir, el valor

$$\frac{\rho_{XY}}{|\rho_{XY}|} = \frac{1/\sqrt{29}}{|1/\sqrt{29}|} = 1\,.$$

La función de probabilidad conjunta de X y ε se deduce del mismo modo que en la comprobación del apartado *b*):

$X\backslash\varepsilon$	-1	$-2/3$	0	1	$4/3$
-1	0	$2/6$	0	0	$1/6$
1	$1/6$	0	$1/6$	$1/6$	0

De esta tabla se tiene de forma directa el valor $\rho_{X\varepsilon} = 0$.

Además, en nuestro ejemplo se cumple

$$\rho^2_{Y\varepsilon} = 1 - \rho^2_{XY} = 1 - \frac{1}{29} = \frac{28}{29}\,,$$

como puede comprobar el lector con la tabla

$\varepsilon \backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/6$	0	0
$-2/3$	$2/6$	0	0
0	0	$1/6$	0
1	0	0	$1/6$
$4/3$	0	0	$1/6$

que recoge la distribución conjunta de las variables Y y ε.

Ejercicio 6.23.
Puesto que los errores en la regresión lineal de X sobre Z y de Y sobre Z son, respectivamente,

$$\varepsilon_{X|Z} = X - E(X) - \frac{\text{Cov }(X,Z)}{\text{Var}\,(Z)} \cdot [Z - E(Z)] = X - b_{X|Z} Z$$

y

$$\varepsilon_{Y|Z} = Y - E(Y) - \frac{\text{Cov }(Y,Z)}{\text{Var }(Z)} \cdot [Z - E(Z)] = Y - b_{Y|Z} Z$$

ya que, en este caso, $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0$, el coeficiente de correlación lineal, $\rho_{XY|Z}$, denominado coeficiente de correlación parcial entre X e Y dada Z, es el que existe entre los errores de las regresiones lineales de X sobre Z y de Y sobre Z.

Como es sabido, los errores en la regresión lineal tienen esperanza cero y su varianza es la varianza residual; por tanto,

$$E(\varepsilon_{X|Z}) = E(\varepsilon_{Y|Z}) = 0\,,$$

y, además,

$$\text{Var}\,(\varepsilon_{X|Z}) = \text{Var}\,(X) \cdot (1 - \rho^2_{XZ})$$

y

$$\text{Var}\,(\varepsilon_{Y|Z}) = \text{Var}\,(Y) \cdot (1 - \rho^2_{YZ})\,.$$

Calculemos la covarianza entre ambos errores. Aplicando dos veces el resultado preliminar del ejercicio anterior,

$$\begin{aligned}
\text{Cov}\,(\varepsilon_{X|Z}, \varepsilon_{Y|Z}) &= \text{Cov}\,(X - b_{X|Z} Z, Y - b_{Y|Z} Z) = \\
&= \text{Cov}\,(X,Y) - \frac{\text{Cov},(Y,Z)}{\text{Var},(Z)} \cdot \text{Cov}\,(X,Z) - \\
&- \frac{\text{Cov}\,(X,Z)}{\text{Var}\,(Z)} \cdot \text{Cov},(Y,Z) + \frac{\text{Cov}\,(X,Z)}{\text{Var}\,(Z)} \cdot \frac{\text{Cov}\,(Y,Z)}{\text{Var},(Z)} \cdot Var(Z) = \\
&= \text{Cov}\,(X,Y) - \frac{\text{Cov}\,(X,Z) \cdot \text{Cov}\,(Y,Z)}{\text{Var}\,(Z)}\,.
\end{aligned}$$

Si escribimos dicha covarianza en función de los coeficientes de correlación,

$$\text{Cov}\ (\varepsilon_{X|Z}, \varepsilon_{Y|Z}) = \sqrt{\text{Var}\,(X) \cdot \text{Var}\,(Y)}\,(\rho_{XY} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{YZ})\,.$$

En definitiva,

$$\begin{aligned}\rho_{XY|Z} &= \frac{\text{Cov}\,(\varepsilon_{X|Z}, \varepsilon_{Y|Z})}{\sqrt{\text{Var}\,(\varepsilon_{X|Z}) \cdot \text{Var}\,(\varepsilon_{Y|Z})}} = \\ &= \frac{\sqrt{\text{Var}\,(X) \cdot \text{Var}\,(Y)}\,(\rho_{XY} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{YZ})}{\sqrt{\text{Var}\,(X)\,(1-\rho_{XZ}^2) \cdot \text{Var}\,(Y)\,(1-\rho_{YZ}^2)}} = \\ &= \frac{\rho_{XY} - \rho_{XZ} \cdot \rho_{YZ}}{(1-\rho_{XZ}^2)^{1/2} \cdot (1-\rho_{YZ}^2)^{1/2}}\,.\end{aligned}$$

Ejercicio 6.24.

a) Hallemos las funciones de densidad condicionadas. Realizando las correspondientes integraciones, se obtiene sin dificultad que

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_Y(y) = \begin{cases} -\ln y & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por tanto, si $0 < x < 1$,

$$f_{(Y|X=x)}(y) = \begin{cases} 1/x & 0 < y < x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y, si $0 < y < 1$

$$f_{(X|Y=y)}(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x \ln y} & y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calculemos, ahora, las esperanzas y varianzas condicionadas. Así, para $0 < y < 1$

$$E(X \mid Y = y) = \int_{x=y}^{1} x \left(-\frac{1}{x \ln y}\right) dx = \frac{y-1}{\ln y}$$

y

$$E(X^2 \mid Y = y) = \int_{x=y}^{1} x^2 \left(-\frac{1}{x \ln y}\right) dx = \frac{y^2-1}{2 \ln y}\,,$$

de donde

$$\text{Var}\,(X \mid Y = y) = \frac{y^2 - 1}{2 \ln y} - \left(\frac{y-1}{\ln y}\right)^2 .$$

De la misma forma se obtienen

$$E(Y \mid X = x) = \int_{y=0}^{x} y \cdot \frac{1}{x}\, dy = \frac{x}{2}$$

y

$$E(Y^2 \mid X = x) = \int_{y=0}^{x} y^2 \cdot \frac{1}{x}\, dy = \frac{x^2}{3} ,$$

con lo cual,

$$\text{Var}\,(Y \mid X = x) = \frac{x^2}{3} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{12} .$$

b) Hallemos los momentos marginales de primer y segundo orden de X e Y. Así,

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{1}{2} ,$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, dx = \frac{1}{3} ,$$

y, en consecuencia, $\text{Var}\,(X) = \frac{1}{12}$.

Para la variable Y, integrando *por partes*,

$$E(Y) = \int_0^1 y(-\ln y)\, dy = \frac{1}{4} ,$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2(-\ln y)\, dy = \frac{1}{9}$$

y, consecuentemente, $\text{Var}\,(Y) = \frac{7}{144}$.

Obtengamos, finalmente, la covarianza entre X e Y. Como

$$E(X \cdot Y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} xy \cdot \frac{1}{x}\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{6} ,$$

resulta

$$\text{Cov}\ (X, Y) = \frac{1}{24} .$$

La matriz de esperanzas es, por tanto,

$$E\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

La matriz de varianzas-covarianzas es la matriz de dimensión 2×2,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Var}\,(X) & \mathrm{Cov}\,(X,Y) \\ \mathrm{Cov}\,(X,Y) & \mathrm{Var}\,(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 7/144 \end{pmatrix} = 1/12 \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 7/12 \end{pmatrix}.$$

c) Las características pedidas en este apartado podrían obtenerse directamente; no obstante, vamos a utilizar los resultados anteriores que permiten realizar los cálculos de una forma más compacta.

Así, las variables U y V pueden agruparse en forma vectorial,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

con lo cual, teniendo en cuenta las propiedades de la esperanza de una matriz,

$$E\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot E\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y, como es sabido, la matriz de varianzas-covarianzas resulta del producto

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/12 & 1/24 \\ 1/24 & 7/144 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61/48 & -1/6 \\ -1/6 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

En definitiva, $\mathrm{Var}\,(U) = \frac{61}{48}$, $\mathrm{Var}\,(V) = \frac{1}{9}$ y $\mathrm{Cov}\ (U,V) = -\frac{1}{6}$.

Ejercicio 6.25.

Escribamos las variables $X_1, \ldots, X_n$ en función de $Y_1, \ldots, Y_n$. Así, $X_1 = Y_1$, y utilizando repetidamente la expresión del enunciado,

$$\begin{aligned} X_2 &= \alpha X_1 + Y_2 = \alpha Y_1 + Y_2\,, \\ X_3 &= \alpha X_2 + Y_3 = \alpha^2 Y_1 + \alpha Y_2 + Y_3\,, \end{aligned}$$

y, en general,

$$X_i = \alpha^{i-1} Y_1 + \alpha^{i-2} Y_2 + \cdots + \alpha Y_{i-1} + Y_i\,.$$

La última variable vale

$$X_n = \alpha^{n-1} Y_1 + \alpha^{n-2} Y_2 + \cdots + \alpha Y_{n-1} + Y_n\,.$$

En forma matricial,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

o, abreviadamente, $\mathbf{X} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}$, siendo $\mathbf{M}$ la matriz numérica de la expresión anterior.

A partir de esta expresión se comprueba que $E(\mathbf{X}) = 0$; en efecto, como las variables $Y_1, \ldots, Y_n$ tienen esperanza igual a cero, $E(\mathbf{Y}) = 0$ y, en consecuencia,

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{M} \cdot E(\mathbf{Y}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \,,$$

donde $\mathbf{0}$ es una matriz columna de dimensión $n \times 1$ con todos sus elementos iguales a cero.

Por otro lado, como las variables $Y_1, \ldots, Y_n$ están incorrelacionadas y tienen varianza σ^2, la matriz de varianzas-covarianzas de $\mathbf{Y}$ resulta

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_n \,,$$

donde $\mathbf{I}_n$ es la matriz identidad de orden n. En consecuencia,

$$\begin{aligned} V(\mathbf{X}) &= \mathbf{M} \cdot V(\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{M} \cdot (\sigma^2 \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{M}' = \sigma^2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M}' = \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{n-1} & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \sigma^2 \cdot \mathbf{P} \,. \end{aligned}$$

El elemento (i, j) del producto matricial anterior, esto es, el elemento p_{ij}, se obtiene multiplicando la fila i-ésima de la primera matriz por la columna j-ésima de la segunda. Pero la fila i-ésima de la primera matriz tiene como elementos

$$\alpha^{i-1}, \alpha^{i-2}, \ldots, \alpha^{i-k}, \ldots, \alpha, 1, 0, \ldots, 0 \,,$$

esto es, los valores α^{i-k}, para $k = 1, \ldots, i$, y cero para el resto de los elementos.

Como la segunda matriz es la traspuesta de la primera, su columna j-ésima toma como valores los de la j-ésima fila de la primera matriz,

$$\alpha^{j-1}, \alpha^{j-2}, \ldots, \alpha^{j-k}, \ldots, \alpha, 1, 0, \ldots, 0\,,$$

es decir, α^{j-k} para $k = 1, \ldots, j$, y cero para los restantes elementos.

Por tanto,

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{\text{mín}(i,j)} \alpha^{i-k}\alpha^{j-k} = \sum_{k=1}^{\text{mín}(i,j)} \alpha^{i+j-2k}\,.$$

Se trata de la suma de términos de una progresión geométrica de razón α^{-2}, cuyo primer término es α^{i+j-2} y el último $\alpha^{i+j-2\cdot\,\text{mín}(i,j)}$, con lo cual,

$$p_{ij} = \frac{\alpha^{i+j-2\cdot\text{mín}(i,j)}\cdot\alpha^{-2} - \alpha^{i+j-2}}{\alpha^{-2}-1} = \alpha^{i+j-2}\cdot\frac{\alpha^{-2\cdot\text{mín}(i,j)}-1}{\alpha^{-2}-1}\,,$$

y, en definitiva, el elemento (i,j) de la matriz de varianzas-covarianzas vale

$$\sigma_{ij} = \sigma^2\cdot p_{ij} = \sigma^2\cdot\alpha^{i+j-2}\cdot\frac{\alpha^{-2\cdot\text{mín}(i,j)}-1}{\alpha^{-2}-1}\,,$$

para $i, j = 1, \ldots, n$. En concreto, las varianzas de las variables X_i son

$$\text{Var}\,(X_i) = \sigma_{ii} = \sigma^2\cdot p_{ii} = \sigma^2\cdot\alpha^{2i-2}\cdot\frac{\alpha^{-2i}-1}{\alpha^{-2}-1}\,.$$

Capítulo 7

FUNCIONES CARACTERÍSTICAS

La función característica de una variable aleatoria es una función asociada a su distribución de probabilidades que permite conocer y estudiar esta última.

Si X e Y son variables aleatorias (reales) sobre Ω, se llama **variable aleatoria compleja** a la aplicación del espacio muestral en el conjunto de los números complejos, definida como

$$Z(\omega) = X(\omega) + i \cdot Y(\omega)$$

para todo elemento ω de Ω, siendo i la unidad imaginaria de los números complejos.

Entonces, la esperanza matemática de Z, siempre que exista, es

$$E(Z) = E(X) + i \cdot E(Y) \, .$$

Si (Ω, α, p) es un espacio probabilístico y X es una variable aleatoria (real), se denomina **función característica de** X a la aplicación φ_X, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \, , \quad \text{para todo número real } t \, .$$

La función característica, que existe siempre, es la esperanza de una variable aleatoria compleja, como indica la definición; en concreto,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) = E[\cos(tX)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(tX)] \, .$$

Si X es una variable aleatoria discreta, su función característica se calcula como

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} \cdot p[X = x_j]$$

y, si X es continua, como

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\, dx .$$

Algunos de los resultados que justifican, en gran parte, la introducción del concepto de función característica son:

1. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \cdot \varphi_X(at)$.
2. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y φ es la función característica de su suma, $\sum_{j=1}^{n} X_j$, entonces,

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) .$$

3. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, y φ es la función característica de su suma, $\sum_{j=1}^{n} X_j$, entonces,

$$\varphi(t) = [\varphi_X(t)]^n ,$$

siendo φ_X la función característica de cada una de las variables.

4. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, entonces, la función característica de la media muestral, $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, es

$$\varphi_{\overline{X}}(t) = \left[\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n .$$

A partir de la función característica, pueden obtenerse momentos no centrales de la distribución. Así,

$$\alpha_k = E(X^k) = \frac{1}{i^k} \cdot \left.\frac{\partial^k \varphi_X(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} .$$

La importancia de la función característica en el estudio de las distribuciones de variables aleatorias reside en el hecho de que caracteriza su distribución de probabilidades. Así, las funciones características y las de distribución se relacionan mediante la denominada **fórmula** o **teorema de inversión**,

$$F_X(x_2) - F_X(x_1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} \cdot \varphi_X(t)\, dt .$$

Si la variable es discreta o continua, puede establecerse la relación en términos de la función de probabilidad o de densidad, respectivamente. Así, si X es discreta,

$$f_X(x_j) = p[X = x_j] = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \frac{e^{-it(x_{j-1}+h)} - e^{-it(x_j+h)}}{it} \cdot \varphi_X(t)\, dt \,,$$

donde h cumple que $x_{j-1} + h < x_j$ y $x_j + h < x_{j+1}$.

Si X es continua y $|\varphi|$ es integrable en $\mathbb{R}$,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \cdot \varphi_X(t)\, dt \,, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \,.$$

Se llama **función característica** de una variable n-dimensional, $(X_1, \ldots, X_n)$, a la aplicación $\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}$, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{C}$,

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = E\left[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right] \,,$$

para todo $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

La función característica, que existe siempre, puede expresarse en forma matricial como

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E\left(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}\right) = E[\cos(\mathbf{t}'\mathbf{X})] + i \cdot E[\operatorname{sen}(\mathbf{t}'\mathbf{X})] \,,$$

donde $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)'$ y $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$.

Por tanto, si $\mathbf{X}$ es discreta,

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)} \cdot p[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \,,$$

y, si $\mathbf{X}$ es continua,

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \int_{x_1} \cdots \int_{x_n} e^{i(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)} \cdot f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \,.$$

Algunas propiedades de interés son:

1. $\varphi_{X_j}(t_j) = \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(0, \ldots, t_j, \ldots, 0)$, para $j = 1, \ldots, n$; análogamente, se calcularía la función característica de cualquier grupo de variables.
2. Si φ es la función característica de $\sum_{j=1}^{n} a_jX_j$,

$$\varphi(t) = \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(a_1t, \ldots, a_nt) \,.$$

3. Si φ es la función característica de $\sum_{j=1}^{n} X_j$,

$$\varphi(t) = \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t, \ldots, t) \,.$$

4. Las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son independientes si, y solamente si,

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t_j)\,.$$

Como en el caso unidimensional, pueden calcularse los momentos respecto del origen a partir de la función característica. Así,

$$E(X_1^{j_1}\cdots X_n^{j_n}) = \frac{1}{i^{j_1+\cdots+j_n}} \cdot \left.\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)}{\partial t_1^{j_1}\ldots\partial t_n^{j_n}}\right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}},$$

donde $\mathbf{0}$ es la matriz columna formada por n ceros.

La función característica de una variable n-dimensional caracteriza su distribución de probabilidades, como lo hacen la función de probabilidad o de densidad y la función de distribución n-dimensional. Al igual que en el caso unidimensional, estas tres funciones se relacionan, pudiéndose hallar una de ellas a partir de cualquiera de las otras dos.

Ejercicios propuestos

¶ **7.1.** Sea φ_X la función característica de una variable aleatoria unidimensional. Demuéstrese que:

a) $\varphi_X(0) = 1$.
b) $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
c) $\varphi_X(-t)$ es el conjugado de $\varphi_X(t)$.

7.2. Sea X una variable aleatoria que toma siempre el valor 2. Calcúlese su función característica.

7.3. Sea X la variable aleatoria que toma los valores 1 y 0, con probabilidades $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente. Calcúlese su función característica.

7.4. De una urna compuesta por 3 bolas blancas y 2 negras, una persona extrae tres bolas sin devolución. Se pide:

a) Función característica de X, número de bolas negras extraídas hasta obtener una bola blanca.
b) Esperanza y varianza de X, a partir del resultado anterior.

7.5. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcúlese su función característica.

b) Hállese su esperanza a partir del resultado anterior.

7.6. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese la función característica de X.

7.7. Para contratar a sus mecanógrafas, una empresa realiza entre las aspirantes un examen consistente en escribir a máquina por espacio de una hora. El sueldo que asigna a las elegidas está en función del número de folios que han completado en dicho tiempo. Según este criterio establece la siguiente clasificación:

— Las secretarias de clase A, con más de ocho folios por hora, recibirán un sueldo de 1.000 pesetas por hora.

— Las secretarias de clase B, entre seis y ocho folios por hora, con un sueldo de 700 pesetas por hora.

— Las secretarias de clase C, de cuatro a seis folios por hora, que percibirán un sueldo de 500 pesetas por hora.

Si admitimos que el número de folios que escribe una secretaria es una variable aleatoria, X, con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & 4 < x < 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la función característica de la variable aleatoria, Y, salario por hora de una mecanógrafa en esta empresa.

b) Obténgase el salario medio por hora de una secretaria a partir del resultado del apartado anterior.

7.8. Ana está muy disgustada por el servicio que se le ha prestado en la Seguridad Social, ya que ha tenido que esperar tres meses para ser sometida a una cierta operación.

Si el tiempo, en meses, que un paciente en las condiciones de Ana tiene que aguardar hasta ser intervenido quirúrgicamente es una variable aleatoria cuya función característica es

$$\varphi_X(t) = (1 - 4it)^{-1} ,$$

¿tiene Ana motivos para estar enfadada?

¶ **7.9.** Sea φ_X la función característica de una variable unidimensional. Demuéstrese que

$$\text{Var } (X) = \frac{1}{i^2} \cdot \left. \frac{\partial^2 \ln (\varphi_X(t))}{\partial t^2} \right|_{t=0},$$

teniendo en cuenta que $\varphi_X(0) = 1$.

¶ **7.10.** Sea $\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)$ la función característica de una variable aleatoria n-dimensional. Pruébese que:

a) $\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(0,\ldots,0) = 1$.

b) $|\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)| \leq 1$.

c) $\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(-t_1,\ldots,-t_n)$ es el conjugado de $\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)$.

7.11. Demuéstrese que la función característica de una variable aleatoria n-dimensional siempre existe.

7.12. Sea $\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)$ la función característica de la variable (X,Y). Calcúlese, a partir de ella, la correspondiente a $X - Y$.

7.13. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional discreta cuya función de probabilidad viene recogida en la siguiente tabla:

$X\backslash Y$	-1	1	
0	3/6	1/6	4/6
1	2/6	0	2/6
	5/6	1/6	1

a) Calcúlese su función característica.

b) Obténganse las funciones características de X e Y, así como la de $Z = 3X - 2Y$. ¿Son independientes X e Y?

c) Calcúlese la covarianza entre X e Y a partir de la función característica conjunta de ambas variables.

7.14. De una urna compuesta por 3 bolas blancas y 2 negras, una persona extrae tres bolas sin devolución. Se pide:

a) Función característica conjunta de X, número de bolas blancas extraídas, y de Y, número de bolas negras hasta obtener una blanca.

b) Funciones características marginales de X y de Y.

c) Calcúlese, a partir de las funciones características obtenidas en los apartados anteriores, el coeficiente de correlación entre X e Y.

d) De una urna idéntica a la anterior, otra persona extrae tres bolas sin devolución. Obténgase la función característica de la variable número de bolas blancas extraídas entre las dos personas.

7.15. Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1\,, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obténgase su función característica.

b) Calcúlense las funciones características marginales de X y de Y. ¿Son ambas variables independientes?

c) Calcúlese la función característica de la variable aleatoria $X + Y$.

¶ **7.16.** Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua cuya función de densidad es

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hállese la función característica conjunta.

b) Calcúlense las funciones características marginales.

c) ¿Son X e Y independientes?

d) Obténgase la función característica de $Z = 2X - 3Y$.

7.17. A instancias de la Dirección General de Tráfico, los ayuntamientos de las ciudades con mayor parque automovilístico han elaborado informes sobre la seguridad vial en sus calles. A partir de dichos informes, se ha obtenido que la distribución conjunta de X, número de atropellos al mes en la vía con más densidad de tráfico de una cierta ciudad, y de Y, número de atropellos en la segunda vía más conflictiva, en cuanto a densidad, se modeliza según la siguiente función característica:

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \frac{e^{2(e^{it_1}-1)}}{e^{1-e^{it_2}}}\,.$$

a) Obténgase la función característica de cada una de las variables.

b) ¿Cuál de las dos calles tiene un mayor número medio mensual de atropellos?

c) Hállese una medida de la variabilidad del número de accidentes al mes en la vía con mayor densidad automovilística.

d) ¿Existe relación entre el número de accidentes por atropello en cada una de las dos calles?

7.18. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < \infty .$$

Se demuestra que su función característica vale $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

a) Obténgase la función característica de $Y = 2X$ y, teniendo en cuenta que $X + Y = X + 2X = 3X$, compruébese que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, para todo t.

b) Pruébese que X e Y no son independientes.

¶ **7.19.** Sea $\varphi_{(X,Y)}$ la función característica de una variable bidimensional. Considerando que $\varphi_{(X,Y)}(0,0) = 1$, demuéstrese que:

a)

$$\alpha_{r,s} = E(X^r \cdot Y^s) = \frac{1}{i^{r+s}} \cdot \left. \frac{\partial^{r+s} \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} \right|_{(t_1,t_2)=(0,0)}$$

b)

$$\text{Cov } (X,Y) = \frac{1}{i^2} \cdot \left. \frac{\partial^2 \ln \left(\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\right)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{(t_1,t_2)=(0,0)}$$

¶ **7.20.** Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una variable aleatoria n-dimensional cuya función característica es el producto de las marginales, φ_{X_j}, para $j = 1, \ldots, n$, esto es,

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \cdots \varphi_{X_n}(t_n) .$$

Pruébese que $X_1, \ldots, X_n$ son independientes.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 7.1.

a) Como, para cualquier número real, t,

$$\varphi_X(t) = E[\cos(tX)] + i \cdot E[\text{sen}(tX)] ,$$

en particular, para $t = 0$ resulta:

$$\varphi_X(0) = E[\cos(0)] + i \cdot E[\text{sen}(0)] = 1 + i \cdot 0 = 1 .$$

b) Es sabido que el módulo de la esperanza de una variable aleatoria es menor o igual que la esperanza del módulo de dicha variable. Por tanto,

$$|\varphi_X(t)| = \left|E\left(e^{itX}\right)\right| \leq E\left(\left|e^{itX}\right|\right) .$$

Pero la variable aleatoria compleja $\left|e^{itX}\right|$ vale

$$\left|e^{itX}\right| = |\cos(tX) + i \cdot \operatorname{sen}(tX)| = \sqrt{\cos^2(tX) + \operatorname{sen}^2(tX)} = \sqrt{1} = 1 .$$

En consecuencia,

$$|\varphi_X(t)| \leq E\left(\left|e^{itX}\right|\right) = E(1) = 1 .$$

c) Si $z = a + i \cdot b$ es un número complejo escrito en forma binómica, su conjugado es el número complejo $\bar{z} = a - i \cdot b$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \varphi_X(-t) &= E[\cos(-tX)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(-tX)] = \\ &= E[\cos(tX)] - i \cdot E[\operatorname{sen}(tX)] = \overline{\varphi_X(t)} . \end{aligned}$$

Ejercicio 7.2.

Si X es una variable aleatoria que vale siempre 2, se trata de una variable discreta degenerada (una constante). Su función de probabilidad vale cero para todo número real x, salvo para $x = 2$, con $p[X = 2] = 1$.

Hallamos su función característica:

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} \cdot p[X = x_j] = e^{it \cdot 2} \cdot p[X = 2] = e^{2it} .$$

Podríamos haberla obtenido, también, en forma binómica. Así,

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E[\cos(tX)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(tX)] = \\ &= E[\cos(2t)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(2t)] = \cos(2t) + i \cdot \operatorname{sen}(2t) . \end{aligned}$$

En ambos casos, el resultado es el mismo, ya que

$$e^{2it} = \cos(2t) + i \cdot \operatorname{sen}(2t) .$$

Ejercicio 7.3.

Como

$$e^{itX} = \begin{cases} e^{it} & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

la función característica de la variable aleatoria X es

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \quad = e^{it} \cdot p[X=1] + 1 \cdot p[X=0] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot e^{it} + \frac{2}{3} .$$

Ejercicio 7.4.

a) Designando por B_i y N_i los sucesos *extraer bola blanca* y *extraer bola negra* en la i-ésima extracción, respectivamente,

$$p[X=0] \quad = p(B_1) = \frac{3}{5} ,$$

$$p[X=1] \quad = p(N_1 B_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10} \quad \text{y}$$

$$p[X=2] \quad = p(N_1 N_2 B_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{10} .$$

Calculemos la función característica:

$$\varphi_X(t) \quad = \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} \cdot p[X = x_j] =$$
$$= e^{it\cdot 0} \cdot \frac{3}{5} + e^{it\cdot 1} \cdot \frac{3}{10} + e^{it\cdot 2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{6 + 3e^{it} + e^{2it}}{10} .$$

b) Para obtener los dos primeros momentos no centrales hay que derivar dos veces la función característica. Recuerde el lector que las funciones complejas, si son derivables, se derivan como las reales, esto es, como si i fuese una constante real. Así,

$$\varphi'_X(t) = \frac{3ie^{it} + 2ie^{2it}}{10} .$$

Ahora bien, para $k = 1$, la expresión que proporciona el momento no central de orden k a partir de la función característica es

$$E(X) = \frac{1}{i} \cdot \varphi'_X(0) = \frac{3+2}{10} = \frac{1}{2} .$$

Derivando nuevamente la primera derivada,

$$\varphi''_X(t) = \frac{3i^2 e^{it} + 4i^2 e^{2it}}{10} .$$

Concretando para $k = 2$ la expresión general a que nos hemos referido anteriormente,

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2} \cdot \varphi''_X(0) = \frac{3+4}{10} = \frac{7}{10} .$$

En consecuencia,

$$\text{Var } (X) = \frac{7}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{20} .$$

Ejercicio 7.5.

a) Al ser X una variable aleatoria continua, su función característica es

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 e^{itx} \cdot 1\,dx = \int_0^1 \cos(tx)\,dx + i \cdot \int_0^1 \operatorname{sen}(tx)\,dx\,,$$

que, para t distinto de cero, vale

$$\varphi_X(t) = \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} + i \cdot \frac{[1-\cos(t)]}{t} = \frac{\operatorname{sen}(t) + i - i \cdot \cos(t)}{t}\,.$$

Si multiplicamos y dividimos por i la expresión anterior, recordando que $i^2 = -1$,

$$\varphi_X(t) = \frac{i \cdot \operatorname{sen}(t) + i^2 - i^2 \cdot \cos(t)}{it} = \frac{\cos(t) + i \cdot \operatorname{sen}(t) - 1}{it} = \frac{e^{it} - 1}{it}\,.$$

Para t igual a cero,

$$\begin{aligned}\varphi_X(0) &= \textstyle\int_0^1 \cos(0 \cdot x)\,dx + i \cdot \int_0^1 \operatorname{sen}(0 \cdot x)\,dx = \\ &= \textstyle\int_0^1 1\,dx + i \cdot \int_0^1 0\,dx = 1 + 0 \cdot i = 1\,.\end{aligned}$$

En definitiva,

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it}-1}{it} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

es la función característica de la variable X.

b) En este caso, resulta bastante más complicado que en el ejercicio anterior el cálculo de la esperanza de X derivando en $t = 0$, ya que hemos de aplicar la definición de derivada. De esta forma,

$$\varphi'_X(0) = \left.\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_X(h) - \varphi_X(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{ih}-1}{ih} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih} - 1 - ih}{ih^2}\,.$$

El límite anterior es un caso de indeterminación, ya que tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Si aplicamos la regla de L'Hpital (derivando el numerador y el denominador respecto de h),

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{ih} - 1 - ih}{ih^2} = \lim_{h\to 0} \frac{ie^{ih} - i}{2ih} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih} - i}{2h}\,.$$

Este límite vuelve a ser un caso de indeterminación del mismo tipo, por lo que volvemos a aplicar la misma regla y, en definitiva,

$$\varphi'_X(0) = \left.\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ih} - 1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{ie^{ih}}{2} = \frac{i}{2}\,.$$

Por tanto,

$$E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = \frac{1}{2} . \quad \triangleleft$$

Compare el lector la dificultad del cálculo de la esperanza a partir de la función característica, con la sencillez del cálculo directo de la misma. Sin embargo, hay casos en los que interesará obtener los momentos de esta forma.

Ejercicio 7.6.
Dado que

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = E[\cos(tX)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(tX)] ,$$

tenemos que calcular $E[\cos(tX)]$ y $E[\operatorname{sen}(tX)]$. Integrando *por partes*, la primera de las esperanzas vale

$$E[\cos(tX)] = \int_0^1 \cos(tx) \cdot 2x \, dx = 2\left[\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} + \frac{\cos(t)}{t^2} - \frac{1}{t^2}\right] .$$

Análogamente, la segunda esperanza resulta

$$E[\operatorname{sen}(tX)] = \int_0^1 \operatorname{sen}(tx) \cdot 2x \, dx = 2\left[\frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2} - \frac{\cos(t)}{t}\right] .$$

En definitiva,

$$\varphi_X(t) = 2\left[\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t} + \frac{\cos(t) - 1}{t^2}\right) + i\left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t^2} - \frac{\cos(t)}{t}\right)\right] .$$

A veces se practican discutibles construcciones de la función característica, que suponen calcular una integral en el campo complejo como una integral real, trabajando como si la unidad imaginaria, i, fuese una constante real. En nuestro caso, integrando *por partes*,

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_0^1 e^{itx} \cdot 2x \, dx = \frac{e^{it}}{it} + \frac{e^{it}}{t^2} - \frac{1}{t^2} .$$

Puede comprobar el lector que el resultado es el mismo, sin más que sustituir e^{it} por $\cos(t) + i \cdot \operatorname{sen}(t)$.

Ejercicio 7.7.
a) El *salario por hora*, Y, es una variable discreta, que toma los valores 500, 700 y 1 000, con probabilidades

$$p[Y = 500] \quad = p[4 < X \leq 6] = \int_4^6 \frac{1}{6} \, dx = \frac{1}{3} ,$$

$$p[Y = 700] \quad = p[6 < X \leq 8] = \frac{1}{3} \qquad \text{y}$$

$$p[Y = 1\,000] \quad = p[8 < X < 10] = \frac{1}{3} .$$

Por tanto,

$$\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = \frac{1}{3}\left(e^{500it} + e^{700it} + e^{1\,000it}\right) .$$

b) Si derivamos la función característica anterior,

$$\varphi'_X(t) = \frac{1}{3}\left(500ie^{500it} + 700ie^{700it} + 1\,000ie^{1\,000it}\right) ,$$

con lo cual, el salario medio por hora es

$$E(X) = \frac{1}{i}\cdot\varphi'_X(0) = \frac{1}{3}(500 + 700 + 1\,000) = \frac{2\,200}{3} = 733.3 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 7.8.
Obtengamos la esperanza de la variable X. Derivando la función característica,

$$\varphi'_X(t) = 4i(1 - 4it)^{-2} ,$$

resulta:

$$E(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = 4 .$$

En definitiva, el tiempo medio de espera hasta la intervención quirúrgica es de cuatro meses, superior, por tanto, al que ha tenido que esperar Ana. Desde el punto de vista de los tiempos medios, Ana no tiene motivos para estar enfadada.

Como veremos en el capítulo 9, dicha función característica es la de una variable continua denominada *exponencial negativa.* Más en concreto, es la función característica de una exponencial negativa $\varepsilon(\frac{1}{4})$, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{4}} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El teorema de inversión para funciones características garantiza que, si una variable tiene la función característica correspondiente a una distribución de probabilidades concreta, tiene necesariamente esa distribución. En consecuencia, la función de densidad del *tiempo de espera*, X, es la que acabamos de escribir; es posible, entonces, dar una respuesta más completa al problema, como veremos a continuación.

La probabilidad de que una persona espere al menos tres meses es

$$p[X \geq 3] = \int_3^\infty \frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{x}{4}}\,dx = e^{-\frac{3}{4}} = 0.47 .$$

Aproximadamente el 53 % de los pacientes aguardarán menos de tres meses para ser intervenidos. En consecuencia, Ana tiene ciertos motivos para estar enfadada, ya que, aunque su tiempo de espera es menor que la media, más de la mitad de los pacientes tardarán menos tiempo que ella en ser operados.

Ejercicio 7.9.
Calculemos la segunda derivada con respecto a t del logaritmo neperiano de la función característica. Como

$$\frac{\partial \ln(\varphi_X(t))}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}}{\varphi_X(t)},$$

entonces,

$$\frac{\partial^2 \ln(\varphi_X(t))}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}}{\varphi_X(t)}\right) = \frac{\varphi_X(t)\cdot\frac{\partial^2 \varphi_X(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}}{\varphi_X^2(t)}.$$

Si concretamos esta expresión para $t = 0$, teniendo en cuenta que $\varphi_X(0)$ es igual a la unidad, y dividimos por i^2, resulta:

$$\frac{1}{i^2}\cdot\left.\frac{\partial^2 \ln(\varphi_X(t))}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{i^2}\cdot\left.\frac{\partial^2 \varphi_X(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} - \left(\frac{1}{i}\cdot\left.\frac{\partial \varphi_X(t)}{\partial t}\right|_{t=0}\right)^2 =$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2 = \text{Var}\ (X).$$

Ejercicio 7.10.
La demostración es totalmente análoga a la realizada en el ejercicio 7.1, salvo por las naturales complicaciones en la notación, al tratarse ahora de variables n-dimensionales.

a) Dado que

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) =$$

$$E[\cos(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)] + i\cdot E[\text{sen}\,(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)],$$

en particular, para $t_1 = \cdots = t_n = 0$, la combinación lineal $t_1X_1 + \cdots + t_nX_n$ se anula y, por tanto,

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(0,\ldots,0) = E[\cos(0)] + i\cdot E[\text{sen}\,(0)] = 1 + i\cdot 0 = 1.$$

b) Utilizando el hecho de que el módulo de la esperanza es menor o igual que la esperanza del módulo,

$$|\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)| = |E[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}]| \le E[|e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}|].$$

Pero, el módulo de $e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}$ es igual a la unidad, lo que se comprueba con el mismo argumento empleado en el apartado *b*) del ejercicio 7.1; consecuentemente,

$$|\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n)| \le E(1) = 1.$$

c) Puesto que

$$\begin{aligned}\cos(-t_1X_1 - \cdots - t_nX_n) &= \cos[-(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)] = \\ &= \cos(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-t_1X_1 - \cdots - t_nX_n) &= \operatorname{sen}[-(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)] = \\ &= -\operatorname{sen}(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)\,,\end{aligned}$$

el resultado se obtiene como en el apartado *c*) del ejercicio mencionado anteriormente.

Ejercicio 7.11.
Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) &= E[e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}] = \\ &= E[\cos(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)]\,,\end{aligned}$$

para demostrar que la función característica existe, habrá que probar que existen las dos últimas esperanzas. Pero las variables aleatorias $\cos(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)$ y $\operatorname{sen}(t_1X_1 + \cdots + t_nX_n)$ están acotadas entre -1 y 1 y, como es sabido, la esperanza de una variable acotada existe siempre.

En definitiva, la función característica de una variable aleatoria n-dimensional existe siempre.

Ejercicio 7.12.
Si a y b son dos números reales cualesquiera,

$$\varphi_{aX+bY}(t) = E[e^{i(aX+bY)t}] = E[e^{i(atX+btY)}]\,.$$

En consecuencia,

$$\varphi_{aX+bY}(t) = \varphi_{(X,Y)}(at, bt)\,.$$

Concretando esta expresión para $a = 1$ y $b = -1$, se deduce la función característica de la variable $X - Y$,

$$\varphi_{X-Y}(t) = \varphi_{(X,Y)}(t, -t)\,.$$

Ejercicio 7.13.
a) Para obtener la función característica conjunta, apliquemos la definición:

$$\begin{aligned}\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= E[e^{i(t_1X+t_2Y)}] = \\ &= e^{i[t_10+t_2(-1)]} \cdot \frac{3}{6} + e^{i[t_11+t_2(-1)]} \cdot \frac{2}{6} + e^{i(t_10+t_21)} \cdot \frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

De aquí,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)=\frac{1}{6}\left[3e^{-it_2}+2e^{i(t_1-t_2)}+e^{it_2}\right] .$$

b) Las funciones características marginales de ambas variables se calculan anulando, o bien t_1, o bien t_2. Así, haciendo $t_2=0$,

$$\varphi_X(t_1)=\varphi_{(X,Y)}(t_1,0)=\frac{3+2e^{it_1}+1}{6}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot e^{it_1} .$$

Análogamente, la función característica de Y es

$$\varphi_Y(t_2)=\varphi_{(X,Y)}(0,t_2)=\frac{1}{6}\left(5e^{-it_2}+e^{it_2}\right) .$$

Estas funciones características podrían haberse hallado, también, sin más que considerar las distribuciones marginales de X y de Y. En el ejercicio 7.3 obtuvimos la de X por este procedimiento.

Evidentemente,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\neq\varphi_X(t_1)\cdot\varphi_Y(t_2) ,$$

es decir, X e Y son variables dependientes (resultado que, asimismo, puede comprobarse en la tabla de doble entrada que recoge las funciones de probabilidad conjunta y marginales).

Obtengamos la función característica de la variable $Z=3X-2Y$. Así,

$$\varphi_Z(t)=\varphi_{3X-2Y}(t)=\varphi_{(X,Y)}(3t,-2t)=\frac{1}{6}\left(3e^{2it}+2e^{5it}+e^{-2it}\right) .$$

El lector puede comprobar el resultado a partir de la distribución de Z:

$$Z:\left|\begin{array}{ll} -2 & p[Z=-2]=p[X=0,Y=1]=1/6 \\ 2 & p[Z=2]=p[X=0,Y=-1]=3/6 \\ 5 & p[Z=5]=p[X=1,Y=-1]=2/6 \end{array}\right.$$

c) Calculemos la covarianza entre X e Y, derivando la función característica conjunta. Así,

$$\begin{aligned} E(X\cdot Y) &= \frac{1}{i^2}\cdot\left.\frac{\partial^2\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{(t_1,t_2)=(0,0)}= \\ &= \frac{1}{i^2}\left(-\frac{1}{3}\right)i^2e^{i(t_1-t_2)}\Big|_{(t_1,t_2)=(0,0)}=-\frac{1}{3} . \end{aligned}$$

Las esperanzas de X y de Y pueden obtenerse, bien a partir de las funciones características marginales, o bien a partir de la conjunta. En este ejercicio utilizaremos el segundo procedimiento. De esta forma,

$$E(X) = \frac{1}{i} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1} \right|_{(t_1,t_2)=(0,0)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{3} \cdot ie^{i(t_1-t_2)} \Big|_{(t_1,t_2)=(0,0)} = \frac{1}{3} \quad \text{y}$$

$$E(Y) = \frac{1}{i} \cdot \left. \frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_2} \right|_{(t_1,t_2)=(0,0)} =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{6} \left[-3ie^{-it_2} - 2ie^{i(t_1-t_2)} + ie^{it_2} \right] \Big|_{(t_1,t_2)=(0,0)} = -\frac{2}{3} .$$

De aquí,

$$\text{Cov } (X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = -\frac{1}{9} .$$

El lector advertirá que los cálculos, en este caso, son mucho más complicados que si se hiciesen directamente, a partir de la función de probabilidad conjunta de ambas variables.

Ejercicio 7.14.

a) La variable X, *número de bolas blancas extraídas*, toma los valores 1, 2 y 3, y la variable Y, *número de bolas negras hasta obtener una blanca*, los valores 0, 1 y 2. La siguiente tabla de doble entrada describe la función de probabilidad buscada.

$X \backslash Y$	0	1	2	
1	1/10	1/10	1/10	3/10
2	4/10	2/10	0	6/10
3	1/10	0	0	1/10
	6/10	3/10	1/10	

Por tanto, la función característica conjunta es

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = E[e^{i(t_1X+t_2Y)}] =$$

$$= e^{it_1} \cdot \frac{1}{10} + e^{i(t_1+t_2)} \cdot \frac{1}{10} + e^{i(t_1+2t_2)} \cdot \frac{1}{10} +$$

$$+ e^{i2t_1} \cdot \tfrac{4}{10} + e^{i(2t_1+t_2)} \cdot \tfrac{2}{10} + e^{i3t_1} \cdot \tfrac{1}{10} =$$

$$= \frac{1}{10} \left[e^{it_1} + e^{i(t_1+t_2)} + e^{i(t_1+2t_2)} + 4 \cdot e^{2it_1} + 2 \cdot e^{i(2t_1+t_2)} + e^{3it_1} \right] .$$

b) Las funciones características de X e Y pueden obtenerse mediante las distribuciones marginales de cada variable, como puede comprobar el lector. No obstante, recuérdese que las funciones características marginales se calculan directamente a partir de la conjunta. Así,

$$\varphi_X(t) = \varphi_{(X,Y)}(t,0) = \frac{1}{10} \left[3e^{it} + 6e^{2it} + e^{3it} \right] .$$

Análogamente,

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(0,t) = \frac{1}{10}\left[6 + 3e^{it} + e^{2it}\right] .$$

c) Las esperanzas y varianzas se hallan a partir de las funciones características marginales. Así,

$$E(X) = \frac{1}{i}\cdot\varphi'_X(0) = \frac{1}{10}(3 + 12 + 3) = 1.8$$

y

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2}\cdot\varphi''_X(0) = \frac{1}{10}(3 + 24 + 9) = 3.6 ,$$

luego

$$\text{Var } (X) = 3.6 - (1.8)^2 = 0.36 .$$

Para la segunda variable,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{i}\cdot\varphi'_Y(0) = 0.5 , \\ E(Y^2) &= \frac{1}{i^2}\cdot\varphi''_Y(0) = 0.7 \qquad \text{y} \\ \text{Var } (Y) &= 0.45 . \end{aligned}$$

Obsérvese que las esperanzas y varianzas pueden deducirse, también, de la función característica conjunta de X e Y; así, por ejemplo,

$$E(X) = E(X^1\cdot Y^0) = \frac{1}{i^{1+0}}\cdot\frac{\partial}{\partial t_1}\cdot\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\Big|_{(t_1,t_2)=(0,0)} ,$$

y análogamente para el resto de los momentos. Recuerde asimismo el lector que en el ejercicio 7.9 vimos otra forma de obtener las varianzas de las variables mediante las funciones características marginales. Es conveniente utilizar esta expresión alternativa a modo de comprobación.

Obtengamos la covarianza entre X e Y.

$$E(X\cdot Y) = \frac{1}{i^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\Big|_{(t_1,t_2)=(0,0)}$$

Pero,

$$\frac{\partial\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \frac{1}{10}\left[ie^{it_1} + ie^{i(t_1+t_2)} + ie^{i(t_1+2t_2)} + 8ie^{2it_1} + 4ie^{i(2t_1+t_2)} + 3ie^{3it_1}\right] ,$$

con lo cual,

$$\frac{\partial^2\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} = \frac{1}{10}\left[i^2e^{i(t_1+t_2)} + 2i^2e^{i(t_1+2t_2)} + 4i^2e^{i(2t_1+t_2)}\right] .$$

Por tanto,

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{10}(1+2+4) = 0.7\,,$$

de donde

$$\text{Cov}\ (X,Y) = 0.7 - 1.8 \cdot 0.5 = -0.2\,.$$

En definitiva, el coeficiente de correlación lineal entre X e Y resulta:

$$\rho_{XY} = \frac{-0.2}{\sqrt{0.36 \cdot 0.45}} = -0.497\,.$$

d) Sea Z la variable aleatoria, *número de bolas blancas extraídas por la segunda persona.* El *número de bolas blancas extraídas entre las dos personas* es, entonces, la variable aleatoria $X + Z$. Como las urnas son idénticas, las variables X y Z están igualmente distribuidas y, en consecuencia, la función característica de Z es la misma que la de X. Además, X y Z son independientes y, por tanto,

$$\varphi_{X+Z}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Z(t) = [\varphi_X(t)]^2 = \frac{1}{100}\left[3e^{it} + 6e^{2it} + e^{3it}\right]^2\,.$$

Ejercicio 7.15.

a) En este ejercicio obtendremos la función característica de la variable bidimensional, suponiendo que las integrales dobles en el campo complejo pueden resolverse iterativamente como en el campo real (el lector interesado puede realizar el cálculo riguroso de la función característica, hallando las esperanzas de la parte real y de la parte imaginaria). Así, si t_1 y t_2 son distintos de cero,

$$\begin{aligned}\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= E\left[e^{i(t_1X+t_2Y)}\right] = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} e^{i(t_1x+t_2y)}\,dy\,dx = \\ &= \int_{x=0}^{1} e^{it_1x}\,dx \cdot \int_{y=0}^{1} e^{it_2y}\,dy = \\ &= \frac{e^{it_1}-1}{it_1} \cdot \frac{e^{it_2}-1}{it_2}\,,\end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta la resolución de estas integrales realizada en el ejercicio 7.5.

De la misma forma, obtendríamos la función característica cuando t_1, t_2 o ambos son nulos. Así,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \begin{cases} \dfrac{e^{it_1}-1}{it_1} \cdot \dfrac{e^{it_2}-1}{it_2} & t_1 \neq 0, \quad t_2 \neq 0 \\ \dfrac{e^{it_1}-1}{it_1} & t_1 \neq 0, \quad t_2 = 0 \\ \dfrac{e^{it_2}-1}{it_2} & t_1 = 0, \quad t_2 \neq 0 \\ 1 & t_1 = 0, \quad t_2 = 0 \end{cases}$$

resulta ser la función característica de (X,Y).

b) Las funciones características marginales de X y de Y se calculan anulando t_2 y t_1, respectivamente (en el ejercicio 7.5 se obtuvieron estas funciones características a partir de las funciones de densidad marginales). Así,

$$\varphi_X(t_1) = \varphi_{(X,Y)}(t_1, 0) = \begin{cases} \dfrac{e^{it_1} - 1}{it_1} & t_1 \neq 0 \\ 1 & t_1 = 0 \end{cases}$$

y

$$\varphi_Y(t_2) = \varphi_{(X,Y)}(0, t_2) = \begin{cases} \dfrac{e^{it_2} - 1}{it_2} & t_2 \neq 0 \\ 1 & t_2 = 0 \end{cases}$$

Ahora, puede comprobarse que

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2) ,$$

es decir, X e Y son variables independientes

c) Dado que X e Y son independientes, es posible hallar la función característica de su suma, bien utilizando su función característica conjunta, bien utilizando las marginales. Así,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{(X,Y)}(t, t) = \begin{cases} \dfrac{e^{it} - 1}{it} \cdot \dfrac{e^{it} - 1}{it} = \left(\dfrac{e^{it} - 1}{it} \right)^2 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

o bien, por ser X e Y independientes,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_X(t) = [\varphi_X(t)]^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{it} - 1}{it} \right)^2 & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7.16.

a) Aunque el aspecto de la función de densidad de (X, Y) parece sugerir que el cálculo de la función característica conjunta no tendría que ser complicado, el lector no ha de dejarse engañar por esta aparente sencillez. Realmente los cálculos no son difíciles, ya que se trata de hallar integrales de senos y cosenos, que son inmediatas, pero las expresiones que se obtienen son de un tamaño considerable. No debe, pues, desesperar el lector, si al primer intento comete errores en los cálculos.

La función característica de (X, Y) es

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = E[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}] = E[\cos(t_1 X + t_2 Y)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(t_1 X + t_2 Y)] .$$

Calculemos las dos esperanzas de la expresión anterior. Así, si t_1 y t_2 son distintos de cero,

$$\int_{y=x}^{1} \operatorname{sen}(t_1x + t_2y)\,dy = \frac{\cos((t_1+t_2)x)}{t_2} - \frac{\cos(t_1x+t_2)}{t_2}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} E[\operatorname{sen}(t_1X+t_2Y)] &= \int_{x=0}^{1} 6x\left[\int_{y=x}^{1}\operatorname{sen}(t_1x+t_2y)\,dy\right]dx = \\ &= \frac{6}{t_2t_1^2(t_1+t_2)^2}\left[-t_2(2t_1+t_2)\cos(t_1+t_2) - \right. \\ &\quad \left. - t_1t_2(t_1+t_2)\operatorname{sen}(t_1+t_2) - (t_1+t_2)^2\cos(t_2) - t_1^2\right]. \end{aligned}$$

De manera similar, si t_1 y t_2 no se anulan,

$$\int_{y=x}^{1}\cos(t_1x+t_2y)\,dy = \frac{\operatorname{sen}(t_1x+t_2)}{t_2} - \frac{\operatorname{sen}((t_1+t_2)x)}{t_2},$$

con lo que

$$\begin{aligned} E[\cos(t_1X+t_2Y)] &= \int_{x=0}^{1} 6x\left[\int_{y=x}^{1}\cos(t_1x+t_2y)\,dy\right]dx = \\ &= \frac{6}{t_2t_1^2(t_1+t_2)^2}[t_2(2t_1+t_2)\operatorname{sen}(t_1+t_2) - \\ &\quad - t_1t_2(t_1+t_2)\cos(t_1+t_2) + (t_1+t_2)^2\operatorname{sen}(t_2)]. \end{aligned}$$

En definitiva, la función característica de (X,Y) resulta

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) &= \frac{6}{t_2t_1^2(t_1+t_2)^2}\{[-t_1t_2(t_1+t_2) - it_2(2t_1+t_2)]\cdot\cos(t_1+t_2) + \\ &\quad + [-t_1t_2(t_1+t_2) - it_2(2t_1+t_2)]\,i\cdot\operatorname{sen}(t_1+t_2) - \\ &\quad - i(t_1+t_2)^2(\cos(t_2)+i\cdot\operatorname{sen}(t_2)) - it_1^2\}, \end{aligned}$$

expresión que puede escribirse de manera más abreviada en la forma exponencial,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) =$$

$$= -\frac{6}{t_2t_1^2(t_1+t_2)^2}\cdot\left\{[t_1t_2(t_1+t_2)+it_2(2t_1+t_2)]\,e^{i(t_1+t_2)} + i(t_1+t_2)^2e^{it_2} + it_1^2\right\},$$

cuando t_1 y t_2 son números reales no nulos.

Si t_1 se anula, pero t_2 es distinto de cero, puede comprobar el lector con cálculos similares a los anteriores que

$$E[\operatorname{sen}(t_2 Y)] = \frac{6\operatorname{sen}(t_2)}{t_2^2} + \frac{6(2-t_2^2)}{2t_2^3} \cdot \cos(t_2) - \frac{6}{t_2^3}$$

y

$$E[\cos(t_2 Y)] = \frac{6\cos(t_2)}{t_2^2} - \frac{6(2-t_2^2)}{2t_2^3} \cdot \operatorname{sen}(t_2) .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,Y)}(0,t_2) &= E[\cos(t_2 Y)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(t_2 Y)] = \\ &= \frac{6}{t_2^2}[\cos(t_2) + i \cdot \operatorname{sen}(t_2)] + \frac{6(2-t_2^2)}{2t_2^3}[i \cdot \cos(t_2) - \operatorname{sen}(t_2)] - \frac{6i}{t_2^3} = \\ &= \frac{6}{t_2^2} \cdot e^{it_2} + \frac{6(2-t_2^2)}{2t_2^3} \cdot ie^{it_2} - \frac{6i}{t_2^3} . \end{aligned}$$

De la misma forma, si t_1 es distinto de cero, pero t_2 se anula,

$$E[\operatorname{sen}(t_1 X)] = -\frac{12\cos(t_1)}{t_1^3} - \frac{6\operatorname{sen}(t_1)}{t_1^2} + \frac{12}{t_1^3}$$

y

$$E[\cos(t_1 X)] = \frac{12\operatorname{sen}(t_1)}{t_1^3} - \frac{6\cos(t_1)}{t_1^2} - \frac{6}{t_1^2} .$$

Entonces,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,0) = E[\cos(t_1 X)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(t_1 X)] = -\left(\frac{6}{t_1^2} + \frac{12i}{t_1^3}\right) e^{it_1} - \frac{6}{t_1^2} + \frac{12i}{t_1^3} .$$

Obviamente, si t_1 y t_2 se anulan,

$$\varphi_{(X,Y)}(0,0) = E[\cos(0)] + i \cdot E[\operatorname{sen}(0)] = 1 ,$$

resultado que, como sabemos, se verifica para cualquier función característica.

b) Las funciones características marginales han sido ya obtenidas en el apartado anterior. Dado que

$$\varphi_X(t) = \varphi_{(X,Y)}(t,0) ,$$

entonces, si t es distinto de cero,

$$\varphi_X(t) = -\left(\frac{6}{t^2} + \frac{12i}{t^3}\right) e^{it} - \frac{6}{t^2} + \frac{12i}{t^3} ,$$

y $\varphi_X(0) = 0$.

Análogamente,

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(0,t) ,$$

por lo que, si t es no nulo,

$$\varphi_Y(t) = \frac{6}{t^2} \cdot e^{it} + \frac{6(2-t^2)}{2t^3} \cdot ie^{it} - \frac{6i}{t^3} ,$$

y $\varphi_Y(0) = 0$.

c) En este caso, es más sencillo estudiar la independencia de las variables X e Y a través de la función de densidad conjunta. Como el campo de definición de las variables no es un rectángulo, esto es, el campo de variación de X depende del valor de Y y viceversa, las variables no pueden ser independientes.

No obstante, comprobemos este hecho mediante la función característica. El producto $\varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2)$ vale

$$\varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2) = \left[-\left(\frac{6}{t_1^2} + \frac{12i}{t_1^3} \right) e^{it_1} - \frac{6}{t_1^2} + \frac{12i}{t_1^3} \right] \cdot \left[\frac{6}{t_2^2} \cdot e^{it_2} + \frac{6(2-t_2^2)}{2t_2^3} \cdot ie^{it_2} - \frac{6i}{t_2^3} \right] ,$$

que no coincide con la función característica conjunta obtenida en el apartado anterior. Así, el término sin exponenciales de ésta vale

$$-\frac{6it_1^2}{t_1^2 t_2 (t_1+t_2)^2} = -\frac{6i}{t_2(t_1+t_2)^2} ,$$

mientras que el término sin exponenciales en el producto $\varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2)$ resulta

$$\left(-\frac{6}{t_1^2} + \frac{12i}{t_1^3} \right) \cdot \left(-\frac{6i}{t_2^3} \right) = \frac{36i}{t_1^3 t_2^3} (t_1 - 2i) .$$

Ambos términos no coinciden; por ejemplo, para $(t_1, t_2) = (1,1)$, el primero vale $-\frac{3}{2} \cdot i$, siendo el segundo igual a $72 - 36i$. Las variables no son, pues, independientes.

d) Dado que

$$\varphi_Z(t) = E\left(e^{itZ}\right) = E\left[e^{i(2tX-3tY)}\right] = \varphi_{(X,Y)}(2t,3t) ,$$

puede obtenerse la función característica de la variable Z a partir de la conjunta de X e Y.

Así, si t es igual a cero,

$$\varphi_Z(0) = \varphi_{(X,Y)}(0,0) = 1 ,$$

y, si t es distinto de cero, sustituyendo en la función característica conjunta calculada en el apartado anterior,

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{(X,Y)}(2t,3t) = -\frac{1}{50t^3} \left[(30t - 21i) e^{5it} + 25ie^{3it} + 4i \right] .$$

Ejercicio 7.17.

a) La función característica de X resulta

$$\varphi_X(t) = \varphi_{(X,Y)}(t,0) = \frac{e^{2(e^{it}-1)}}{e^{1-e^{i0}}} = e^{2(e^{it}-1)} .$$

Análogamente, se obtiene la de Y,

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{(X,Y)}(0,t) = \frac{e^{2(e^{i0}-1)}}{e^{1-e^{it}}} = e^{e^{it}-1} .$$

b) A partir de las funciones características marginales, pueden calcularse las esperanzas de ambas variables. Así,

$$\varphi'_X(t) = e^{2(e^{it}-1)} \cdot 2ie^{it} = 2i \cdot e^{(2e^{it}-2+it)} ,$$

de donde,

$$E(X) = \frac{1}{i} \cdot \varphi'_X(0) = \frac{2i}{i} = 2 .$$

De igual forma,

$$\varphi'_Y(t) = e^{e^{it}-1} \cdot ie^{it}$$

y, por tanto,

$$E(Y) = \frac{1}{i} \cdot \varphi'_Y(0) = \frac{i}{i} = 1 .$$

La media mensual de atropellos en la vía con mayor densidad de tráfico es, consecuentemente, el doble que en la segunda vía más conflictiva.

c) Hallemos la varianza de X. Para ello, como

$$\varphi''_X(t) = 2i \cdot e^{(2e^{it}-2+it)}(2ie^{it} + i)$$

y

$$\varphi''_X(0) = 2i \cdot e^{(2e^0-2+0)}(2ie^0 + i) = 6i^2 ,$$

entonces,

$$E(X^2) = \frac{1}{i^2} \cdot \varphi''_X(0) = 6 ,$$

de donde

$$\text{Var } (X) = 6 - 4 = 2$$

y, por tanto, la desviación típica de X vale $\sigma_X = \sqrt{2}$.

Si se desea dar una medida relativa de la variabilidad de X, puede hallarse su coeficiente de variación,

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 .$$

En el ejercicio 7.9 demostramos que la varianza de X podría calcularse como

$$\text{Var } (X) = \frac{1}{i^2} \cdot \left. \frac{\partial^2 \ln (\varphi_X(t))}{\partial t^2} \right|_{t=0} .$$

Obviamente, el resultado es el mismo que el anterior. Así,

$$\ln (\varphi_X(t)) = 2\left(e^{it} - 1\right)$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial^2 \ln (\varphi_X(t))}{\partial t^2} = 2i^2 e^{it} .$$

Entonces, haciendo $t = 0$ y dividiendo por i^2, concluimos que Var $(X) = 2$.

d) A la vista de las funciones características marginales de ambas variables, se concluye que son independientes. En efecto,

$$\varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2) = e^{2(e^{it_1}-1)} \cdot \frac{1}{e^{1-e^{it_2}}} = \frac{e^{2(e^{it_1}-1)}}{e^{1-e^{it_2}}} ,$$

es decir, para cualesquiera t_1 y t_2,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2) ,$$

por lo que X e Y son independientes.

El lector puede calcular la covarianza entre X e Y a partir de la función característica conjunta; como comprobará, dicha covarianza es igual a cero, debido a la independencia entre X e Y.

No existe, pues, relación entre ambas variables.

Ejercicio 7.18.

a) Sea $Y = 2X$. Entonces,

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{2X}(t) = \varphi_X(2t) = e^{-2|t|} .$$

Por otro lado,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{3X}(t) = e^{-3|t|} .$$

En consecuencia,

$$\varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{-|t|} \cdot e^{-2|t|} = e^{-3|t|} ,$$

es decir, se cumple

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t),$$

para todo número real t.

b) Si t_1 y t_2 son dos números reales cualesquiera,

$$\varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2) = e^{-|t_1|} \cdot e^{-2|t_2|} = e^{-(|t_1|+2|t_2|)} .$$

Además,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = E[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}] = E[e^{i(t_1 X + 2t_2 X)}] = E[e^{i(t_1+2t_2)X}] = \varphi_X(t_1 + 2t_2) .$$

Consecuentemente,

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = e^{-|t_1+2t_2|} .$$

Las variables X e Y no son independientes, ya que no se cumple siempre la igualdad

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1) \cdot \varphi_Y(t_2) .$$

Así, por ejemplo, para $t_1 = 1$ y $t_2 = -1$,

$$\varphi_{(X,Y)}(1, -1) = e^{-|1-2|} = e^{-1}$$

y, sin embargo,

$$\varphi_X(1) \cdot \varphi_Y(-1) = e^{-(|1|+2|-1|)} = e^{-3} .$$

Como es sabido, si dos variables, X e Y, son independientes,

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\, \varphi_Y(t) ;$$

el resultado recíproco no es cierto, como pone en evidencia este ejercicio.

Ejercicio 7.19.

a) Realicemos la demostración cuando (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional continua. En el caso discreto se prueba de forma análoga.

Si f es la función de densidad conjunta de (X, Y),

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = E[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_1 x + t_2 y)} f(x, y)\, dx\, dy .$$

Si es posible la derivación bajo el signo integral, entonces,

$$\frac{\partial^{r+s} \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{r+s} e^{i(t_1 x + t_2 y)}}{\partial t_1^r \partial t_2^s} \cdot f(x, y)\, dx\, dy .$$

Pero,

$$\frac{\partial^r e^{i(t_1x+t_2y)}}{\partial t_1^r} = (ix)^r e^{i(t_1x+t_2y)}$$

y, por tanto,

$$\frac{\partial^{r+s} e^{i(t_1x+t_2y)}}{\partial t_1^r \partial t_2^s} = \frac{\partial^s [(ix)^r e^{i(t_1x+t_2y)}]}{\partial t_2^s} =$$

$$= (ix)^r (iy)^s e^{i(t_1x+t_2y)} = i^{r+s} x^r y^s e^{i(t_1x+t_2y)} .$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^{r+s} \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} i^{r+s} x^r y^s e^{i(t_1x+t_2y)} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= i^{r+s} E[X^r \cdot Y^s e^{i(t_1X+t_2Y)}] .$$

Sustituyendo t_1 y t_2 por cero y dividiendo por i^{r+s}, resulta

$$\frac{1}{i^{r+s}} \cdot \frac{\partial^{r+s} \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1^r \partial t_2^s}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)} = E[X^r \cdot Y^s e^{i(0X+0Y)}] = E(X^r \cdot Y^s) = \alpha_{r,s} .$$

b) Derivemos con respecto a t_1 el logaritmo neperiano de la función característica conjunta,

$$\frac{\partial \ln\left(\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\right)}{\partial t_1} = \frac{\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}}{\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)} .$$

La derivada de la expresión anterior con respecto a t_2 es

$$\frac{\partial^2 \ln\left(\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\right)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}}{\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}\right) =$$

$$= \frac{\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} - \left(\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial \varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right)}{\varphi^2_{(X,Y)}(t_1,t_2)}$$

Concretando esta segunda derivada parcial para $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$, se tiene

$$\frac{\partial^2 \ln\left(\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\right)}{\partial t_1 \partial t_2}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)} = \frac{1 \cdot i^2 E(X \cdot Y) - [iE(X)]\,[iE(Y)]}{1} =$$

$$= i^2 \mathrm{Cov}\ (X,Y) ,$$

donde las esperanzas de las variables $X \cdot Y$, X e Y resultan por aplicación del apartado $a)$, para $(r,s) = (1,1)$, $(r,s) = (1,0)$ y $(r,s) = (0,1)$, respectivamente. Por tanto,

$$\frac{1}{i^2} \cdot \frac{\partial^2 \ln\left(\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2)\right)}{\partial t_1 \partial t_2}\bigg|_{(t_1,t_2)=(0,0)} = \text{Cov}\ (X,Y)\ .$$

Ejercicio 7.20.
El teorema de inversión para funciones características de una variable n-dimensional afirma que, si $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ son n pares de números reales cualesquiera con $a_j < b_j$,

$$p[a_1 < X_1 \leq b_1, \ldots, a_n < X_n \leq b_n] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \cdots \int_{-k}^{k} \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j}\, dt_1 \ldots dt_n\ .$$

Tomando límites cuando $a_1, \ldots, a_n$ tienden a $-\infty$, esta expresión se transforma en

$$p[X_1 \leq b_1, \ldots, X_n \leq b_n] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \lim_{\substack{a_1\to-\infty \\ \cdots \\ a_n\to-\infty}} \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \cdots \int_{-k}^{k} \varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j}\, dt_1 \ldots dt_n\ .$$

Sustituyendo la función característica conjunta por el producto de las marginales, la integral anterior puede escribirse como producto de n integrales simples,

$$F(b_1,\ldots,b_n) \quad = p[X_1 \leq b_1, \ldots, X_n \leq b_n] =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{a_j\to-\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{-k}^{k} \varphi_{X_j}(t_j) \cdot \frac{e^{-it_j a_j} - e^{-it_j b_j}}{it_j}\, dt_j =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(b_j)\ ,$$

siendo la última igualdad consecuencia del teorema de inversión para funciones características de variables unidimensionales.

En definitiva, la función de distribución conjunta de las n variables, F, es igual al producto de las n funciones de distribución marginales, F_{X_j}, lo cual nos confirma la independencia de $X_1, \ldots, X_n$.

Capítulo 8

MODELOS DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Uno de los objetivos del Cálculo de Probabilidades es determinar distribuciones que puedan servir de modelos a los distintos fenómenos aleatorios. Muchas variables aleatorias asociadas a experimentos estadísticos tienen propiedades similares y pueden describirse esencialmente con la misma distribución de probabilidad. Esto ha llevado a la elaboración de una serie de distribuciones tipo. Describamos a continuación algunos de los principales modelos de distribuciones discretas.

• Si una variable aleatoria, X, toma N valores, $x_1, \ldots, x_N$, con la misma probabilidad, se dice que sigue una **distribución uniforme discreta** de parámetro N, para $N = 1, 2, \ldots$ Su función de probabilidad es

$$f_X(x_i) = p[X = x_i] = \frac{1}{N} , \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N ,$$

y sus principales características (esperanza y varianza) y función característica son:

$$E(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i ,$$

$$\text{Var } (X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2 \qquad \text{y}$$

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{itx_j} .$$

Un caso particular se produce cuando $x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_N = N$; entonces, la función de probabilidad puede escribirse como

$$p[X = k] = \frac{1}{N}, \qquad \text{para} \quad k = 1, \ldots, N .$$

Sus principales momentos y su función característica son:

$$E(X) = \frac{N+1}{2}, \qquad \text{Var } (X) = \frac{N^2 - 1}{12} \qquad \text{y} \qquad \varphi_X(t) = \frac{e^{it}(1 - e^{itN})}{N(1 - e^{it})} .$$

• Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Con frecuencia, no interesa estudiar cuál ha sido el resultado concreto, ω, del experimento, sino sólo si ha ocurrido o no un cierto suceso, $A \in \Omega$, esto es, si $\omega \in A$. Se dice, entonces, que se trata de un **experimento de Bernoulli**, denominándose *éxito* al suceso en estudio, A, y *fracaso* a su contrario, $\overline{A}$. La variable aleatoria X, *número de éxitos al realizar el experimento*, tiene una **distribución de Bernoulli** de parámetro p, donde p es la probabilidad de éxito ($0 \leq p \leq 1$), siendo $q = 1 - p$ la probabilidad de fracaso. Lo denotaremos abreviadamente por $X \hookrightarrow b(p)$.

Su función de probabilidad puede expresarse como

$$f_X(x) = p[X = x] = p^x \cdot (1 - p)^{1-x} , \qquad \text{para} \quad x = 0, 1$$

y su función característica, como

$$\varphi_X(t) = q + p \cdot e^{it} .$$

Las principales características son:

$$E(X) = p \qquad \text{y} \qquad \text{Var }, (X) = p \cdot q .$$

• Se realizan n experimentos independientes de Bernoulli (usualmente n repeticiones independientes del mismo experimento), siendo en todos ellos la probabilidad de éxito, p, la misma. Se dice, entonces, que se han realizado n *tiradas* de Bernoulli de parámetro p. La variable X, *número de éxitos obtenidos en las n tiradas*, sigue una **distribución binomial** de parámetros n y p ($n = 1, 2, \ldots; 0 \leq p \leq 1$). Lo denotaremos abreviadamente como $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

La función de probabilidad de esta variable es

$$f_X(k) = p[X = k] = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} , \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, n .$$

Una variable binomial, $\mathcal{B}(n, p)$, puede obtenerse sumando n variables de Bernoulli de parámetro p e independientes, que representarían el resultado de cada tirada.

Las principales características de esta distribución son:

$$E(X) = np \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = npq ,$$

y su función característica,

$$\varphi_X(t) = (q + p \cdot e^{it})^n .$$

La distribución binomial es reproductiva, es decir, dadas $X_1, \ldots, X_m$, m variables binomiales independientes con el mismo parámetro p, $X_j \hookrightarrow \mathcal{B}(n_j, p)$, la variable $X = X_1 + \cdots + X_m$ es, también, binomial, en concreto,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + \cdots + n_m, p).$$

Dado que X, *número de éxitos en n tiradas*, sigue una distribución binomial $\mathcal{B}(n, p)$, la variable Y, *número de fracasos*, sigue, también, una distribución binomial $\mathcal{B}(n, 1-p)$. Como $Y = n - X$, entonces,

$$p[X = k] = p[Y = n - k] .$$

• Una variable aleatoria, X, tiene una **distribución de Poisson** de parámetro λ ($\lambda > 0$), si su función de probabilidad es

$$f_X(k) = p[X = k] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} , \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots$$

Lo denotaremos por $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

La función de probabilidad de una distribución de Poisson es el límite de la correspondiente a una binomial cuando n crece indefinidamente, p tiende a cero y su producto, $n \cdot p$, permanece constante.

La esperanza y la varianza de esta variable coinciden, esto es,

$$E(X) = \text{Var } (X) = \lambda .$$

Su función característica vale

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} .$$

Asimismo, la distribución de Poisson es reproductiva para cualesquiera valores del parámetro, es decir, la suma de variables de Poisson independientes es una variable de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros.

• Se realizan sucesivos experimentos independientes de Bernoulli, con la misma probabilidad de éxito, p. La variable X, *número de fracasos antes del primer éxito*, sigue una **distribución geométrica** de parámetro p ($0 < p \leq 1$), siendo su función de probabilidad

$$f_X(k) = p[X = k] = q^k \cdot p , \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots$$

Abreviadamente, denotaremos esta distribución como $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Los principales momentos son

$$E(X) = \frac{q}{p} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = \frac{q}{p^2} ,$$

y su función característica:

$$\varphi_X(t) = \frac{p}{1 - e^{it} \cdot q} .$$

Esta distribución cumple una importante propiedad denominada del *olvido* o de la *falta de memoria*: si X es una variable aleatoria con distribución geométrica, entonces,

$$p[X \geq m + n \mid X \geq m] = p[X \geq n] , \qquad m, n = 0, 1, \ldots$$

Dicha propiedad caracteriza a la distribución geométrica entre las distribuciones discretas que toman valores enteros no negativos.

• Se realizan sucesivos experimentos de Bernoulli independientes, donde la probabilidad de *éxito* es p. La variable X, *número de fracasos antes del* r*-ésimo éxito*, tiene una **distribución binomial negativa** de parámetros r y p, con $r = 1, 2, \ldots$ y $0 < p \leq 1$.

Se designa abreviadamente como $X \hookrightarrow \mathcal{BN}(r, p)$ y su función de probabilidad es

$$f_X(k) = p[X = k] = \binom{k + r - 1}{k} \cdot q^k \cdot p^r , \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots$$

La distribución binomial negativa, $\mathcal{BN}(r, p)$, es suma de r variables geométricas independientes de parámetro p.

Su esperanza y varianza son

$$E(X) = \frac{r \cdot q}{p} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = \frac{r \cdot q}{p^2}$$

y su función característica vale

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{p}{1 - e^{it} \cdot q} \right)^r .$$

La distribución binomial negativa es reproductiva, es decir, si $X_1, \ldots, X_m$, son variables binomiales negativas independientes con el mismo parámetro p, $X_j \hookrightarrow \mathcal{BN}(r_j, p)$, la variable $X = X_1 + \cdots + X_m$ sigue una distribución binomial negativa, $X \hookrightarrow \mathcal{BN}\left(\sum_{j=1}^m r_j,\ p\right)$.

• Sea una urna con N bolas ($N = 1, 2, \ldots$) de las cuales N_1 son blancas y N_2 son negras. Se realizan n extracciones sin reposición ($n \leq N$). Si X es el *número de*

bolas blancas obtenidas, se dice que X sigue una **distribución hipergeométrica** de parámetros N, n y p, siendo $p = \frac{N_1}{N}$ la proporción inicial de bolas blancas en la urna. Se designa abreviadamente como $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

Su función de probabilidad es

$$f_X(k) = p[X = k] = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N \cdot p}{k}\binom{N \cdot q}{n-k}}{\binom{N}{n}} ,$$

para los valores de k enteros tales que $\text{máx}\,(0, n - N_2) \leq k \leq \text{mín}\,(n, N_1)$.

Los principales momentos son

$$E(X) = n \cdot p \qquad \text{y} \qquad \text{Var}\ (X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1} .$$

La diferencia entre la distribución hipergeométrica y la binomial radica en que en la binomial los experimentos son independientes, mientras que en la hipergeométrica no lo son. En el esquema de urnas con bolas blancas y negras, la variable X, *número de bolas blancas obtenidas* al realizar n extracciones tiene una distribución binomial, si las extracciones se realizan con reemplazamiento, y una distribución hipergeométrica, si se realizan sin reemplazamiento. Ahora bien, cuando el número de bolas es mucho mayor que el número de extracciones, cada extracción sin reposición no cambiará sustancialmente la composición de la urna, en cuyo caso no variará de forma apreciable la probabilidad de éxito entre una extracción y la siguiente. En esta situación, la distribución hipergeométrica se comportará aproximadamente como una distribución binomial; de hecho, la función de probabilidad de una distribución binomial es el límite de la de la hipergeométrica cuando N y N_1 tienden a infinito y su cociente, $\frac{N_1}{N}$, hacia p.

Dos importantes modelos de distribución discreta multivariante son la multinomial y la hipergeométrica multivariante.

• Sea Ω el espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio, y supongamos que $\{A_i\}_{i=1}^n$ es una partición de Ω formada por n sucesos. Obviamente, si $p_i = p(A_i)$, se cumple que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Se realizan m repeticiones independientes de dicho experimento. Consideremos n variables aleatorias, $X_1, \ldots, X_n$, donde X_i es el *número de veces que se presenta el suceso A_i en los m experimentos*. La variable n-dimensional $(X_1, \ldots, X_n)$ sigue una **distribución multinomial** de parámetros $m, p_1, \ldots, p_n$, que denotaremos por $(X_1, \ldots, X_n) \hookrightarrow \mathcal{M}(m, p_1, \ldots, p_n)$.

La multinomial es una generalización de la binomial cuando en un experimento interesa, no la ocurrencia de un único suceso o la de su contrario, sino la de varios (tres o más).

La función de probabilidad resulta

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(k_1, \ldots, k_n) = p[X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n] = \frac{m!}{k_1! \cdots k_n!} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_n^{k_n} ,$$

para $k_i = 0, 1, \ldots, m$ con $k_1 + \cdots + k_n = m$.

La distribución de cada una de las componentes de una multinomial es una binomial, es decir, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p_i)$.

La esperanza de X_i es

$$E(X_i) = mp_i$$

y su varianza

$$\text{Var } (X_i) = mp_i(1 - p_i) ,$$

siendo la covarianza entre X_i y X_j $(i \neq j)$

$$\text{Cov } (X_i, X_j) = -mp_ip_j .$$

La función característica de $(X_1, \ldots, X_n)$ vale

$$\varphi_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = (e^{it_1}p_1 + \cdots + e^{it_n}p_n)^m .$$

• Se considera una urna con N bolas de n colores, de las cuales N_1 son del primer color, N_2 son del segundo color y, finalmente, N_n son del n-ésimo color $(N = N_1 + \cdots + N_n)$. Se realizan m extracciones sin reposición $(m \leq N)$, y consideramos la variable X_i, *número de bolas del color i-ésimo extraídas.* La variable n-dimensional $(X_1, \ldots, X_n)$ sigue una **distribución hipergeométrica multivariante** de parámetros $N, m, p_1, \ldots, p_n$, donde $p_i = \frac{N_i}{N}$ es la proporción de bolas del color i-ésimo en la primera extracción. Esta distribución se designa abreviadamente como $(X_1, \ldots, X_n) \hookrightarrow \mathcal{H}(N, m, p_1, \ldots, p_n)$. La hipergeométrica multivariante es una generalización de la hipergeométrica, cuando las bolas de la urna en que se realizan las extracciones son de más de dos tipos.

La función de probabilidad es

$$\begin{aligned} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(k_1, \ldots, k_n) &= p[X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n] = \\ &= \frac{\binom{N_1}{k_1} \cdots \binom{N_n}{k_n}}{\binom{N}{m}} = \frac{\binom{N \cdot p_1}{k_1} \cdots \binom{N \cdot p_n}{k_n}}{\binom{N}{m}} , \end{aligned}$$

donde $k_i = 0, 1, \ldots, m$, con $k_1 + \cdots + k_n = m$.

La distribución de cada una de las componentes de una hipergeométrica multivariante es una hipergeométrica, es decir, $X_i \hookrightarrow \mathcal{H}(N, m, p_i)$.

Asimismo, la función de probabilidad de una distribución multinomial es el límite de una hipergeométrica multivariante cuando N y N_i tienden a infinito y su cociente, $\frac{N_i}{N}$, hacia p_i.

La esperanza de X_i es

$$E(X_i) = mp_i$$

y su varianza

$$\text{Var } (X_i) = mp_i(1-p_i)\frac{N-m}{N-1},$$

mientras que la covarianza entre X_i y X_j $(i \neq j)$ vale

$$\text{Cov } (X_i, X_j) = -m \cdot \frac{N-m}{N-1}\sqrt{p_i p_j \cdot \frac{(1-p_i)(1-p_j)}{(N-N_i)(N-N_j)} \cdot N_i N_j}\,.$$

Ejercicios propuestos

8.1. Se toma un número al azar, X, entre los cuatro primeros números naturales, 1, 2, 3 y 4. Una vez elegido, se hace una segunda elección, Y, entre los números naturales menores o iguales que aquél

a) Sabiendo que la segunda elección ha sido el número 2, hállese el valor esperado en la primera elección.

b) Obténgase el coeficiente de correlación entre X e Y.

8.2. Dos amigos han adquirido sendos coches teledirigidos de la misma marca y modelo. El departamento de control de calidad de la empresa fabricante ha estimado que estos coches tienen una probabilidad de fallo de 0.05. ¿Cuál es la probabilidad de que terminen sin incidencias en el vehículo una carrera a la que ambos se han apuntado?

8.3. Un teleadicto ha enviado una postal a un programa de una cierta cadena de televisión. Una azafata elige al azar la tarjeta agraciada con un premio de un millón de pesetas, entre quinientas mil postales. Suponiendo que cada postal, incluyendo el sello, ha costado 100 pesetas, ¿cuál es la ganancia esperada del referido concursante?

8.4. Si X es una variable aleatoria con distribución de Bernoulli de parámetro p, ¿para qué valor de p se maximiza Var (X)?

8.5. Sea X una variable con distribución binomial de parámetros $p = 0.3$ y $n = 15$. Hállese:

a) El mínimo valor de x tal que $p[X \leq x] \geq 0.3$.

b) El máximo valor de x tal que $p[X \geq x] \geq 0.4$.

8.6. En una bolsa se colocan bolas rojas y blancas (al menos una de cada color). ¿Cuál es el mínimo número de bolas rojas y blancas que han de colocarse en la bolsa para que la probabilidad de no sacar blanca coincida con la de obtener exactamente una bola blanca, al realizar 3 extracciones con reemplazamiento?

8.7. ¿Cuántas veces habrá que lanzar un dado para que la probabilidad de obtener al menos un as sea mayor que 0.90?

8.8. A Rosa le gustan los chicos morenos de octavo. En su colegio hay dos clases, A y B, a las que les corresponde el 55 % y el 45 %, respectivamente, de los chicos morenos de octavo. Sin embargo, para que sean del agrado de Rosa, no es suficiente con que sean morenos; además, han de tener los ojos verdes, el pelo rizado o ambas cosas a la vez.

La probabilidad de que un chico moreno de la clase A tenga los ojos verdes es 0.05 y de que su pelo sea rizado es 0.75, mientras que, en la clase B, estas probabilidades son 0.01 y 0.68.

Se eligen 20 chicos morenos del curso de octavo; ¿cuál es la probabilidad de que a Rosa no le guste ninguno de ellos?

8.9. En un examen tipo test de 20 preguntas, cada una de ellas tiene 4 respuestas posibles. El alumno debe marcar una y sólo una de ellas. Cada respuesta acertada vale 1 punto y cada respuesta errónea resta 0.25 puntos. Es obligatorio contestar a todas las preguntas. El examen resulta aprobado si la puntuación final es de al menos 10 puntos.

Diez alumnos poco aventajados se ponen de acuerdo para responder al azar a todas las preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos apruebe? Calcúlese esta probabilidad para veinte alumnos. A la vista de los resultados, ¿les interesa a los diez primeros alumnos buscar otros diez colaboradores?

8.10. Sea X una variable aletoria de Poisson de parámetro λ. Estúdiese el crecimiento y decrecimiento de su función de probabilidad y calcúlese su moda.

8.11. Si X es una variable de Poisson de parámetro λ y $p[X = 0] = \frac{1}{2}$, calcúlese Var (X).

8.12. Un dispositivo está compuesto por un gran número de elementos que trabajan independientemente, siendo la probabilidad de fallo durante su primera hora de funcionamiento muy pequeña e idéntica para todos los elementos. Si la probabilidad de que en ese tiempo falle por lo menos un elemento es 0.98:

a) Hállese la media y la desviación típica del número de elementos que fallan en la primera hora.

b) Calcúlese la probabilidad de que fallen a lo sumo dos elementos en ese tiempo.

8.13. El número de accidentes de trabajo, X, que se producen en una fábrica por semana sigue una distribución de Poisson. Sabiendo que el porcentaje de semanas en que ocurre un accidente es la mitad del correspondiente a las semanas en que no sucede ninguno, calcúlese:

a) El número esperado de accidentes semanales.

b) La probabilidad de que en una semana haya dos accidentes y en la siguiente otros dos.

c) La probabilidad de que en 4 semanas haya a lo sumo 8 accidentes.

d) La Dirección General de Trabajo decide declarar *semanas laborales blancas* aquellas en las que a lo sumo se produce un accidente. Si se considera un período de 5 semanas, determínese la probabilidad de que, como mínimo, resulten 2 *semanas blancas.*

8.14. El número de clientes que llegan diariamente a un establecimiento sigue una distribución de Poisson. Sabiendo que en una semana (6 días) acudieron 72 personas, hállese el número de clientes esperados el primer día de la semana.

¶ **8.15.** Sea la variable aleatoria N con distribución de Poisson de parámetro λ. Sean $X_1, \ldots, X_N$, variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución de Bernoulli de parámetro p. Demuéstrese que $\sum_{i=1}^{N} X_i$ sigue una distribución de Poisson de parámetro λp.

8.16. El número de pólizas de un cierto tipo que una compañía de seguros suscribe en un año es una variable de Poisson de media θ. La probabilidad de que una póliza sea renovada para el siguiente año es 0.6. ¿Cuántas pólizas espera renovar la compañía?

8.17. Se observa una variable aleatoria, X, con distribución de Poisson de parámetro λ. Si el resultado es x, se lanza una moneda x veces, siendo p la probabilidad de cara en dicha moneda. Sea Y la variable aleatoria que expresa el número de caras observadas.

a) Hállese la distribución de la variable Y, su media y su varianza.

b) Supongamos que hemos observado y caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos tirado la moneda x veces?

8.18. En estudios demográficos sobre matrimonios que siguen algún tipo de planificación familiar se ha comprobado que el número, X, de hijos por matrimonio sigue la siguiente distribución:

— En el 50 % de los casos $X = 1 - Y$, donde Y es una variable de Bernoulli de parámetro $p = 0.3$.

— En el resto de los casos $X = 2 + Z$, donde Z sigue una distribución de Poisson de parámetro λ.

a) Sabiendo que el número esperado de hijos por matrimonio es 2, hállese el valor de λ.

b) Se toma una muestra de 10 matrimonios. Calcúlese la probabilidad de que más de la mitad tenga al menos un hijo.

8.19. El número de pacientes atendidos cada día en el servicio de urgencias del hospital provincial sigue una distribución de Poisson, siendo 10 el número medio de llegadas. El porcentaje de pacientes que requieren hospitalización es del 40 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer paciente hospitalizado sea el que fue atendido en quinto lugar?

b) El hospital provincial cuenta un día determinado con 5 camas disponibles. Hállese la probabilidad de que el servicio de hospitalización se colapse.

c) Se ha calculado que el coste de hospitalización es de 10.000 pesetas, mientras que el coste por paciente no hospitalizado sólo asciende a 5.000. Hállese el coste esperado a consecuencia de las urgencias de un día determinado.

d) En la ciudad funciona independientemente una residencia sanitaria cuyo servicio de urgencias atiende diariamente a 12 pacientes por término medio, siendo la mitad de ellos hospitalizados. Un inspector sanitario comprueba que un día han sido hospitalizadas 16 personas entre ambos hospitales. Calcúlese la probabilidad de que al menos la mitad lo hayan sido en la residencia sanitaria.

8.20. En una urna hay cinco fichas numeradas del 1 al 5. Las fichas se extraen al azar de una en una y con reemplazamiento. La selección continúa hasta que cada ficha ha sido extraída al menos una vez. Si han sido elegidas $i-1$ de las 5 fichas, llamaremos X_i al número de extracciones adicionales necesarias para sacar una ficha no seleccionada previamente ($i = 1, \ldots, 5$).

a) Demuéstrese que la variable $Y_i = X_i - 1$, $i = 1, \ldots, 5$, tiene una distribución geométrica.

b) Calcúlese $E(X_i)$, $i = 1, \ldots, 5$.

c) Consideremos la variable $W = X_1 + X_2 + \cdots + X_5$. Hállese $E(W)$, número medio de extracciones para sacar cada ficha al menos una vez.

8.21. En una fábrica se empaquetan cerillas en cajas mediante una máquina que no puede ser totalmente controlada. Para no perder clientes, la máquina se ajusta con el fin de que todas las cajas contengan al menos 50 cerillas. El número de cerillas en cada caja es una variable aleatoria discreta, X, cuya distribución viene dada por:

$$p[X = x] = (0.2)^{x-50} \cdot 0.8\,, \qquad \text{para} \quad x \geq 50\,.$$

El número de cerillas defectuosas en una caja que contiene x fósforos es una binomial $\mathcal{B}(x, 0.1)$. Hállese el número medio de cerillas defectuosas.

8.22. En el niquelado de ciertas láminas metálicas se producen desperfectos que se distribuyen aleatoriamente sobre toda la superficie niquelada. El número de defectos por lámina es una variable aleatoria de Poisson de media 2.

a) Se eligen al azar 10 láminas de la cadena de montaje. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellas tengan defectos?

b) Se toman láminas de la cadena de montaje hasta haber obtenido 7 sin defecto. ¿Cuál es la probabilidad de que haya habido que elegir diez láminas?

c) ¿Qué porcentaje de láminas niqueladas tendrá al menos 4 defectos?

8.23. Un experto en tiro con arco tiene una probabilidad de 0.9 de dar en la diana.

a) Sabiendo que en una serie de 10 tiros ha obtenido 7 aciertos, ¿cuál es la probabilidad de que el quinto fuera diana?

b) ¿Cuál es el número medio de tiros que debe realizar para completar una serie de 15 aciertos?

8.24. Demuéstrese que si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución geométrica de parámetro p, la distribución de X_1 condicionada por $X_1 + X_2 = n$ es una uniforme discreta de parámetro $n + 1$.

8.25. Sea X una variable aleatoria con distribución hipergeométrica. Hállese su función de probabilidad, utilizando la regla de LAPLACE.

8.26. Se recibe un pedido de cajas con 100 tornillos cada una. Una caja es aceptada si, elegida una muestra aleatoria de 10 tornillos, resultan a lo sumo 2 defectuosos. Si la caja que va a ser examinada tiene 3 unidades defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que se acepte?

8.27. Una pecera contiene 3 peces exóticos rollizos y 7 desnutridos. El gato Félix saca hambriento 3 peces de la pecera; los 3 son rollizos y Félix se prepara a comérselos. En ese mismo momento aparece el amo del gato, un probabilista famoso, y le dice: «Félix, si puedes repetir al menos 2 veces lo que has hecho, de 3 veces que los intentes, te dejaré que los comas. Si no lo logras, comerás tu acostumbrada ración de caracoles troceados.» ¿Cuál es la probabilidad de que Félix coma peces?

8.28. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes binomiales $\mathcal{B}(n_1, p)$ y $\mathcal{B}(n_2, p)$. Hállese la distribución de X_1 condicionada a que $X_1 + X_2 = n$.

¶ **8.29.** Sean X e Y variables aleatorias tales que X sigue una distribución $\mathcal{B}(m, p)$ y

$$p[Y = y \mid X = x] = \binom{n}{y - x} p^{y-x}(1-p)^{n-y+x}, \qquad y = x, x+1, \ldots, x+n.$$

a) Hállese la distribución de la variable Y.

b) Calcúlese la distribución de X condicionada por $Y = y$.

8.30. Se ha lanzado un dado al azar 20 veces. Si se sabe que el resultado ha sido seis en 5 ocasiones, ¿cuál es la probabilidad de haber obtenido 8 unos, 3 doses y 4 cincos?

8.31. Una urna contiene 4 bolas blancas, 5 negras y 3 rojas. Sean X_1, X_2 y X_3, el número de bolas blancas, negras y rojas, respectivamente, obtenido en 3 extracciones con reemplazamiento.

a) Hállese la función de probabilidad de (X_1, X_2).

b) Obténgase la distribución de (X_1, X_2), sabiendo que se extrajo una bola roja.

c) Represéntese gráficamente la función de probabilidad de X_1.

8.32. En un viaje de estudios de tres días a Wall Street, el profesor acompañante pregunta la lección cada uno de los tres días a un alumno escogido al azar, que puede ser el mismo todos los días. El 50 % de los alumnos es de primer curso, el 30 % de segundo y el 20 % de tercero. Sean X_1, X_2 y X_3 el número de alumnos de primero, segundo y tercero, respectivamente, a quienes se les pregunta la lección durante el viaje.

a) Demuéstrese que la variable X_1 tiene una distribución binomial.

b) Calcúlense los coeficientes de correlación entre X_1 y X_2 y entre X_1 y $X_2 + X_3$.

¶ **8.33.** Obténgase directamente la función de probabilidad de una distribución hipergeométrica trivariante.

8.34. El consejo de un departamento universitario está formado por dos catedráticos, seis titulares, cuatro asociados, un becario y un alumno. Con objeto de realizar una revisión de planes de estudio se elige al azar una comisión de cinco miembros. ¿Cuál es la probabilidad de que esté compuesta por un catedrático, dos titulares y un alumno?

8.35. Resuélvase el ejercicio 8.31 cuando las extracciones se hacen sin reemplazamiento.

8.36. Se tiene cierta información sobre un equipo de baloncesto.

a) Sabemos que, según se deduce de los partidos de liga que se han disputado hasta el momento, un determinado jugador tiene aproximadamente un 80 % de aciertos en tiros libres. Descríbase este hecho mediante una variable aleatoria de Bernoulli.

b) El citado jugador realiza un serie de 5 tiros libres. ¿Cuál es la probabilidad de que enceste al menos dos?

c) Este jugador tiene una media de un enceste por temporada desde una distancia de diez metros. Suponiendo que el número de canastas en lanzamientos de este tipo sigue una distribución de Poisson, ¿cuál es la probabilidad de que haga dos encestes desde dicha distancia en la próxima temporada?

d) ¿Cuál es el número medio de fallos del jugador antes de conseguir el primer acierto en tiro libre?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que falle 5 canastas antes de conseguir 7 puntos?

f) El equipo de baloncesto cuenta con una plantilla de 8 jugadores para jugar en el puesto de alero, de los cuales 2 son extranjeros. El entrenador selecciona al azar dos de ellos para formar parte del cinco inicial. ¿Cuál es la probabilidad de que uno sea extranjero?

g) El entrenador del equipo opina que sus jugadores A, B y C tienen aptitudes muy similares para formar parte del quinteto titular en la posición de base. Por ello, ha determinado que jueguen el mismo número de minutos en cada encuentro. Se sabe que el 30 % de las canastas de dos puntos logradas entre los tres en un partido corresponde al jugador A, mientras que B y C consiguen el 30 y 40 %, respectivamente.

Calcúlese la probabilidad de que en un partido con un total de 9 encestes de dos puntos para los tres jugadores, A haya conseguido dos, B tres y C cuatro.

h) Los jugadores del equipo están molestos por las decisiones que ha tomado el entrenador en los últimos partidos, por lo cual han considerado oportuno comunicarle sus quejas mediante una comisión de 4 representantes elegidos al azar. Sabiendo que la plantilla del equipo está formada por 12 jugadores de los cuales 3 son pivotes, 3 son bases y 6 son aleros, ¿cuál es la probabilidad de que en esta comisión haya 2 bases y 2 pivotes?

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 8.1.

a) La variable X sigue una distribución uniforme discreta en los cuatro primeros números naturales, 1, 2, 3 y 4, tomando cada valor con probabilidad 1/4; es decir,

$$X: \left| \begin{array}{ll} 1 & p[X=1]=1/4 \\ 2 & p[X=2]=1/4 \\ 3 & p[X=3]=1/4 \\ 4 & p[X=4]=1/4 \end{array} \right.$$

Elegido un primer número, x, se hace una segunda extracción, Y, entre los menores o iguales que él; la distribución de Y condicionada por $X = x$ es equiprobable en los x primeros números naturales, $1, \ldots, x$. Entonces, para cada valor de x ($x = 1, 2, 3, 4$), se tiene la siguiente distribución condicionada:

$$p[Y = y \mid X = x] = \frac{1}{x}\,, \qquad y = 1, \ldots, x\,.$$

Para calcular la esperanza condicionada $E(X \mid Y = 2)$, debemos obtener la distribución de X condicionada por $Y = 2$. Para ello, hallemos previamente la distribución conjunta de X e Y,

$$p[X = x, Y = y] = p[X = x] \cdot p[Y = y \mid X = x] ;$$

así, por ejemplo,

$$p[X = 2, Y = 1] = p[X = 2] \cdot p[Y = 1 \mid X = 2] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} .$$

De esta forma, se deduce la función de probabilidad conjunta que se recoge en la siguiente tabla:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
	25/48	13/48	7/48	1/16	

La última fila y columna son, respectivamente, las distribuciones marginales de X (ya conocida) y de Y.

A partir de esta distribución conjunta, sumando los valores de las columnas, puede calcularse la distribución marginal de Y:

$$p[Y = y] = \sum_{x=1}^{4} p[X = x, Y = y] = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{25}{48} & y = 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{13}{48} & y = 2 \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{16} = \frac{7}{48} & y = 3 \\ \frac{1}{16} & y = 4 \end{cases}$$

Entonces,

$$p[X = x \mid Y = 2] = \frac{p[X = x, Y = 2]}{p[Y = 2]} = \begin{cases} 0 & x = 1 \\ 6/13 & x = 2 \\ 4/13 & x = 3 \\ 3/13 & x = 4 \end{cases}$$

y, en consecuencia,

$$E(X \mid Y = 2) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{6}{13} + 3 \cdot \frac{4}{13} + 4 \cdot \frac{3}{13} = \frac{36}{13} .$$

b) Para obtener el coeficiente de correlación entre las variables X e Y, tenemos que calcular los momentos marginales de primer y segundo orden, cálculo que es inmediato a partir de las distribuciones de X y de Y:

$$E(X) = \frac{5}{2}\,, \quad E(Y) = \frac{21}{12}\,, \quad E(X^2) = \frac{15}{2} \qquad \text{y} \qquad E(Y^2) = \frac{47}{12}\,,$$

con lo cual,

$$\text{Var } (X) = \frac{5}{4} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (Y) = \frac{41}{48}\,.$$

Adviértase que, por ser X una variable aleatoria con distribución uniforme discreta,

$$E(X) = \frac{N+1}{2} \qquad \text{y} \qquad Var(X) = \frac{N^2-1}{12}\,,$$

siendo, en este caso, $N = 4$.

Finalmente, la distribución del producto $X \cdot Y$ es

$$X \cdot Y: \left| \begin{array}{ll} 1 & p[X \cdot Y = 1] = 1/4 \\ 2 & p[X \cdot Y = 2] = 1/8 \\ 3 & p[X \cdot Y = 3] = 1/12 \\ 4 & p[X \cdot Y = 4] = 3/16 \\ 6 & p[X \cdot Y = 6] = 1/12 \\ 8 & p[X \cdot Y = 8] = 1/16 \\ 9 & p[X \cdot Y = 9] = 1/12 \\ 12 & p[X \cdot Y = 12] = 1/16 \\ 16 & p[X \cdot Y = 16] = 1/16 \end{array} \right.$$

con lo cual su esperanza resulta $E(X \cdot Y) = 5$. En consecuencia,

$$\text{Cov } (X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 5 - \frac{5}{2} \cdot \frac{21}{12} = \frac{5}{8}\,.$$

En definitiva, el coeficiente de correlación es

$$\rho = \frac{5/8}{\sqrt{5/4 \cdot 41/48}} = 0.605\,.$$

Ejercicio 8.2.
Sea X_i $(i = 1, 2)$ una variable que vale 1 si falla el coche i-ésimo, con probabilidad de fallo 0.05, y cero, si no falla, con probabilidad 0.95; es decir, X_1 y X_2 son variables de Bernoulli de parámetro 0.05, que suponemos independientes. Entonces,

$$\begin{aligned} p(\text{ningún coche falle}) &= p[X_1 = 0, X_2 = 0] = p[X_1 = 0] \cdot p[X_2 = 0] = \\ &= 0.95^2 = 0.902\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.3.
Definamos la variable dicotómica, X, que vale 1, si se elige la postal, y cero, en caso contrario. La postal es elegida con probabilidad $1/500\,000$.

Entonces, la ganancia, G, es $G = 1\,000\,000 \cdot X - 100$. Por tanto, la ganancia esperada es

$$E(G) = 1\,000\,000 \cdot E(X) - 100 = 2 - 100 = -98 \text{ pesetas},$$

dado que, al ser X una variable de Bernoulli, su esperanza es la probabilidad de éxito, 1/500.000.

Ejercicio 8.4.
La varianza de una distribución de Bernoulli es

$$\text{Var } (X) = p \cdot (1-p) = p - p^2 .$$

Derivando respecto de p resulta $1 - 2 \cdot p$, derivada que se anula para $p = \frac{1}{2}$. Por otra parte, su segunda derivada, -2, es negativa, es decir, en $p = \frac{1}{2}$ se alcanza el valor máximo. Luego la varianza de una variable de Bernoulli se maximiza para $p = \frac{1}{2}$, como puede apreciarse en la gráfica de la figura 8.1.

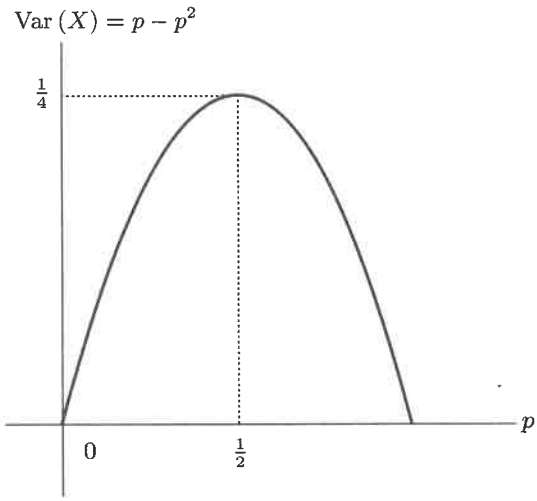


FIG. 8.1.

Ejercicio 8.5.
a) Sea la variable $X \hookrightarrow \mathcal{B}(15, 0.3)$. Las tablas de la distribución binomial para $n = 15$ y $p = 0.3$ proporcionan el mínimo valor de x para el cual $p[X \leq x] \geq 0.3$, siendo éste $x = 4$ (en concreto, $p[X \leq 4] = 0.5155$, mientras que $p[X \leq 3] = 0.2969$).

b) Hallar el máximo valor de x tal que $p[X \geq x] \geq 0.4$ es equivalente a hallar el máximo valor de x tal que $p[X < x] \leq 0.6$. La misma tabla proporciona el valor buscado, $x = 5$ ($p[X < 5] = p[X \leq 4] = 0.5155$, mientras que $p[X < 6] = p[X \leq 5] = 0.7216$).

Ejercicio 8.6.
Sea N_1 el número de bolas blancas en la bolsa y N_2 el de bolas rojas. Dado que realizamos 3 extracciones con reemplazamiento, la variable X, *número de bolas blancas extraídas*, sigue

una distribución binomial de parámetros $n = 3$ y $p = \frac{N_1}{N_1+N_2}$, probabilidad de *obtener bola blanca en una extracción*:

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right) .$$

Tenemos que hallar los mínimos valores de N_1 y N_2, tales que

$$p[X = 0] = p[X = 1] ,$$

es decir,

$$\binom{3}{0}\left(\frac{N_1}{N_1+N_2}\right)^0\left(\frac{N_2}{N_1+N_2}\right)^3 = \binom{3}{1}\left(\frac{N_1}{N_1+N_2}\right)^1\left(\frac{N_2}{N_1+N_2}\right)^2 .$$

Simplificando,

$$\frac{N_2^3}{(N_1+N_2)^3} = 3 \cdot \frac{N_1 N_2^2}{(N_1+N_2)^3} ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$N_2 = 3N_1 ,$$

ya que N_2 es distinto de cero. Esta relación se verifica para infinitos pares de valores enteros, siendo este par mínimo para $N_1 = 1$ y $N_2 = 3$. Esto es, cuando la bolsa contiene 1 bola blanca y 3 rojas, la probabilidad de no sacar bola blanca en 3 extracciones y la de sacar exactamente una, coinciden.

Ejercicio 8.7.
La variable X, *número de ases obtenidos en n lanzamientos*, sigue una distribución binomial $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$. Tenemos que hallar el valor de n tal que

$$p[X \geq 1] > 0.90 ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$p[X = 0] < 0.10 .$$

Por tanto,

$$\binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.10 ,$$

es decir,

$$n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln(0.10) ,$$

de donde resulta $n > 12.63$. Entonces, habrá que lanzar el dado 13 veces o más para obtener al menos un as con probabilidad mayor que 0.90.

Ejercicio 8.8.
Se considera la población formada, únicamente, por los chicos morenos de octavo, población dividida en dos subpoblaciones: los chicos morenos de la clase A, el 55 %, y los de B, el 45 % restante.

A Rosa le gustan los chicos *con ojos verdes*, V, o con el *pelo rizado*, R, o con ambas características a la vez; es decir, el suceso *un chico moreno gusta a Rosa* es $V \cup R$. Calculemos la probabilidad de este suceso en las dos subpoblaciones. Así,

$$\begin{aligned} p(V \cup R \mid A) &= p(V \mid A) + p(R \mid A) - p(V \cap R \mid A) = \\ &= p(V \mid A) + p(R \mid A) - p(V \mid A) \cdot p(R \mid A) = \\ &= 0.05 + 0.75 - 0.05 \cdot 0.75 = 0.7625 \,, \end{aligned}$$

sin más que considerar que las características *ojos verdes* y *pelo rizado* son independientes. De la misma forma calcularíamos la probabilidad para los chicos morenos de la clase B:

$$p(V \cup R \mid B) = 0.6832 \,.$$

Entonces, la probabilidad de que *un chico moreno guste a Rosa* es:

$$\begin{aligned} p(V \cup R) &= p(A) \cdot p(V \cup R \mid A) + p(B) \cdot p(V \cup R \mid B) = \\ &= 0.55 \cdot 0.7625 + 0.45 \cdot 0.6832 = 0.7268 \,. \end{aligned}$$

Sea X la variable aleatoria *número de chicos que le gustan a Rosa* entre 20 chicos morenos de octavo elegidos al azar. Esta variable sigue una distribución binomial con $n = 20$ y $p = 0.7268$. Entonces, la probabilidad de que *a Rosa no le guste ninguno de ellos* es

$$p[X = 0] = \binom{20}{0} \cdot 0.7268^0 \cdot 0.2732^{20} = 0.5 \cdot 10^{-12} \,,$$

probabilidad que es, prácticamente, nula.

Adviértase que el hecho de considerar que X sigue una distribución binomial lleva implícito el que las elecciones de veinte chicos al azar son independientes entre sí. Sin embargo, esto, en principio, no es cierto, ya que se supone que los veinte chicos son distintos y, por tanto, las elecciones se realizan sin reemplazamiento. Dado que desconocemos el número de chicos morenos de octavo, no habría información suficiente para resolver este problema.

Ahora bien, si suponemos que dicho número es suficientemente grande, cada elección no cambiaría sustancialmente la probabilidad de que un chico moreno guste a Rosa, con lo cual puede aceptarse que los experimentos son independientes.

Ejercicio 8.9.
Sea X_i $(i = 1, \ldots, 20)$ una variable de Bernoulli que vale 1, si se contesta correctamente a la pregunta i-ésima, siendo la probabilidad de que esto ocurra $1/4$, siempre que se responda al azar.

La variable, X, *número de preguntas correctamente respondidas* por un alumno en el examen es la suma de las 20 variables anteriores, es decir, $X = X_1 + \cdots + X_{20}$, que suponiendo que las X_i son independientes, seguirá una distribución binomial $\mathcal{B}(20, 0.25)$.

La variable que recoge la *puntuación obtenida en el examen*, Y, es función del número de respuestas acertadas; en concreto,

$$Y = 1 \cdot X - 0.25 \cdot (20 - X) = 1.25 \cdot X - 5 .$$

Un alumno aprueba si su puntuación es, al menos, de 10 puntos, es decir, si

$$Y = 1.25 \cdot X - 5 \geq 10 ,$$

lo cual sucede si, y sólo si, $X \geq 12$. Entonces,

$$p(\text{aprobar}) = p[X \geq 12] = 1 - p[X \leq 11] = 0.0009 ,$$

valor que se ha obtenido utilizando las tablas de la distribución binomial para $n = 20$ y $p = 0.25$.

Finalmente, si diez alumnos se proponen responder al azar todas las preguntas, podemos considerar la variable U, *número de alumnos aprobados*, variable que tiene una distribución binomial de parámetros 10 (número de experimentos) y 0.0009 (probabilidad de éxito). Por tanto, la probabilidad de que *al menos uno de los diez apruebe* es:

$$p[U \geq 1] = 1 - p[U = 0] = 1 - \binom{10}{0} (0.0009)^0 (0.9991)^{10} = 0.009 .$$

De la misma forma, la probabilidad de que, de 20 alumnos que contesten al azar, al menos uno apruebe vale:

$$p[V \geq 1] = 1 - p[V = 0] = 1 - \binom{20}{0} (0.0009)^0 (0.9991)^{20} = 0.0178 ,$$

donde V, *número de aprobados entre 20 alumnos que contesten al azar*, sigue una distribución $\mathcal{B}(20, 0.0009)$.

La probabilidad de que al menos uno apruebe es mayor, obviamente, cuando se consideran 20 alumnos que cuando sólo se consideran 10. Ahora bien, este aumento de probabilidad no hace aumentar la probabilidad individual de aprobado, que es la misma en ambas situaciones, 0.0009; de aquí que los 10 alumnos no debieran tener interés en buscar 10 nuevos colaboradores para realizar aleatoriamente el examen.

Ejercicio 8.10.
Consideremos el cociente de las probabilidades de dos valores consecutivos de X:

$$\frac{p[X = k]}{p[X = k - 1]} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k / k!}{e^{-\lambda} \lambda^{k-1} / (k-1)!} = \frac{\lambda}{k} .$$

Si este cociente es mayor o igual que la unidad, la función de probabilidad crecerá entre los valores consecutivos $k-1$ y k; esto ocurre cuando $k \leq \lambda$. Por el contrario, si el cociente es menor o igual que la unidad, la función decrecerá, lo cual sucede cuando $k \geq \lambda$.

Para calcular la moda de esta distribución nos planteamos buscar el valor Mo, que cumpla simultáneamente:

$$\begin{aligned} p[X = Mo] &\geq p[X = Mo - 1] \\ p[X = Mo] &\geq p[X = Mo + 1] , \end{aligned}$$

es decir, un valor Mo en el que la función de probabilidad alcance un máximo relativo. Las anteriores desigualdades pueden escribirse como

$$\frac{p[X = Mo]}{p[X = Mo - 1]} \geq 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{p[X = Mo + 1]}{p[X = Mo]} \leq 1 ,$$

y, teniendo en cuenta el crecimiento y el decrecimiento de la función de probabilidad, se deduce que

$$Mo \leq \lambda \qquad \text{y} \qquad Mo + 1 \geq \lambda$$

o, lo que es lo mismo,

$$\lambda - 1 \leq Mo \leq \lambda .$$

Por tanto, si λ no es un número entero, entonces la moda es la parte entera de dicho número, $Mo = [\lambda]$. Por el contrario, si λ es un número entero, la moda será tanto $\lambda - 1$ como λ, siendo la distribución, en este caso, bimodal.

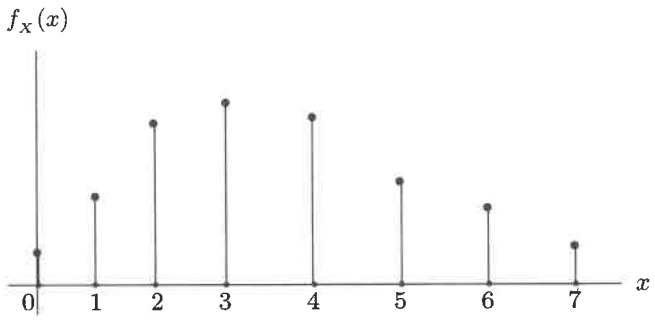


FIG. 8.2.

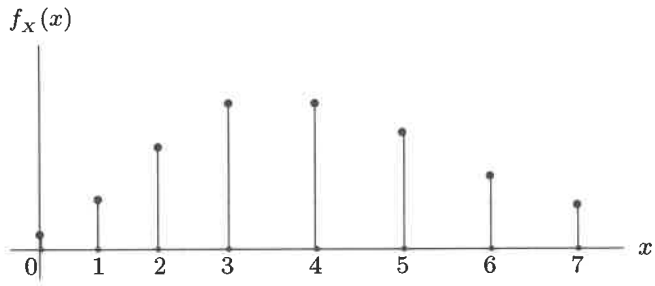


FIG. 8.3.

Para ilustrar estos resultados, representemos gráficamente la función de probabilidad, f_X, de una distribución de Poisson de parámetro 3.5 (véase la figura 8.2) y la de una distribución de Poisson de parámetro 4 (véase la figura 8.3).

Ejercicio 8.11.

La varianza de una variable de Poisson es su parámetro. Dado que

$$p[X = 0] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = \frac{1}{2} ,$$

esto es, $e^{-\lambda} = 1/2$, resulta de inmediato que $\lambda = \ln 2 = 0.69$. Por tanto, Var $(X) = 0.69$.

Ejercicio 8.12.

Consideremos n variables, $X_1, \ldots, X_n$, independientes, que contabilizan el fallo de cada uno de los elementos del dispositivo,

$$X_i : \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{falla el elemento } i\text{-ésimo} \\ 0 & \text{no falla el elemento } i\text{-ésimo} \end{array} \right.$$

es decir, n variables independientes de Bernoulli de parámetro p, probabilidad de fallo, valor desconocido, pero pequeño. El *número de elementos que fallan en el dispositivo*, X, es la suma de las n variables, $X = X_1 + \cdots + X_n$, variable con distribución binomial $\mathcal{B}(n, p)$. Como n es grande y p pequeño, dicha variable puede considerarse, por aproximación, con distribución de Poisson de parámetro λ desconocido, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Ahora bien, se sabe que la probabilidad de que *falle al menos un elemento* es 0.98, es decir,

$$p[X \geq 1] = 1 - p[X = 0] = 0.98 ,$$

y, por tanto,

$$p[X = 0] = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = 0.02 ,$$

esto es, $e^{-\lambda} = 0.02$, o, lo que es lo mismo, $\lambda = -\ln 0.02 = 3.9$. En consecuencia, X sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 3.9$.

a) Dado que la esperanza y la varianza de una distribución de Poisson coindicen con el parámetro λ, el número medio de fallos en la primera hora de funcionamiento es 3.9, siendo su desviación típica de 1.98.

b) Por último, la probabilidad de que *a lo sumo fallen dos elementos* es

$$p[X \leq 2] = 0.2531 ,$$

resultado que se obtiene sin más que consultar las tablas de la distribución de Poisson.

Ejercicio 8.13.
El *número de accidentes semanales*, X, sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$, cuyo parámetro es desconocido. Para obtenerlo, sabemos que el porcentaje de semanas en que ocurre un accidente es la mitad del de las semanas en que no ocurre ninguno, es decir,

$$2 \cdot p[X = 1] = p[X = 0] .$$

Sustituyendo,

$$2e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} ,$$

resulta que el valor del parámetro es $\lambda = \frac{1}{2}$. Por tanto, X sigue una distribución $\mathcal{P}(\frac{1}{2})$.

a) Evidentemente, el número esperado de accidentes semanales, $E(X)$, es λ, es decir, $\frac{1}{2}$.

b) Designando por X_i el *número de accidentes que ocurren en la semana i-ésima* $(i = 1, 2)$, la probabilidad de que *en una semana haya dos accidentes y en la siguiente otros dos* es

$$p[X_1 = 2, X_2 = 2] = p[X_1 = 2] \cdot p[X_2 = 2] = \left[e^{-1/2} \cdot \frac{(1/2)^2}{2!} \right]^2 = 0.0057 ,$$

sin más que considerar que X_1 y X_2 son independientes e igualmente distribuidas.

c) La distribución de Y, *número de accidentes en 4 semanas*, es también de Poisson, pues es la suma de cuatro variables independientes que lo son,

$$Y = X_1 + \cdots + X_4 \hookrightarrow \mathcal{P}(4 \cdot \frac{1}{2}) \equiv \mathcal{P}(2) .$$

Entonces, consultando las correspondientes tablas, se obtiene la probabilidad pedida:

$$p[Y \leq 8] = 0.9998 .$$

d) Una *semana blanca* es aquella en la que el número de accidentes, X, es menor o igual que 1, obteniéndose la probabilidad de este suceso, p, en las tablas de Poisson para $\lambda = 1/2$:

$$p = p[X \leq 1] = 0.9098 .$$

Sea U el *número de semanas blancas en un período de 5 semanas*; por tanto, U tiene una distribución $\mathcal{B}(5, 0.9098)$. Entonces, la probabilidad de que *como mínimo haya dos semanas blancas* es

$$p[U \geq 2] = p[V \leq 3] \simeq 0.9995 ,$$

donde $V = 5 - U$, *número de semanas que no son blancas*, sigue una distribución $\mathcal{B}(5, 0.0902)$, pudiendo calcularse esta probabilidad en las tablas binomiales para $n = 5$ y $p = 0.10$ (valor más próximo a 0.0902).

Ejercicio 8.14.
Sea X_i $(i = 1, \ldots, 6)$ el *número de clientes que llegan a un establecimiento el día i-ésimo*, variable con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. El *número total de clientes por semana* es $X = X_1 + \cdots + X_6$, que, suponiendo independencia entre las variables X_i, también tiene una distribución de Poisson, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(6\lambda)$.

Se pide calcular

$$E(X_1 \mid X = 72)\,,$$

para lo cual hallaremos la función de probabilidad de X_1 condicionada por $X = 72$, teniendo en cuenta que, como $X_1, \ldots, X_6$ son independientes, también lo son X_1 y $X_2 + \cdots + X_6$:

$$p[X_1 = x_1\ X = 72] = \frac{p[X_1 = x_1, X = 72]}{p[X = 72]} =$$

$$= \frac{p[X_1 = x_1] \cdot p[X_2 + \cdots + X_6 = 72 - x_1]}{p[X = 72]} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-5\lambda} \cdot \frac{(5\lambda)^{72-x_1}}{(72-x_1)!}}{e^{-6\lambda} \cdot \frac{(6\lambda)^{72}}{72!}} =$$

$$= \frac{72!}{x_1!(72 - x_1)!} \cdot \frac{5^{72-x_1}}{6^{72}} = \binom{72}{x_1} \left(\frac{1}{6}\right)^{x_1} \left(\frac{5}{6}\right)^{72-x_1}$$

Por tanto, la distribución de X_1 condicionada por $X = 72$ es una binomial $\mathcal{B}(72, \frac{1}{6})$, siendo su esperanza

$$E(X_1 \mid X = 72) = 72 \cdot \frac{1}{6} = 12 \text{ clientes.}$$

Ejercicio 8.15.
Sea $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, entonces, para $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$p[Y = k] = \sum_{n=0}^{\infty} p[N = n, Y = k] = \sum_{n=k}^{\infty} p[N = n] \cdot p[Y = k \mid N = n]\,.$$

Cuando $N = n$, Y es la suma de n variables independientes de Bernoulli de parámetro p y, por tanto, la distribución de Y condicionada a $N = n$ es una binomial $\mathcal{B}(n, p)$. Así,

$$p[Y = k] = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}\,.$$

El último sumatorio es el desarrollo en serie de $e^{\lambda(1-p)}$, con lo cual resulta que

$$p[Y = k] = e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^k}{k!}\,,$$

lo que prueba que Y sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.

Ejercicio 8.16.

El *número de pólizas que la compañía suscribe en un año*, N, es una variable de Poisson de parámetro θ. Para cada una de las pólizas suscritas podemos considerar la variable

$$X_i : \begin{cases} 1 & \text{la póliza } i\text{-ésima es renovada} \\ 0 & \text{la póliza } i\text{-ésima no es renovada} \end{cases}$$

esto es, una variable de Bernoulli de parámetro $p = 0.6$. Entonces, *el número de pólizas renovadas*, Y, es:

$$Y = X_1 + \cdots + X_N \ ,$$

donde supondremos que las variables X_i son independientes.

En el ejercicio anterior se demostró que la variable Y sigue una distribución de Poisson de parámetro $\theta \cdot 0.6$. Éste es, por tanto, el número de pólizas que espera renovar la compañía.

Ejercicio 8.17.

a) Queremos conocer la distribución de Y, *número de caras observadas*, sabiendo que X, *número de lanzamientos de la moneda*, sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. Sabemos que, si la moneda se lanza x veces, el número de caras, Y, sigue una distribución binomial $\mathcal{B}(x,p)$, es decir, la distribución de Y condicionada por $X = x$ es una binomial. Entonces, teniendo en cuenta el resultado probado en el ejercicio 8.15, se deduce que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ y, por tanto, su media y su varianza coinciden y valen λp.

b) Si se han observado y caras, la probabilidad de que se haya tirado la moneda x veces es:

$$\begin{aligned} p[X = x \mid Y = y] &= \frac{p[X = x] \cdot p[Y = y \mid X = x]}{p[Y = y]} = \\ &= \frac{e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y}}{e^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda p)^y}{y!}} = \\ &= e^{-\lambda(1-p)} \cdot \frac{[\lambda(1-p)]^{x-y}}{(x-y)!} \ , \qquad \text{para} \quad x = y, \quad y+1, \ldots , \end{aligned}$$

esto es, la distribución de X condicionada por $Y = y$ es una distribución de Poisson descentrada, con el origen en y.

Ejercicio 8.18.

a) La variable X, *número de hijos por matrimonio*, puede expresarse como

$$X = \begin{cases} 1 - Y & \text{con } Y \hookrightarrow b(0.3), \text{ donde } p[X = 1 - Y] = 1/2 \\ 2 + Z & \text{con } Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), \text{ donde } p[X = 2 + Z] = 1/2 \end{cases}$$

Entonces, la probabilidad de que el número de hijos sea k, $p[X = k]$, resulta

$$p[X = 1 - Y] \cdot p[X = k \mid X = 1 - Y] + p[X = 2 + Z] \cdot p[X = k \mid X = 2 + Z] \ ,$$

es decir,

$$p[X=k] = \frac{1}{2}\cdot p[Y=1-k] + \frac{1}{2}\cdot p[Z=k-2]\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p[X=0] &= \frac{1}{2}\cdot p[Y=1] = \frac{1}{2}\cdot 0.3 = 0.15\,, \\ p[X=1] &= \frac{1}{2}\cdot p[Y=0] = \frac{1}{2}\cdot 0.7 = 0.35 \qquad \text{y} \\ p[X=k] &= \frac{1}{2}\cdot p[Z=k-2] = \frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\,, \qquad \text{para} \quad k\geq 2\,. \end{aligned}$$

Así, el número esperado de hijos por matrimonio es

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\cdot 0.15 + 1\cdot 0.35 + \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \\ &= 0.35 + \frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda}\left[\sum_{k=2}^{\infty}((k-2)+2)\,\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\right] = \\ &= 0.35 + \frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda}\left[\lambda\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\lambda^{k-3}}{(k-3)!} + 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\right] = \\ &= 0.35 + \frac{1}{2}\cdot e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + 2e^{\lambda}\right) = 1.35 + \frac{1}{2}\cdot\lambda = 2\,, \end{aligned}$$

con lo cual $\lambda = 1.3$.

b) La probabilidad de que un matrimonio tenga *al menos un hijo* es

$$p[X\geq 1] = 1 - p[X=0] = 1 - 0.15 = 0.85\,.$$

Sea U el *número de matrimonios, entre un total de 10, con al menos un hijo*; entonces, $U \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.85)$. Por tanto, la probabilidad de que *más de la mitad tenga al menos un hijo* es

$$p[U>5] = p[V\leq 4] = 0.9901\,,$$

siendo $V = 10 - U$ una variable binomial $\mathcal{B}(10, 0.15)$, que permite buscar dicha probabilidad en las tablas.

Ejercicio 8.19.

a) Consideremos la variable U, *número de pacientes atendidos antes del primero que es hospitalizado*, variable con distribución geométrica de parámetro 0.4, que es la probabilidad de que *un paciente atendido sea hospitalizado*. Entonces, la probabilidad de que los cuatro primeros en llegar a urgencias no sean hospitalizados y sí lo sea el quinto es

$$p[U=4] = 0.6^4\cdot 0.4 = 0.0518\,.$$

b) El *número de urgencias atendidas diariamente en el hospital provincial*, N, sigue una distribución de Poisson de parámetro 10, número esperado de llegadas.

Sea X_i una variable de Bernoulli que vale 1 si el i-ésimo paciente es hospitalizado, ocurriendo este suceso en el 40 % de las ocasiones, esto es,

$$X_i : \left| \begin{array}{ll} 1 & p[X_i = 1] = 0.4 \\ 0 & p[X_i = 0] = 0.6 \end{array} \right.$$

La variable X, *número de pacientes hospitalizados diariamente en el hospital provincial*, es $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Entonces, suponiendo que las variables X_i son independientes y aplicando el resultado demostrado en el ejercicio 8.15, se obtiene que

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(4) \, ,$$

dado que, en este caso, $\lambda p = 10 \cdot 0.4 = 4$.

La probabilidad de que *el servicio de hospitalización se colapse* es la probabilidad de que *más de 5 pacientes requieran hospitalización*, es decir,

$$p[X > 5] = 1 - p[X \leq 5] = 1 - 0.7851 = 0.2149 \, ,$$

sin más que consultar las tablas de la distribución de Poisson.

c) La variable C, *coste diario a consecuencia de las urgencias atendidas*, es

$$C = 10\,000 \cdot X + 5\,000(N - X) = 5\,000 \cdot X + 5\,000 \cdot N \, .$$

Entonces, el coste esperado es

$$E(C) = 5\,000 \cdot E(X) + 5\,000E(N) = 5\,000 \cdot 4 + 5\,000 \cdot 10 = 70\,000 \text{ pesetas.}$$

d) En idéntico sentido, sea M el *número de urgencias atendidas diariamente en la residencia sanitaria*, siendo $M \hookrightarrow \mathcal{P}(12)$, y sea $Y = \sum_{i=1}^{M} Y_i$, el *número de pacientes hospitalizados en dicha residencia*, $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(6)$, dado que, en este caso, $\lambda \cdot p = 12 \cdot 0.5 = 6$.

El inspector comprueba que un día han sido hospitalizadas 16 personas entre ambos hospitales, $X + Y = 16$; calculemos la probabilidad de que al menos la mitad lo hayan sido en la residencia sanitaria, es decir,

$$\begin{aligned} p[Y \geq 8 \mid X + Y = 16] &= \frac{p[Y \geq 8, X + Y = 16]}{p[X + Y = 16]} = \\ &= \frac{p[X = 8, Y = 8] + p[X = 7, Y = 9] + \cdots + p[X = 0, Y = 16]}{p[X + Y = 16]} = \\ &= \frac{p[X = 8] \cdot p[Y = 8] + p[X = 7] \cdot p[Y = 9] + \cdots + p[X = 0] \cdot p[Y = 16]}{p[X + Y = 16]} \end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta el comportamiento independiente de los dos hospitales. Por este mismo motivo, $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(4+6) \equiv \mathcal{P}(10)$, siendo

$$p[X+Y=16] = 0.9730 - 0.9513 = 0.0217 .$$

Las mismas tablas de la distribución de Poisson proporcionan los distintos valores de probabilidad para X y para Y que aparecen en el numerador de la expresión anterior, obteniéndose:

$$p[Y \geq 8 \mid X+Y=16] = \frac{0.0186}{0.0217} = 0.8575 .$$

Ejercicio 8.20.

a) Si ya se han extraído, al menos una vez, $i-1$ fichas, quedan $5-(i-1) = 6-i$ fichas aún no seleccionadas. Entonces, la probabilidad del suceso S, *obtener una ficha ya seleccionada*, en cada nueva extracción con reemplazamiento es

$$p(S) = \frac{i-1}{5} ,$$

y la de $\overline{S}$, *obtener una ficha no seleccionada*,

$$p(\overline{S}) = \frac{6-i}{5} .$$

Si X_i es el *número de extracciones adicionales necesarias para conseguir una ficha no seleccionada*, y considerando que las sucesivas extracciones son independientes al realizarse con reposición, se tiene, para un valor de k $(k = 1, 2, \ldots)$,

$$\begin{aligned} p[X_i = k] &= p(S_1 \ldots S_{k-1}\overline{S}_k) = p(S_1)\cdots p(S_{k-1}) \cdot p(\overline{S}_k) = \\ &= \left(\frac{i-1}{5}\right)^{k-1} \frac{6-i}{5} , \end{aligned}$$

donde S_j designa el suceso *obtener una ficha ya seleccionada en la j-ésima extracción* $(j = 1, \ldots, k)$. Por tanto, $Y_i = X_i - 1$, *número de fichas ya seleccionadas extraídas antes que la primera ficha no seleccionada*, tiene la siguiente función de probabilidad:

$$p[Y_i = k] = p[X_i = k+1] = \left(\frac{i-1}{5}\right)^k \frac{6-i}{5} , \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots$$

De aquí deducimos que la variable Y_i tiene una distribución geométrica de parámetro $p = \frac{6-i}{5}$, esto es,

$$\begin{array}{l} Y_5 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/5) , \\ Y_4 \hookrightarrow \mathcal{G}(2/5) , \\ Y_3 \hookrightarrow \mathcal{G}(3/5) , \\ Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(4/5) \qquad \text{y} \\ Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1) , \end{array}$$

donde esta última distribución es, realmente, la de una variable aleatoria degenerada en cero.

b) Teniendo en cuenta que si $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ su esperanza es $E(Y) = \frac{1-p}{p}$, se obtiene:

$$E(X_i) = E(Y_i) + 1 = \frac{1 - \frac{6-i}{5}}{\frac{6-i}{5}} + 1 = \frac{5}{6-i} ,$$

es decir,

$$E(X_1) = 1 , \quad E(X_2) = \frac{5}{4} , \quad E(X_3) = \frac{5}{3} , \quad E(X_4) = \frac{5}{2} \qquad \text{y} \qquad E(X_5) = 5 .$$

c) Finalmente, si $W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$, entonces,

$$E(W) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{3} + \frac{5}{2} + 5 = 11.42 .$$

Ejercicio 8.21.
Consideremos la variable D, *número de cerillas defectuosas* en cada caja. Se trata de calcular su esperanza, $E(D)$. Para ello, conocemos la distribución de X, *número de cerillas por caja*, y la distribución de D cuando la caja contiene x fósforos, es decir, la distribución de D condicionada por $X = x$. A partir de esta información podríamos calcular la distribución de D, pero dicho cálculo no es sencillo. Ahora bien, utilizando una propiedad de la esperanza condicionada, $E(D)$ puede expresarse como

$$E(D) = E[E(D \mid X)] .$$

La esperanza de D condicionada por $X = x$ es la de una binomial $\mathcal{B}(x, 0.1)$, con lo cual

$$E(D \mid X = x) = x \cdot 0.1 .$$

Así,

$$E(D) = E[E(D \mid X)] = E(X \cdot 0.1) = 0.1 \cdot E(X) .$$

Por otro lado, obsérvese que X sigue una distribución geométrica descentrada; en concreto, si $Z = X - 50$, para cualquier valor $z \geq 0$, resulta

$$p[Z = z] = p[X - 50 = z] = p[X = z + 50] = 0.2^z \cdot 0.8 ,$$

esto es, $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(0.8)$. Entonces,

$$E(X) = E(Z) + 50 = \frac{0.2}{0.8} + 50 = 50.25 \text{ fósforos.}$$

En definitiva,

$$E(D) = 0.1 \cdot E(X) = 0.1 \cdot 50.25 = 5.025 .$$

El número medio de cerillas defectuosas es, por tanto, 5.025 cerillas.

Ejercicio 8.22.

a) El *número de láminas con defectos de entre 10*, X, sigue una distribución binomial $\mathcal{B}(10,p)$, siendo p la probabilidad de que *una lámina tenga algún defecto*. Sabemos que *el número de defectos por lámina*, N, sigue una distribución de Poisson de parámetro 2; entonces,

$$p = p[N > 0] = 1 - p[N = 0] = 1 - e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} = 1 - e^{-2} .$$

Por tanto, la probabilidad de que *exactamente 3 láminas tengan defectos* es

$$p[X = 3] = \binom{10}{3} (1 - e^{-2})^3 (e^{-2})^7 = 0.000064 .$$

b) Sea Y el *número de láminas elegidas hasta obtener 7 sin defecto*. Entonces, $X = Y - 7$, *número de láminas defectuosas elegidas hasta obtener 7 sin defecto*, sigue una distribución $\mathcal{BN}(7, e^{-2})$, donde e^{-2} es la probabilidad de que *la lámina no tenga defectos*. Entonces, la probabilidad de que *haya que elegir 10 láminas hasta obtener las 7 sin defectos* es

$$p[Y = 10] = p[X = 3] = \binom{3+7-1}{3} (1 - e^{-2})^3 (e^{-2})^7 = 0.000045 .$$

c) La probabilidad de que *una lámina tenga al menos 4 defectos* es

$$p[N \geq 4] = 1 - p[N \leq 3] = 1 - 0.8571 = 0.1429 ,$$

siendo $N \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$. Por tanto, el 14.29 % de las láminas tiene al menos 4 defectos.

Ejercicio 8.23.

a) Sabemos que se han obtenido 7 aciertos en 10 tiros. Al ser equiprobables todas las posibles ordenaciones de los 7 aciertos y los 3 fallos, podemos utilizar la regla de LAPLACE para calcular la probabilidad de que *el quinto tiro fuera diana*. Así, los casos posibles son

$$P_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$$

y los favorables (6 aciertos y 3 fallos en 9 posibles posiciones),

$$P_9^{6,3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84 ,$$

con lo que la probabilidad pedida es $\frac{84}{120} = 0.7$.

b) Denotemos por X a la variable *número de tiradas hasta conseguir 15 dianas*. Entonces, $Y = X - 15$, *número de tiros fallados hasta conseguir los 15 aciertos*, sigue una distribución $\mathcal{BN}(15, 0.9)$, siendo su media

$$E(Y) = \frac{15 \cdot 0.1}{0.9} = 1.67 .$$

Por tanto, $E(X) = E(Y) + 15 = 16.67$, es decir, el número medio de tiros hasta conseguir 15 dianas es 16.67.

Ejercicio 8.24.
Dado que X_1 y X_2 son variables independientes e igualmente distribuidas $\mathcal{G}(p)$, o lo que es lo mismo, con distribución $\mathcal{BN}(1,p)$, su suma, $X_1 + X_2$, tiene una distribución $\mathcal{BN}(2,p)$. Entonces, para $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$p[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n] = \frac{p[X_1 = k, X_2 = n-k]}{p[X_1 + X_2 = n]} = \frac{p[X_1 = k] \cdot p[X_2 = n-k]}{p[X_1 + X_2 = n]} =$$

$$= \frac{(1-p)^k p \cdot (1-p)^{n-k} p}{\binom{n+2-1}{n} (1-p)^n p^2} = \frac{1}{\binom{n+1}{n}} = \frac{1}{n+1},$$

función de probabilidad de una distribución uniforme discreta de parámetro $n+1$.

Ejercicio 8.25.
Disponemos de una urna con N_1 bolas blancas y N_2 negras ($N_1 + N_2 = N$). Se extraen n bolas sin reemplazamiento ($n \leq N$). Sea X el *número de bolas blancas obtenidas*; se trata de hallar $p[X = k]$.

Sea Ω el espacio muestral constituido por todas las posibles muestras de tamaño n que pueden formarse con las N bolas, considerando dos muestras distintas si difieren en alguna bola, no así en el orden en que han sido obtenidas (los sucesos relativos a la variable X tienen que ver con el número de bolas blancas extraídas, pero no con el orden de aparición de éstas). Este espacio muestral contiene $\binom{N}{n}$ puntos muestrales, el número de combinaciones sin repetición de N elementos tomados de n en n. Veamos que este espacio es equiprobable. Dado que, a partir de una muestra *desordenada*, se pueden conseguir $P_n = n!$ muestras *ordenadas*, se deduce que

$$p(\text{muestra desordenada}) = n! \cdot p(\text{muestra ordenada}) =$$

$$= n! \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdots \frac{1}{N-(n-1)} =$$

$$= \frac{n! \cdot (N-n)!}{N!} = \frac{1}{\binom{N}{n}}.$$

Por tanto, la probabilidad de cualquier punto muestral (una muestra *desordenada*) es la misma y coincide, lógicamente, con la inversa del número de puntos muestrales.

Entonces, como Ω es un espacio equiprobable, podemos utilizar la regla de LAPLACE para hallar la función de probabilidad de la variable X:

$$p[X = k] = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}}.$$

El número de casos posibles es, obviamente, el de puntos muestrales, $\binom{N}{n}$. Para el cálculo del número de casos favorables tendremos en cuenta el número de submuestras formadas por k bolas blancas de un total deN_1, $\binom{N_1}{k}$, y el de submuestras de $n-k$ bolas negras de un total de N_2, $\binom{N_2}{n-k}$. *Cruzando* los dos tipos de submuestras, deducimos que el número de casos favorables es $\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$. Por tanto,

$$p[X=k]=\frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}\,,$$

para los valores enteros de k que verifiquen $0\le k\le N_1$ y $0\le n-k\le N_2$ o, lo que es lo mismo, para $0\le k\le N_1$ y $n-N_2\le k\le n$. Estas dos desigualdades se resumen en

$$\text{máx}\,(0,n-N_2)\le k\le \text{mín}\,(N_1,n)\,.$$

Ejercicio 8.26.
La caja que va a ser examinada contiene 97 tornillos no defectuosos y 3 defectuosos. Se extraen 10 tornillos sin reemplazamiento. La variable X, *número de unidades defectuosas entre las 10 extraídas*, sigue una distribución hipergeométrica $\mathcal{H}(100,10,3/100)$. En consecuencia,

$$p(\text{aceptar la caja}) \quad = p[X\le 2]=p[X=0]+p[X=1]+p[X=2]=$$

$$=\frac{\binom{3}{0}\binom{97}{10}}{\binom{100}{10}}+\frac{\binom{3}{1}\binom{97}{9}}{\binom{100}{10}}+\frac{\binom{3}{2}\binom{97}{8}}{\binom{100}{10}}=0.9993\,.$$

Ejercicio 8.27.
El gato saca, sin reemplazamiento, tres peces de una pecera que contine 3 peces rollizos y 7 desnutridos. La probabilidad de *sacar los tres rollizos* es

$$p(R_1R_2R_3)=p(R_1)\cdot p(R_2\mid R_1)\cdot p(R_3\mid R_1R_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{120}=0.0083\,,$$

donde R_i designa el suceso *sacar un pez rollizo en la i-ésima extracción* $(I=1,2,3)$.
De otra forma, puede considerarse que la variable X, *número de peces rollizos obtenidos al hacer tres extracciones*, sigue una distribución hipergeométrica $\mathcal{H}(10,3,\frac{3}{10})$, con lo cual

$$p[X=3]=\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{120}=0.0083\,.$$

Se realiza el experimento tres veces, exigiéndosele a Félix que repita el éxito (sacar tres peces rollizos), al menos, en dos ocasiones. Denotemos por Y el *número de veces que se obtiene éxito en los tres ensayos independientes*, variable con distribución $\mathcal{B}(3,\frac{1}{120})$.

Entonces,

$$p(\text{Félix coma peces}) = p[Y \geq 2] = p[Y = 2] + p[Y = 3] = 0.000207 .$$

Luego, seguramente, Félix comerá su acostumbrada ración de caracoles troceados.

Ejercicio 8.28.
Teniendo en cuenta que la suma de dos variables aleatorias independientes binomiales, $\mathcal{B}(n_1, p)$ y $\mathcal{B}(n_2, p)$, sigue una distribución también binomial $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$, resulta:

$$\begin{aligned} p[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n] &= \frac{p[X_1 = k, X_1 + X_2 = n]}{p[X_1 + X_2 = n]} = \frac{p[X_1 = k] \cdot p[X_2 = n - k]}{p[X_1 + X_2 = n]} = \\ &= \frac{\binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1 - k} \cdot \binom{n_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n_2 - n + k}}{\binom{n_1+n_2}{n} p^n (1-p)^{n_1+n_2-n}} = \\ &= \frac{\binom{n_1}{k} \cdot \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} , \end{aligned}$$

para $0 \leq k \leq n_1$ y $0 \leq n - k \leq n_2$ o, lo que es lo mismo, $\text{máx}\,(0, n - n_2) \leq k \leq \text{mín}\,(n_1, n)$.

Por tanto, la variable X_1 condicionada a que $X_1 + X_2 = n$ sigue una distribución hipergeométrica de parámetros $n_1 + n_2$, n y $\frac{n_1}{n_1+n_2}$.

Ejercicio 8.29.
a) Aplicando una importante propiedad de los números combinatorios que afirma que

$$\sum_{l=0}^{m} \binom{a}{l} \binom{b}{m-l} = \binom{a+b}{m} ,$$

donde $\binom{s}{l} = 0$, si $s \leq l$, se obtiene:

$$\begin{aligned} p[Y = y] &= \sum_{x=0}^{m} p[X = x, Y = y] = \sum_{x=0}^{m} p[X = x] \cdot p[Y = y \mid X = x] = \\ &= \sum_{x=0}^{m} \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} \cdot \binom{n}{y-x} p^{y-x} (1-p)^{n-y+x} = \\ &= p^y (1-p)^{m+n-y} \sum_{x=0}^{m} \binom{m}{x} \binom{n}{y-x} = \\ &= p^y (1-p)^{m+n-y} \binom{m+n}{y} . \end{aligned}$$

Por tanto, Y sigue una distribución $\mathcal{B}(m + n, p)$.

b) Por otra parte, para cualquier y $(y = 0, 1, \ldots, m+n)$,

$$p[X = x \mid Y = y] = \frac{p[X = x] \cdot p[Y = y \mid X = x]}{p[Y = y]} =$$
$$= \frac{\binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} \cdot \binom{n}{y-x} p^{y-x} (1-p)^{n-y+x}}{\binom{m+n}{y} p^y (1-p)^{m+n-y}} =$$
$$= \frac{\binom{m}{x} \cdot \binom{n}{y-x}}{\binom{m+n}{y}},$$

donde $0 \leq x \leq m$ y $x \leq y \leq x+n$ o, lo que es lo mismo, $\text{máx}\,(0, y-n) \leq x \leq \text{mín}\,(y, m)$.

Entonces, X condicionada por $Y = y$ tiene una distribución hipergeométrica de parámetros $m+n, y$ y $\frac{m}{m+n}$.

Ejercicio 8.30.
Consideremos las variables X_1, *número de unos obtenidos al lanzar un dado 20 veces*, X_2, *número de doses*, ..., y X_6, *número de seises*. Entonces, $(X_1, \ldots, X_6)$ sigue una distribución multinomial $\mathcal{M}(20, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6})$.

La probabilidad pedida es

$$p[X_1 = 8, X_2 = 3, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 4 \mid X_6 = 5],$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{p[X_1 = 8, X_2 = 3, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 4, X_6 = 5]}{p[X_6 = 5]}.$$

Como sabemos que X_6 sigue una distribución $\mathcal{B}(20, 1/6)$, la expresión anterior es igual a

$$\frac{\frac{20!}{8!3!0!0!4!5!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5}{\binom{20}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^{15}} = 0.0000074\,.$$

Ejercicio 8.31.
Cuando realizamos tres extracciones con reemplazamiento, la distribución conjunta de X_1, *número de bolas blancas obtenidas*, X_2, *número de bolas negras*, y X_3, *número de bolas rojas*, es una multinomial $\mathcal{M}\left(3, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}\right)$, siendo $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{12}$ y $\frac{3}{12}$ las probabilidades de obtener bola blanca, negra o roja en cualquiera de las extracciones.

a) Entonces, la función de probabilidad de (X_1, X_2) es

$$p[X_1 = k_1, X_2 = k_2] = p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = 3 - (k_1 + k_2)] =$$
$$= \frac{3!}{k_1! k_2! (3 - k_1 - k_2)!} \left(\frac{4}{12}\right)^{k_1} \left(\frac{5}{12}\right)^{k_2} \left(\frac{3}{12}\right)^{3-k_1-k_2},$$

para cualesquiera números enteros no negativos k_1 y k_2 tales que $k_1 + k_2 \leq 3$. Adviértase que, como existe una relación lineal entre X_1, X_2 y X_3 (en concreto, $X_3 = 3 - (X_1 + X_2)$), la distribución de (X_1, X_2) aporta la misma información probabilística que la de (X_1, X_2, X_3) a pesar de la pérdida de dimensión.

b) Para obtener la distribución de (X_1, X_2) condicionada por $X_3 = 1$, tendremos en cuenta que la distribución marginal de X_3, *número de bolas rojas obtenido* en tres extracciones con reemplazamiento, es una binomial $\mathcal{B}\left(3, \frac{3}{12}\right)$. Entonces, para cualesquiera números enteros k_1 y k_2 tales que $k_1 + k_2 = 2$,

$$p[X_1 = k_1, X_2 = k_2 \mid X_3 = 1] =$$

$$\frac{p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = 1]}{p[X_3 = 1]} = \frac{\dfrac{3!}{k_1!k_2!1!}\left(\frac{4}{12}\right)^{k_1}\left(\frac{5}{12}\right)^{k_2}\left(\frac{3}{12}\right)^{1}}{\binom{3}{1}\left(\frac{3}{12}\right)^{1}\left(\frac{9}{12}\right)^{2}} =$$

$$= \frac{2!}{k_1!\,k_2!}\left(\frac{4}{12}\right)^{k_1}\left(\frac{5}{12}\right)^{k_2}\left(\frac{12}{9}\right)^{2} == \frac{2!}{k_1!\,k_2!}\left(\frac{4}{9}\right)^{k_1}\left(\frac{5}{9}\right)^{k_2},$$

es decir, la distribución de (X_1, X_2) condicionada por $X_3 = 1$ es multinomial $\mathcal{M}\left(2, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$.

Obsérvese que el resultado es razonable dado que, si sabemos que en las tres extracciones ha salido solamente una bola roja, X_1 y X_2 contabilizan el número de bolas blancas y negras, respectivamente, en las dos extracciones en que no se sacó la bola roja, considerando la urna reducida a 4 bolas blancas y 5 negras. Asimismo, adviértase que, dado que $X_1 + X_2 = 2$, la distribución anterior puede describirse de forma más sencilla como

$$p[X_1 = k_1 \mid X_3 = 1] = \binom{2}{k_1}\left(\frac{4}{9}\right)^{k_1}\left(\frac{5}{9}\right)^{2-k_1}, \quad \text{para} \quad k_1 = 0, 1, 2,$$

es decir, como una distribución binomial $\mathcal{B}\left(2, \frac{4}{9}\right)$.

c) Obviamente, la función de probabilidad de X_1, *número de bolas blancas* en tres extracciones con reemplazamiento, es la de una binomial $\mathcal{B}(3, \frac{4}{12})$, cuyos valores están tabulados. La figura 8.4 recoge su representación.

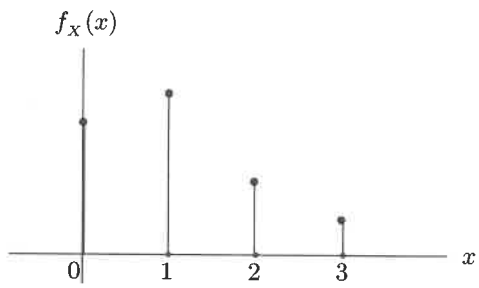


FIG. 8.4.

Ejercicio 8.32.
La distribución conjunta de X_1, X_2 y X_3, número de alumnos de primero, segundo y tercero, respectivamente, a quienes se pregunta la lección en el viaje, es una multinomial $\mathcal{M}(3, 0.5, 0.3, 0.2)$, pues contabilizan el número de ocurrencias de los sucesos A_1, A_2 y A_3,

elegir un alumno de primero, segundo y tercero, respectivamente, al realizar tres elecciones con reemplazamiento (un alumno puede ser elegido varias veces).

a) Probemos que X_1 sigue una distribución binomial. Así, para cualquier valor de k_1 ($k_1 = 0, 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned} p[X_1 = k_1] &= \sum_{k_2=0}^{3} \sum_{\substack{k_3=0 \\ k_2+k_3=3-k_1}}^{3} p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3] = \\ &= \sum_{k_2=0}^{3} \sum_{\substack{k_3=0 \\ k_2+k_3=3-k_1}}^{3} \frac{3!}{k_1!k_2!k_3!} \cdot 0.5^{k_1} 0.3^{k_2} 0.2^{k_3} = \\ &= \frac{3!\, 0.5^{k_1}}{k_1!(3-k_1)!} \sum_{k_2=0}^{3} \sum_{\substack{k_3=0 \\ k_2+k_3=3-k_1}}^{3} \frac{(3-k_1)!}{k_2!k_3!} \cdot 0.3^{k_2} 0.2^{k_3} = \\ &= \binom{3}{k_1} 0.5^{k_1} \sum_{k_1=0}^{3} \binom{3-k_1}{k_2} 0.3^{k_2}\, 0.2^{(3-k_1)-k_2} = \\ &= \binom{3}{k_1} 0.5^{k_1}\, 0.5^{3-k_1}\,, \end{aligned}$$

dado que el último sumatorio es el desarrollo de $(0.3+0.2)^{3-k_1}$. Por tanto, X_1 sigue una distribución binomial $\mathcal{B}(3, 0.5)$. Obsérvese que el resultado es obvio, pues X_1, *número de alumnos de primero elegidos* al realizar 3 elecciones independientes, contabiliza el número de *éxitos*, A_1, en 3 extracciones con reemplazamiento.

b) El resultado anterior facilita la obtención de los coeficientes de correlación, pues sabemos que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 0.5)$ y, de la misma forma, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 0.3)$, con lo cual se hallan de inmediato sus varianzas. Por otra parte, sabemos que Cov $(X_1, X_2) = -mp_1p_2$, es decir, en nuestro caso, Cov , $(X_1, X_2) = -0.45$, con lo cual

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{\text{Cov}\ (X_1, X_2)}{\sqrt{\text{Var}\ m(X_1)\text{Var}\ (X_2)}} = \frac{-0.45}{\sqrt{0.75 \cdot 0.63}} = -0.66\,.$$

Finalmente, dado que $X_1 + X_2 + X_3 = 3$,

$$\begin{aligned} \rho_{X_1,X_2+X_3} &= \frac{\text{Cov}\ (X_1, X_2 + X_3)}{\sqrt{\text{Var}\ (X_1)\text{Var}\ (X_2 + X_3)}} = \frac{\text{Cov}\ (X_1, 3 - X_1)}{\sqrt{\text{Var}\ (X_1)\text{Var}\ (3 - X_1)}} = \\ &= \frac{-\text{Cov}\ (X_1, X_1)}{\sqrt{\text{Var}\ (X_1)\text{Var}\ (X_1)}} = \frac{-\text{Var}\ (X_1)}{\text{Var}\ (X_1)} = -1\,, \end{aligned}$$

sin más que considerar algunas de las principales propiedades de varianzas y covarianzas. Este último resultado podría, también, haberse deducido teniendo en cuenta que entre X_1 y $X_2 + X_3$ hay una relación lineal perfecta ($X_1 = 3 - (X_2 + X_3)$) y, además, la pendiente de la recta es negativa.

Ejercicio 8.33.
Consideremos una urna con N bolas de las cuales N_1 son blancas, N_2 negras y N_3 rojas ($N_1 + N_2 + N_3 = N$). Realizamos m extracciones sin reposición ($m \leq N$). Sean las variables X_1, X_2 y X_3, número de bolas blancas, negras y rojas, respectivamente, extraídas. Entonces, la distribución de (X_1, X_2, X_3) es una hipergeométrica trivariante $\mathcal{H}(N, m, p_1, p_2, p_3)$, donde $p_i = \frac{N_i}{N}$ $(i = 1, 2, 3)$. Calculemos su función de probabilidad, es decir, $p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3]$, para cualesquiera valores enteros k_1, k_2 y k_3 tales que $k_1 + k_2 + k_3 = m$.

Uno de los posibles sucesos en los que se obtiene k_1 bolas blancas, k_2 negras y k_3 rojas es

$$B_1 B_2 \dots B_{k_1} N_{k_1+1} N_{k_1+2} \dots N_{k_1+k_2} R_{k_1+k_2+1} R_{k_1+k_2+2} \dots R_{k_1+k_2+k_3} ,$$

donde B_i, N_i y R_i designan el suceso obtener bola blanca, negra y roja, respectivamente, en la i-ésima extracción. Entonces,

$$\begin{aligned}
&p\left(B_1 B_2 \dots B_{k_1} N_{k_1+1} N_{k_1+2} \dots N_{k_1+k_2} R_{k_1+k_2+1} R_{k_1+k_2+2} \dots R_{k_1+k_2+k_3}\right) = \\
&= p(B_1) \cdot p(B_2 \mid B_1) \cdots p(B_{k_1} \mid B_1 \dots B_{k_1-1}) \cdot p(N_{k_1+1} \mid B_1 \dots B_{k_1}) \cdot \\
&\quad \cdot p(N_{k_1+2} \mid B_1 \dots B_{k_1} N_{k_1+1}) \cdots p(N_{k_1+k_2} \mid B_1 \dots B_{k_1} N_{k_1+1} \dots N_{k_1+k_2-1}) \cdot \\
&\quad \cdot p(R_{k_1+k_2+1} \mid B_1 \dots B_{k_1} N_{k_1+1} \dots N_{k_1+k_2}) \cdot \\
&\quad \cdot p(R_{k_1+k_2+2} \mid B_1 \dots B_{k_1} N_{k_1+1} \dots N_{k_1+k_2} R_{k_1+k_2+1}) \cdots \\
&\quad \cdots p(R_{k_1+k_2+k_3} \mid B_1 \dots B_{k_1} N_{k_1+1} \dots N_{k_1+k_2} R_{k_1+k_2+1} \dots R_{k_1+k_2+k_3-1}) = \\
&= \frac{N_1}{N} \cdot \frac{N_1 - 1}{N-1} \cdots \frac{N_1 - k_1 + 1}{N - k_1 + 1} \cdot \frac{N_2}{N - k_1} \cdot \frac{N_2 - 1}{N - k_1 - 1} \cdots \frac{N_2 - k_2 + 1}{N - k_1 - k_2 + 1} \cdot \\
&\quad \cdot \frac{N_3}{N - k_1 - k_2} \cdot \frac{N_3 - 1}{N - k_1 - k_2 - 1} \cdots \frac{N_3 - k_3 + 1}{N - k_1 - k_2 - k_3 + 1} = \\
&= \frac{\frac{N_1!}{(N_1-k_1)!} \cdot \frac{N_2!}{(N_2-k_2)!} \cdot \frac{N_3!}{(N_3-k_3)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} .
\end{aligned}$$

Ahora bien, éste no es el único suceso en el que se obtienen k_1 bolas blancas, k_2 negras y k_3 rojas; hay tantos como posibles ordenaciones del anterior, siendo todos ellos igualmente probables. El número de estos sucesos es el de las permutaciones con repetición $P_m^{k_1,k_2,k_3}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3] &= \frac{m!}{k_1! k_2! k_3!} \cdot \frac{\frac{N_1!}{(N_1-k_1)!} \cdot \frac{N_2!}{(N_2-k_2)!} \cdot \frac{N_3!}{(N_3-k_3)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} = \\
&= \frac{\binom{N_1}{k_1} \cdot \binom{N_2}{k_2} \cdot \binom{N_3}{k_3}}{\binom{N}{m}} = \frac{\binom{Np_1}{k_1} \cdot \binom{Np_2}{k_2} \cdot \binom{Np_3}{k_3}}{\binom{N}{m}} ,
\end{aligned}$$

con $k_i = 0, 1, \dots, m$ y $k_1 + k_2 + k_3 = m$.

El lector puede llegar a este mismo resultado contabilizando el número de casos favorables y el número de casos posibles y equiprobables, y aplicando la regla de LAPLACE (véase el ejercicio 8.25).

Ejercicio 8.34.
Consideremos las variables X_1, *número de catedráticos elegidos para la comisión*, X_2, *número de titulares*, X_3, *número de asociados*, X_4, *número de becarios*, y X_5, *número de*

alumnos. La distribución de $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ es una hipergeométrica multivariante $\mathcal{H}\left(14, 5, \frac{2}{14}, \frac{6}{14}, \frac{4}{14}, \frac{1}{14}, \frac{1}{14}\right)$, pues las cinco elecciones entre los 14 miembros del departamento lo son sin reemplazamiento (cada miembro sólo puede ser elegido una vez). Entonces,

$$\begin{aligned} & p[X_1 = 1, X_2 = 2, X_5 = 1] = \\ = p[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1] + & \\ + p[X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 1] = & \\ = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{1}\binom{1}{0}\binom{1}{1}}{\binom{14}{5}} + \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{0}\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{14}{5}} = & \\ = 0.0749\,. & \end{aligned}$$

Ejercicio 8.35.
En este caso, al realizar las tres extracciones sin reemplazamiento en una urna que contiene 4 bolas blancas, 5 negras y 3 rojas, la distribución conjunta de X_1, *número de bolas blancas obtenidas*, X_2, *número de bolas negras*, y X_3, *número de bolas rojas*, es una hipergeométrica trivariante $\mathcal{H}\left(12, 3, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{3}{12}\right)$.

a) La función de probabilidad de (X_1, X_2) es

$$p[X_1 = k_1, X_2 = k_2] = p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = 3 - (k_1 + k_2)] = \frac{\binom{4}{k_1}\binom{5}{k_2}\binom{3}{3-k_1-k_2}}{\binom{12}{3}}\,,$$

para valores enteros k_1 y k_2 tales que $k_1 + k_2 \leq 3$. Obsérvese que, al igual que en el ejercicio 8.31, la distribución de (X_1, X_2) proporciona la misma información probabilística que la de (X_1, X_2, X_3), ya que existe una relación lineal entre estas variables, $X_1 + X_2 + X_3 = 3$.

b) Calculemos la distribución de (X_1, X_2) condicionada por $X_3 = 1$, teniendo en cuenta que la distribución de X_3, *número de bolas rojas obtenidas* al realizar tres extracciones sin reemplazamiento, es una hipergeométrica univariante $\mathcal{H}(12, 3, \frac{3}{12})$. Entonces,

$$\begin{aligned} p[X_1 = k_1, X_2 = k_2 \mid X_3 = 1] &= \frac{p[X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = 1]}{p[X_3 = 1]} = \\ &= \frac{\frac{\binom{4}{k_1}\binom{5}{k_2}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}}{\frac{\binom{3}{1}\binom{9}{2}}{\binom{12}{3}}} = \frac{\binom{4}{k_1}\binom{5}{k_2}}{\binom{9}{2}}\,, \end{aligned}$$

para cualesquiera valores enteros k_1 y k_2 $(k_1 + k_2 = 2)$. Esta función de probabilidad es la de una hipergeométrica multivariante $\mathcal{H}(9, 2, \frac{4}{9}, \frac{5}{9})$.

Este resultado es razonable, pues X_1 y X_2 contabilizan el número de bolas blancas y negras, respectivamente, obtenidas en dos extracciones sin reemplazamiento entre un total de 4 bolas blancas y 5 negras. Esta distribución puede describirse únicamente en términos de una de las variables, por ejemplo, X_1.

c) La variable X_1 sigue una distribución hipergeométrica univariante $\mathcal{H}(12, 3, 4/12)$, cuya función de probabilidad es

$$p[X_1 = k] = \frac{\binom{4}{k}\binom{8}{3-k}}{\binom{12}{3}} .$$

Dando valores a k, se obtiene $p[X_1 = 0] = \frac{14}{55}$, $p[X_1 = 1] = \frac{28}{55}$, $p[X_1 = 2] = \frac{12}{55}$ y $p[X_1 = 3] = \frac{1}{55}$, cuya representación gráfica se muestra en la figura 8.5.

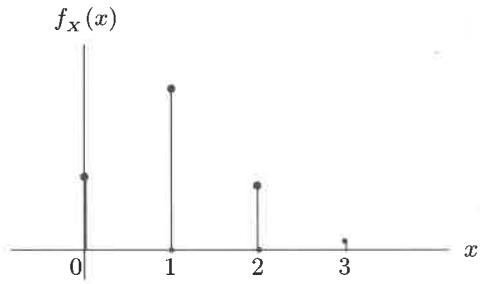


FIG. 8.5.

Ejercicio 8.36.
a) El experimento de Bernoulli recoge el lanzamiento de un tiro libre por parte del jugador de baloncesto, donde los dos posibles resultados son *conseguir canasta* (éxito) y *no conseguir canasta* (fracaso). Podemos asociar al experimento la variable de Bernoulli, X, *número de aciertos al realizar un tiro libre*, cuya distribución es

$$X : \left| \begin{array}{ll} 1 & p[X = 1] = p(\text{canasta}) = 0.8 \\ 0 & p[X = 0] = p(\text{no canasta}) = 0.2 \end{array} \right.$$

b) La variable Y, *número de aciertos en los 5 lanzamientos*, es una binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0.8$, con lo cual

$$p[Y \geq 2] = \sum_{k=2}^{5} p[Y = k] = \sum_{k=2}^{5} \binom{5}{k} 0.8^k \cdot 0.2^{5-k} = 0.9933 .$$

El lector aligerará los cálculos, si tiene en consideración el suceso complementario, es decir,

$$p[Y \geq 2] = 1 - p[Y \leq 1] = 1 - \sum_{k=0}^{1} \binom{5}{k} 0.8^k \cdot 0.2^{5-k} = 0.9933 .$$

Planteada esta probabilidad en términos del *número de fallos*, binomial con $n = 5$ y $p = 0.2$, pueden utilizarse las correspondientes tablas.

c) Denotando por Z la variable *número de canastas en tiros desde 10 metros*, hemos de calcular $p[Z = 2]$. Considerando que la distribución de esta variable es una distribución de Poisson de parámetro 1 resulta:

$$p[Z = 2] = e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} = 0.1839 .$$

d) Estamos interesados en la esperanza de la variable U, *número de tiros libres no encestados antes del primero encestado*, variable cuya distribución es geométrica de parámetro $p = 0.8$. Basta sustituir en la expresión de la esperanza para obtener:

$$E(U) = \frac{0.2}{0.8} = 0.25 .$$

e) En este caso, la variable V, *número de canastas erradas antes del séptimo acierto*, sigue una distribución binomial negativa con $p = 0.8$ y $r = 7$.La probabilidad que nos interesa es, por tanto,

$$p[V = 5] = \binom{5+7-1}{5} 0.2^5 \cdot 0.8^7 = 0.031 .$$

f) La variable S, *número de extranjeros elegidos*, sigue una distribución hipergeométrica con parámetros $N = 8$, $n = 2$ y $p = \frac{1}{4}$, con lo cual, la probabilidad pedida es

$$p[S = 1] = \frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{\binom{8}{2}} = 0.428 .$$

g) Consideremos la variable tridimensional (X_1, X_2, X_3), donde cada una de sus componentes representa el número de encestes de los jugadores A, B y C, respectivamente. La variable (X_1, X_2, X_3) tiene una distribución multinomial con $n = 9$, $p_1 = 0.3$, $p_2 = 0.3$ y $p_3 = 0.4$. Por tanto, la referida probabilidad es

$$p[X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4] = \frac{9!}{2!\,3!\,4!} \cdot 0.3^2 \cdot 0.3^3 \cdot 0.4^4 = 0.078 .$$

h) Si consideramos la variable (Y_1, Y_2, Y_3), donde cada componente recoge el número de pivotes, bases y aleros, respectivamente, que forman parte de la comisión, dicha variable tiene una distribución hipergeométrica multivariante con $N = 12$, $n = 4$, $N_1 = 3$, $N_2 = 3$ y $N_3 = 6$. Por tanto,

$$p[Y_1 = 2, Y_2 = 2, Y_3 = 0] = \frac{\binom{3}{2}\binom{3}{2}\binom{6}{0}}{\binom{12}{4}} = 0.018 .$$

Capítulo 9

MODELOS DE DISTRIBUCIONES CONTINUAS UNIVARIANTES

Describamos brevemente las principales distribuciones univariantes continuas.

• Una variable aleatoria, X, sigue una **distribución uniforme continua** de parámetros a y b $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$, si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

hecho que expresaremos abreviadamente como $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$.

La esperanza y varianza de esta variable son:

$$E(X) = \frac{b+a}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = \frac{(b-a)^2}{12} ,$$

y su función característica

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Dos propiedades de interés son:

1. Si X sigue una distribución $\mathcal{U}(a, b)$, la variable $Y = cX + d$, con $c \neq 0$, sigue, también, una distribución uniforme, en el intervalo $(c\,a + d,\ c\,b + d)$, si $c > 0$, o en $(c\,b + d,\ c\,a + d)$, si $c < 0$.
2. Si X es una variable continua, siendo F_X estrictamente creciente en el campo de variación de X, entonces, $Y = F_X(X)$ tiene una distribución $\mathcal{U}(0, 1)$.

Las tablas de números aleatorios (de las que presentamos una en el anexo final de este libro) recogen realizaciones independientes de una variable uniforme en el intervalo $(0, a)$, donde a es una cantidad que depende del número de cifras que tengan los números aleatorios. Así, si son de cinco cifras, como la que aparece en este libro, el valor de a es cien mil; si son de cuatro cifras, a vale diez mil. A partir de las tablas de números aleatorios, aplicando las dos propiedades anteriores, pueden obtenerse realizaciones de una variable uniforme cualquiera, así como de cualquier otra distribución de probabilidades.

• Una variable aleatoria, X, sigue una **distribución normal** de parámetros μ y σ ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, \qquad \text{para} \quad -\infty < x < \infty .$$

Una variable aleatoria normal se designa por $N(\mu, \sigma)$ y también recibe el nombre de distribución de LAPLACE-GAUSS.

Una de las más importantes, dentro de la familia de distribuciones normales, es la distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, es decir, la distribución $N(0, 1)$, cuya función de densidad es

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad \text{para} \quad -\infty < z < \infty .$$

Esta distribución, que suele designarse por Z, se conoce como **distribución normal estándar** o **tipificada**. Su importancia deriva del hecho de que puede obtenerse una variable aleatoria normal estándar a partir de una normal cualquiera. En concreto, si X es una variable aleatoria $N(\mu, \sigma)$, entonces $\frac{X-\mu}{\sigma}$ es una variable con distribución $N(0, 1)$.

La función de distribución de la normal estándar, que denotaremos por $\Phi(z)$, está tabulada (véase el anexo final de este libro). A partir de ella pueden obtenerse probabilidades para una variable normal cualquiera.

Las principales características de esta variable son:

$$E(X) = \mu \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = \sigma^2$$

y su función característica es

$$\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}} .$$

Las combinaciones lineales de variables normales independientes son, asimismo, normales. Así, si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes, donde $X_j \hookrightarrow N(\mu_j, \sigma_j)$, entonces,

$$Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n + b \hookrightarrow N\left(a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n + b,\ \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2}\right)$$

De esta importante propiedad se deduce que la suma de variables aleatorias normales e independientes es una variable aleatoria normal y que la media muestral de variables independientes e igualmente distribuidas con distribución $N(\mu, \sigma)$ también es una normal, en concreto, $\overline{X} \hookrightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

• Una variable aleatoria, X, tiene una **distribución logarítmico-normal** de parámetros μ y σ ($\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$), si la variable $Y = \ln X$ sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Se denota abreviadamente como $X \hookrightarrow \log N(\mu, \sigma)$. La función de densidad de la distribución logarítmico-normal es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

y sus principales momentos,

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = e^{2\mu} \cdot (e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}) .$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables independientes, donde $X_i \hookrightarrow \log N(\mu_i, \sigma_i)$, entonces,

$$Y = X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n} \hookrightarrow \log N \left(a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n, \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2} \right) .$$

De esta propiedad se deduce que la distribución logarítmico-normal es reproductiva para el producto y que la media geométrica de variables $\log N(\mu_i, \sigma_i)$ independientes es, también, logarímico normal; en concreto,

$$\overline{X}_G = \sqrt[n]{X_1 \cdots X_n} \hookrightarrow \log N \left(\frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{n}, \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2}}{n} \right) .$$

• Una variable aleatoria, X, sigue una **distribución gamma** de parámetros a y p ($a, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $p > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} \cdot e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\Gamma(p)$ es la función euleriana gamma, $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$. Esta distribución se denota abreviadamente como $X \hookrightarrow \gamma(a, p)$.

Sus principales momentos son

$$E(X) = \frac{p}{a} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (X) = \frac{p}{a^2}$$

y su función característica:

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-p} .$$

Algunas propiedades de interés son:

1. La distribución gamma es reproductiva; en concreto, si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes y $X_j \hookrightarrow \gamma(a, p_j)$, entonces la variable $Y = X_1 + \cdots + X_n$ sigue una distribución $\gamma(a, p_1 + \cdots + p_n)$.
2. Si X es una variable aleatoria con distribución $\gamma(a, p)$, la variable $k \cdot X$, donde $k > 0$, tiene una distribución $\gamma\left(\frac{a}{k}, p\right)$.

De las dos propiedades anteriores se deduce que la media muestral de variables independientes e igualmente distribuidas, con distribución $\gamma(a, p)$, es una gamma; en concreto, $\overline{X} \hookrightarrow \gamma(an, pn)$.

• Una variable aleatoria, X, sigue una **distribución exponencial negativa** de parámetro a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Denotaremos abreviadamente esta distribución como $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

La distribución exponencial negativa es un caso particular de la distribución gamma cuando el parámetro p vale uno, es decir, $\mathcal{E}(a) \equiv \gamma(a, 1)$.

Sus principales momentos, así como su función característica, son

$$E(X) = \frac{1}{a}\,, \quad \text{Var}\ (X) = \frac{1}{a^2} \qquad \text{y} \qquad \varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{a}\right)^{-1} .$$

Algunas propiedades de interés son:

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, entonces $Y = X_1 + \cdots + X_n$ sigue una distribución $\gamma(a, n)$.
2. La distribución exponencial cumple la propiedad del *olvido* o de la *falta de memoria*; es decir, si X es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{E}(a)$,

$$p[X > s + t \mid X > s] = p[X > t] \qquad \text{con} \quad s, t \in \mathbb{R}\,,\ s, t > 0\,.$$

Esta propiedad caracteriza a las variables exponenciales entre las continuas positivas.

• Una variable aleatoria, X, tiene una **distribución beta** de parámetros p y q ($p, q \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $q > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(p,q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde $\beta(p,q)$ es la función euleriana beta, $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1}\, dx$.

La función de densidad puede también escribirse como

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)} \cdot x^{p-1} \cdot (1-x)^{q-1} & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Esta distribución se denota abreviadamente como $X \hookrightarrow \beta(p,q)$.

Los principales momentos son

$$E(X) = \frac{p}{p+q} \qquad \text{y} \qquad \text{Var}\ (X) = \frac{pq}{(p+q+1)\,(p+q)^2}\,.$$

• Una variable, X, sigue una **distribución de Pareto** de parámetros α y x_0 ($\alpha, x_0 \in \mathbb{R}, \alpha > 0, x_0 > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Sus principales características son:

$$E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} \quad (\text{si } \alpha > 1) \qquad \text{y} \qquad \text{Var}\ (X) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2} \quad (\text{si } \alpha > 2)\,.$$

• Una variable aleatoria, X, tiene una **distribución de Cauchy** de parámetros α y β ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $-\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta \cdot \pi[1 + (\frac{x-\alpha}{\beta})^2]}\,, \qquad \text{para} \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

Para una distribución de Cauchy no existe la esperanza y, consecuentemente, tampoco existen los momentos de otro tipo y orden. La función característica de una distribución de Cauchy es

$$\varphi_X(t) = e^{i\alpha t - \beta|t|}\,.$$

Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables independientes e igualmente distribuidas con distribución de Cauchy estándar ($\alpha = 0$, $\beta = 1$), la variable media muestral, $\overline{X}$, también sigue una distribución de Cauchy estándar.

• Una variable aleatoria, X, sigue una **distribución logística** de parámetros α y β ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, -\infty < \alpha < \infty$, $\beta > 0$), si su función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta \cdot \left(1 + e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)^2}, \qquad \text{para} \qquad -\infty < x < \infty .$$

Las principales características son:

$$E(X) = \alpha \quad \text{y} \quad \text{Var}\ (X) = \frac{\beta^2 \pi^2}{3} .$$

Ejercicios propuestos

9.1. En un trayecto urbano hay dos semáforos que se cierran cada 2 minutos, permaneciendo en esta situación durante medio minuto. Dichos semáforos están sincronizados de modo que el segundo de ellos se pone rojo a los 2.5 minutos de abrirse el primero.

Si un conductor ha tenido que detenerse en el primero, y el tiempo en minutos que tarda en recorrer la distancia que los separa sigue una distribución uniforme en el intervalo $(1, 4)$, ¿cuál es la probabilidad de que tenga que pararse también en el segundo semáforo?

9.2. Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Compruébese que $E\left(\frac{1}{X}\right)$ no existe.

9.3. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{U}(0, 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ esté comprendida entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$?

9.4. Se eligen al azar e independientemente dos valores X e Y del intervalo $(0, 1)$. Se definen las siguientes distancias: $U = |X - Y|$ y $V = (X - Y)^2$. Calcúlense las esperanzas y varianzas de U y V.

9.5. Se elige al azar un punto X en el intervalo $(0, 2)$. Si el punto escogido es x, se escoge al azar otro punto Y en el intervalo $(0, x^2)$.

a) Sabiendo que el segundo punto elegido ha resultado ser el uno, calcúlese el valor esperado en la primera elección.

b) Hállese $p[X^2 < 2Y]$.

9.6. Se sabe que el tiempo de vida, en años, de unas bombillas es una variable continua, X, con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Simúlese el tiempo de vida de ocho bombillas, para mostrar a un comprador el comportamiento que de las mismas puede esperarse.

9.7. Realícese una simulación de ocho lanzamientos independientes de un dado perfecto.

9.8. El incremento anual de los salarios (en porcentaje) pactado en convenios colectivos para el bienio 1994-1995 es una variable X con distribución $\mathcal{U}(0,5)$. Todos los convenios se han firmado con la siguiente cláusula de revisión: si la tasa de variación del IPC de 1994 supera el incremento salarial pactado, los salarios nominales subirán en 1995 lo necesario para que no haya una pérdida en el salario real. El gobierno prevé que la inflación para 1994 seguirá una distribución, cuya función de densidad es

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{-2y+10}{25} & \text{si } 0 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hállese el incremento esperado de los salarios nominales para 1995.

9.9. En un proceso en serie se fabrican botellas de cola cuya capacidad responde a una distribución normal de media 1 litro y desviación típica 0.01. Se considera inutilizable toda botella con capacidad inferior a 0.99 litros o superior a 1.1 litros. ¿Qué porcentaje de botellas será rechazado?

9.10. Sea Z una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Demuéstrese que la variable $X = \sigma Z + \mu$, donde μ y σ son dos números reales cualesquiera ($\sigma > 0$), sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$.

9.11. El número de horas que un estudiante necesita para aprender un tema de historia es una variable aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma)$. Si el 84.13 % de los alumnos emplea más de tres horas y sólo el 2.28 % más de nueve, ¿cuánto valen μ y σ?

¶ **9.12.** Sea X una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$ y sea $Z = F_X(X)$. Demuéstrese que $E(Z) = \frac{1}{2}$.

9.13. El peso, en gramos, de los recién nacidos en un hospital está distribuido normalmente con media 3.000 y desviación típica σ. ¿Qué valor tiene σ, si el 98 % de los bebés tiene un peso comprendido entre 2.5 y 3.5 kilos?

9.14. Sea X una variable aleatoria con distribución $N(0,\sigma)$. ¿Es $\sqrt{X^2}$ una variable normal?

9.15. La cotización en Bolsa de un cierto título se considera una variable aleatoria normalmente distribuida con parámetros desconocidos, pero se dispone de la siguiente información:

— Existe un 2,5 % de probabilidad de que la cotización supere el índice 400.

— Hay un 50 % de probabilidad de que no llegue a superarse el índice 380.

Según los datos anteriores, ¿cuál es la probabilidad de que en un cierto momento la cotización se encuentre entre 385 y 395?

9.16. Sean $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ variables aleatorias independientes, normales, de media μ y varianza 4. Sean $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ las medias muestrales de las variables X_i e Y_i, respectivamente. ¿Qué valor debe tomar n para que $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ difieran entre sí en menos de una unidad con una probabilidad de al menos 0.95?

9.17. Una compañía de seguros desea contratar dos nuevos agentes. Para ello realiza un proceso de selección sucesiva de los candidatos, consistente en un examen tipo test que, una vez superado, permitirá a los preseleccionados presentarse a una entrevista personal.

Para aprobar el test es necesario tener una puntuación mayor que 6. La puntuación de un individuo es una variable normal de media 4 y desviación típica 2. Además, se sabe que las mujeres pasan con éxito la entrevista el 80 % de las veces, siendo el porcentaje de 70 para el caso de los hombres.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sean seleccionados como agentes el segundo y tercer candidato?

b) Si ha sido necesario examinar a 50 candidatos antes de elegir al segundo agente, ¿cuál es la probabilidad de que se haya examinado a 20 antes de elegir al primero?

9.18. Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $N(2,1)$. Hállese el valor de n para que se cumpla:

$$p\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 59.8\right] = 0.975 .$$

9.19. Sea X una variable aleatoria $N(0,1)$. Obténgase la distribución de la variable aleatoria $Y = e^X$.

9.20. Los ingresos mensuales, en miles de pesetas, de los individuos de un país siguen una distribución logarítmico-normal de parámetros $\mu = 3$ y $\sigma = 2$. ¿Qué porcentaje tiene una renta superior a la media?

9.21. Sea X una variable aleatoria con distribución logarítmico-normal de parámetros μ y σ. Obténgase la moda y la mediana y compárense las tres medidas de posición central.

9.22. Una empresa produce un cierto tipo de piezas y, una vez vendidas, se hace cargo del coste de la primera reparación. El director del departamento de ventas ha encargado un estudio para determinar la cantidad que ha de costar la hora de reparación de dichas piezas para que, siendo el coste de fabricación 1.000 pesetas, el precio de venta 5.000 y la distribución del tiempo de reparación una gamma de parámetros $a = 0.5$ y $p = 2$, el beneficio medio sea de 3.000 pesetas.

a) ¿Cuál ha de ser el coste de la hora de reparación?

b) Fijado este coste, ¿cuál es la probabilidad de que el beneficio no supere las 2.000 pesetas?

9.23. Estúdiese el crecimiento y decrecimiento de la función de densidad de una distribución gamma y obténgase su moda.

9.24. El tiempo, en horas, empleado diariamente en transporte por los trabajadores de una gran ciudad, sigue una distribución gamma con parámetros $a = 2$ y $p = 2$.

a) Calcúlese la probabilidad de que un trabajador emplee más de media hora en transporte.

b) Los trabajadores de un barrio periférico emplean al menos una hora, ¿cuál es la probabilidad de que no superen la hora y media?

c) Determínese el tiempo mínimo que emplea el 50 % de los trabajadores que más tiempo pierden en transporte.

9.25. Una compañía aseguradora ofrece a sus clientes una póliza de accidente con las siguientes características:

— La compañía abona la totalidad del siniestro hasta una cuantía de 3.000 pesetas.

— Si la cuantía está comprendida entre 3.000 y 70.000 pesetas, abona íntegramente las 3.000 primeras y la mitad de lo que exceda.

— Si la cantidad supera las 70.000 pesetas, paga 36.500 pesetas.

Se ha estimado que la cuantía de daños por accidente, en miles de pesetas, sigue una distribución gamma de parámetros $a = 0.10$ y $p = 2$. Hallése la cantidad que la compañía espera pagar por accidente.

9.26. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial negativa. Calcúlese $p[X > E(X)]$ y obténgase la mediana y el coeficiente de variación.

9.27. Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial negativa.

a) Calcúlese $p[|X - \mu| \geq k \cdot \sigma]$ para $k > 0$.

b) Obténgase una cota superior de la probabilidad anterior utilizando la desigualdad de CHEBYSHEV.

9.28. Una fábrica utiliza dos métodos para la producción de bombillas: el 70 % de ellas las fabrica por el método A y el resto por el método B. La duración de las bombillas sigue una distribución exponencial negativa de media 80 o 100 horas, según se utilice el método A o el B.

Se toman 10 bombillas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 6 de ellas duren al menos 90 horas?

9.29. El coste de una cierta pieza es de 25 pesetas. El precio de venta depende del diámetro interior de la pieza, X, variable exponencial negativa de media λ. Si el diámetro, expresado en milímetros, es mayor que 3 o menor que 1, se desecha la pieza, y si el diámetro está comprendido entre estos límites, se vende al precio de 40 pesetas. La máquina que produce la pieza tiene un dispositivo que permite ajustar el diámetro medio de las piezas, λ. Hállese el valor de λ que maximice el beneficio medio.

9.30. El tiempo, en días, que tarda una empresa en servir los pedidos a sus clientes es una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de media 5 días. Han pasado algunos días y un cliente aún no ha recibido su pedido. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar al menos 2 días más?

9.31. En un laboratorio, el 40 % de los ratones sometidos a un cierto estímulo son machos. El tiempo, en minutos, que un ratón tarda en responder al estímulo es una variable aleatoria exponencial negativa, siendo el tiempo medio de respuesta el doble en los machos que en las hembras.

Se toma un ratón al azar y se le somete al experimento. Si la probabilidad de que tarde más de 4 minutos en responder es 0.8, obténganse los tiempos medios de respuesta para los machos y hembras.

9.32. El tiempo de vida de una válvula es una variable exponencial negativa de media λ. Elegidas dos válvulas al azar, y suponiendo que operan independientemente, se sabe que la probabilidad de que cada una de las dos duren al menos 4 horas es de 0.252. Calcúlese $E(U)$, siendo U la variable que representa el tiempo de vida de la primera pieza que falla en el par.

9.33. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Para $i = 1, 2$, se definen las variables $Z_i = -2 \ln (X_i)$. Determínese:

a) La distribución de Z_i.

b) La probabilidad del suceso $[Z_1 + Z_2 \leq 4]$.

¶ **9.34.** La Compañía Telefónica cobra 80 pesetas por cada minuto o fracción de llamada interurbana. Hállese el ingreso esperado por llamada, si se ha evaluado que la duración de una llamada, en minutos, sigue una distribución exponencial negativa de parámetro uno.

9.35. Dada una variable aleatoria X con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, demuéstrese que la variable aleatoria $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$ sigue una distribución $\mathcal{E}(1)$.

9.36. La variable aleatoria X_t, número de clientes que acuden a un establecimiento en un intervalo de tiempo $(0,t)$, sigue una distribución de Poisson de parámetro λt. Sea T el tiempo de espera hasta la llegada del primer cliente.

a) Hállese $p[T > t]$.

b) ¿Cuál será el tiempo esperado hasta la llegada del primer cliente?

9.37. Sea X una variable aleatoria con distribución beta, $\beta(2,2)$. Obténgase la media, la moda, la mediana y el coeficiente de variación.

9.38. La proporción de alumnos de una Facultad que aprueban la asignatura de Estadística cada año, es una variable aleatoria con distribución beta de parámetros $p = 3$ y $q = 2$.

a) Calcúlese la probabilidad de que, en un año cualquiera, suspendan menos del 20 %.

b) Hállese la probabilidad de que la proporción de estudiantes que aprueban en un año sea menor que la proporción media de aprobados.

9.39. Una variable aleatoria X tiene como función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^6 & x \geq x_0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Determínese el valor de x_0.

b) ¿Qué distribución sigue X?

c) Calcúlese $E(X)$.

9.40. En una distribución de Pareto con $\alpha \geq 3$, si x_0 se mantiene constante y crece α, ¿qué ocurre con la esperanza y la varianza? Realícese el mismo análisis cuando α se mantiene constante y crece x_0.

9.41. Sea X una variable aleatoria con distribución de Pareto de parámetros α y x_0.

a) Obténgase el coeficiente de variación y la mediana.

b) Calcúlese $p[X < E(X)]$.

9.42. Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy estándar.

a) Demuéstrese que la variable $Y = \beta \cdot X + \alpha$, donde α y β son dos números reales cualesquiera ($\beta > 0$), sigue una distribución de Cauchy de parámetros α y β.

b) Obténgase la función de distribución de una variable aleatoria con distribución de Cauchy de parámetros α y β.

9.43. Hállese la moda y la mediana de una distribución de Cauchy.

9.44. Sea X una variable aleatoria con distribución de Cauchy estándar. Se considera la variable aleatoria $Y = \frac{1}{X}$; obténgase $E(Y)$.

9.45. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución $N(0,1)$. Demuéstrese que $Z = \frac{X}{Y}$ sigue una distribución de Cauchy.

9.46. Demuéstrese que la función de densidad de una distribución logística es simétrica respecto de α. Obténgase la moda y la mediana.

9.47. Hállese el intervalo intercuartílico de una distribución logística estándar y compárese con el de una distribución de Cauchy estándar.

9.48. Calcúlense los deciles de una distribución logística estándar y compárense con los de la distribución $N(0,1)$.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 9.1.
Puesto que el segundo semáforo se cierra a los 2.5 minutos de ponerse verde el primero y permanece en rojo 0.5 minutos, el conductor no tendrá más remedio que parar su coche cuando emplee un tiempo entre 2.5 y 3 minutos en ir de uno a otro. Es decir, denotando por X la variable que designa este tiempo, la probabilidad pedida es

$$p[2.5 < X < 3] = \int_{2.5}^{3} \frac{1}{3}\, dx = 0.166 .$$

Ejercicio 9.2.
La variable X sigue una distribución $\mathcal{U}(0,1)$, luego su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para que exista la esperanza de $\frac{1}{X}$, la esperanza de su valor absoluto, $E\left(\left|\frac{1}{X}\right|\right)$ (que, en este caso, coincide con $E\left(\frac{1}{X}\right)$, pues X sólo toma valores positivos), tiene que ser finita.

Así,

$$E\left(\left|\frac{1}{X}\right|\right) = E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{x=0}^{1} \frac{1}{x} \cdot 1\, dx = [\ln x]_{x=0}^{1} .$$

Esta integral no es convergente, pues no toma un valor finito, dado que $\ln x$ tiende hacia $-\infty$ cuando x tiende hacia 0. Por tanto, la esperanza de $\frac{1}{X}$ no existe.

Ejercicio 9.3.
Dado que las variables X_1 y X_2 son independientes su función de densidad conjunta es

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1 & 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La probabilidad pedida

$$p\left[\frac{1}{4} < \overline{X} < \frac{3}{4}\right] = p\left[\frac{1}{4} < \frac{X_1 + X_2}{2} < \frac{3}{4}\right] = p\left[\frac{1}{2} < X_1 + X_2 < \frac{3}{2}\right] ,$$

se obtiene integrando la función de densidad conjunta, $f_{(X_1,X_2)}$, en el recinto sombreado de la figura 9.1.

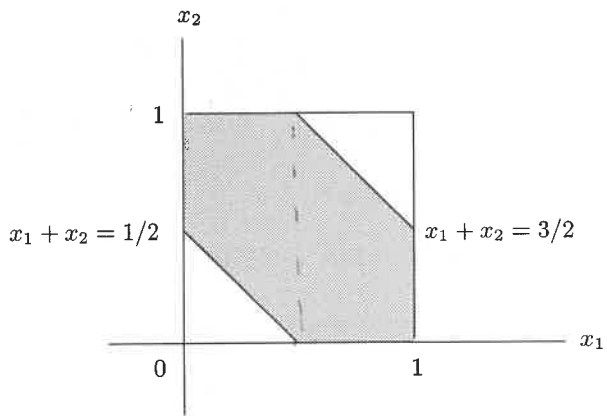


FIG. 9.1.

Así,

$$p\left[\frac{1}{4} < \overline{X} < \frac{3}{4}\right] = = \int_{x_1=0}^{\frac{1}{2}} \int_{x_2=\frac{1}{2}-x_1}^{1} 1\, dx_2 dx_1 + \int_{x_1=\frac{1}{2}}^{1} \int_{x_2=0}^{\frac{3}{2}-x_1} 1\, dx_2 dx_1 =$$

$$= \int_{x_1=0}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + x_1\right) dx_1 + \int_{x_1=\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{3}{2} - x_1\right) dx_1 = \frac{3}{4} .$$

Ejercicio 9.4.
Como X e Y siguen una distribución $\mathcal{U}(0,1)$, y son independientes, su función de densidad conjunta es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E(U) = E(|X-Y|) &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} |x-y| \cdot 1 \, dydx = \\ &= \int\int_{\{x>y\}} (x-y)\, dydx + \int\int_{\{x\leq y\}} (y-x)\, dydx = \\ &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} (x-y)\, dydx + \int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{1} (y-x)\, dydx = \\ &= \int_{x=0}^{1} \frac{x^2}{2}\, dx + \int_{x=0}^{1} \left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} E(U^2) = E[|X-Y|^2] &= E[(X-Y)^2] = \\ &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (x-y)^2 \cdot 1 \, dydx = \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) dx = \frac{1}{6}\,. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{Var}\ (U) = E(U^2) - [E(U)]^2 = \frac{1}{18}\,.$$

En cuanto a la variable V, su esperanza ya está calculada, porque

$$E(V) = E[(X-Y)^2] = E(U^2) = \frac{1}{6}\,.$$

Para hallar su varianza, se necesita el momento central de orden 2,

$$\begin{aligned} E(V^2) = E[(X-Y)^4] &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} (x-y)^4 \, dydx = \\ &= \int_{x=0}^{1} \left(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{5}\right) dx = \frac{1}{15}\,, \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene de inmediato que

$$\text{Var}\ (V) = \frac{7}{180}\,.$$

Ejercicio 9.5.
La *elección del primer punto*, X, sigue una distribución $\mathcal{U}(0,2)$, es decir, su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Elegido el primer punto, x, se elige al azar un segundo punto, Y, en el intervalo $(0, x^2)$. Por tanto, la distribución de Y condicionada por $X = x$ es una uniforme $\mathcal{U}(0, x^2)$, con lo que su función de densidad, para los valores de x entre 0 y 2, es

$$f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} 1/x^2 & 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Podemos, entonces, obtener la función de densidad conjunta de X e Y,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{(Y \mid X=x)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & 0 < x < 2, \quad 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La gráfica de la figura 9.2 muestra el recinto en que la función de densidad de (X, Y) es distinta de cero.

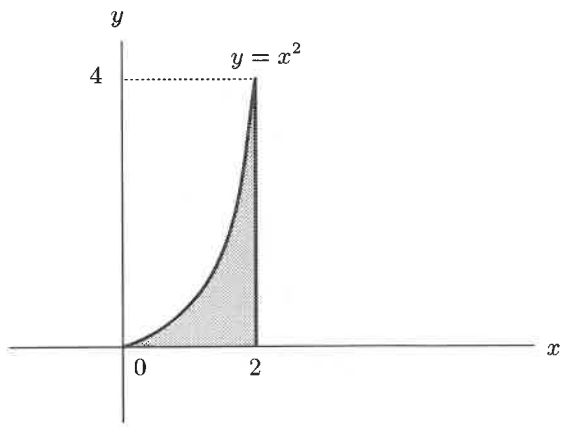


FIG. 9.2.

La función de densidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = \int_{x=\sqrt{y}}^{2} \frac{1}{2x^2}\, dx = \left[-\frac{1}{2x}\right]_{x=\sqrt{y}}^{2} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{4},$$

si $0 < y < 4$, anulándose en el resto.

a) Para $0 < y < 4$, valores posibles de la variable Y, la función de densidad de X condicionada por $Y = y$ resulta:

$$f_{(X \mid Y=y)}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{y}}{x^2(2-\sqrt{y})} & \sqrt{y} < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

En particular,

$$f_{(X \mid Y=1)}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2} & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

con lo cual el valor esperado en la primera elección, sabiendo que el segundo punto elegido fue el uno, es

$$E(X \mid Y = 1) = \int_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot f_{(X \mid Y=1)}(x)\, dx = \int_{x=1}^{2} x \cdot \frac{2}{x^2}\, dx = [2 \ln x]_{x=1}^{2} = 2 \ln, 2 = 1.39 .$$

b) La zona sombreada en la figura 9.3 muestra el recinto en que hay que integrar $f_{(X,Y)}$ para obtener la probabilidad pedida.

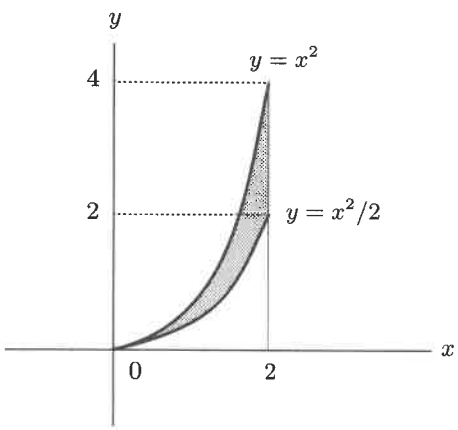


FIG. 9.3.

Entonces,

$$p[X^2 < 2Y] = \int_{x=0}^{2} \int_{y=\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{1}{2x^2}\, dy\, dx = \frac{1}{4} \int_{x=0}^{2} dx = \frac{1}{2} .$$

Ejercicio 9.6.
Integrando la función de densidad, se obtiene la función de distribución de X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Sabemos que la transformada de X por la función F_X sigue una distribución uniforme; concretamente,

$$Y = F_X(X) = \begin{cases} 1 - e^{-0.2X} & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases}$$

es una variable uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Obsérvese que, puesto que X es siempre positiva, esta transformación puede escribirse como

$$Y = 1 - e^{-0.2X} .$$

Consecuentemente,

$$X = F_X^{-1}(Y) ,$$

donde F_X^{-1} es la transformación inversa de la función de distribución de X. Sustituyendo F_X^{-1} por su expresión, esto es, despejando X, resulta

$$X = -5 \cdot \ln(1 - Y) .$$

La variable aleatoria X, cuyo comportamiento queremos simular, queda expresada, así, como una función de una variable $\mathcal{U}(0, 1)$. Por tanto, disponiendo de ocho realizaciones de una $\mathcal{U}(0, 1)$, pueden generarse otras tantas de la variable X.

La tabla de números aleatorios que se incluye en el anexo final de este libro, proporciona realizaciones de una variable Z con distribución $\mathcal{U}(0, 100\,000)$. Seleccionemos los ocho primeros valores:

$$\begin{array}{llll} z_1 = 49\,914, & z_2 = 68\,221, & z_3 = 56\,088, & z_4 = 06\,112, \\ z_5 = 95\,481, & z_6 = 30\,094, & z_7 = 68\,493 \quad \text{y} & z_8 = 88\,796 . \end{array}$$

Pero, si Z sigue una distribución $\mathcal{U}(0, 100\,000)$, entonces, $Y = \frac{Z}{100\,000}$ es $\mathcal{U}(0, 1)$. Por consiguiente, dividiendo por cien mil los números aleatorios anteriores, tenemos ocho realizaciones de la variable Y,

$$\begin{array}{llll} y_1 = 0.49914, & y_2 = 0.68221, & y_3 = 0.56088, & y_4 = 0.06112, \\ y_5 = 0.95481, & y_6 = 0.30094, & y_7 = 0.68493 \quad \text{y} & y_8 = 0.88796 . \end{array}$$

A partir de ellas, obtendremos las realizaciones de la variable X, que simulan la duración de las ocho bombillas. La primera durará:

$$x_1 = -5 \cdot \ln(1 - y_1) = -5 \cdot \ln(1 - 0.49914) = 1.50 \text{ años.}$$

Operando de igual forma, hallaríamos la duración, en años, de las ocho bombillas:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1.50, & x_2 = 2.49, & x_3 = 1.79, & x_4 = 0.14, \\ x_5 = 6.73, & x_6 = 0.78, & x_7 = 2.51 \quad \text{y} & x_8 = 4.75 . \end{array}$$

Ejercicio 9.7.
Sea X la variable que representa los resultados de un lanzamiento. Su función de probabilidad es

$$p[X = x] = \frac{1}{6}\,, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6\,.$$

Hemos de realizar simulaciones de una variable aleatoria discreta, X, a partir de simulaciones de Y, una variable uniforme en el intervalo $(0, 1)$, con un procedimiento similar al empleado para variables continuas en el ejercicio anterior.

Así, obtenida una realización, y, de una variable $\mathcal{U}(0, 1)$, la realización correspondiente de la variable X será x_1, si $0 < y < F_X(x_1)$, y x_i $(i = 2, 3, \ldots)$, si $F_X(x_{i-1}) < y \leq F_X(x_i)$, donde $x_1, x_2, \ldots$ son los distintos valores de X.

En nuestro caso, si la variable aleatoria Y se encuentra en el intervalo $(0, \frac{1}{6}]$, diremos que el resultado del lanzamiento, X, ha sido un uno. Si se encuentra en el intervalo $(\frac{1}{6}, \frac{2}{6}]$, diremos que el resultado ha sido un dos, y así sucesivamente. La tabla siguiente indica cómo asignar resultados al lanzamiento, según el número aleatorio obtenido.

Valor de Y	Valor de X
$(0, 0.1667]$	1
$(0.1667, 0.3333]$	2
$(0.3333,\ 0.5]$	3
$(0.5, 0.6667]$	4
$(0.6667, 0.8333]$	5
$(0.8333, 1]$	6

En concreto, para las ocho realizaciones de Y, $y_1, \ldots, y_8$, del ejercicio anterior, se obtiene la siguiente simulación de ocho lanzamientos independientes de un dado:

$$3, 5, 4, 1, 6, 2, 5 \text{ y } 6\,.$$

Ejercicio 9.8.
El *incremento salarial pactado* para 1994 (y, en principio, para 1995), X, sigue una distribución $\mathcal{U}(0, 5)$. El *incremento salarial para 1995*, Z, será el mismo, si la *tasa de variación del IPC para 1994*, Y, no supera dicho incremento salarial, es decir, si $Y \leq X$; por el contrario, si la variación del IPC es superior al incremento previamente pactado, $Y > X$, el incremento para 1995 se revisará al alza hasta alcanzar el nivel de inflación. Esto es,

$$Z = \begin{cases} X & X \geq Y \\ Y & X < Y \end{cases}$$

Para calcular el valor esperado de Z, calculemos previamente su distribución. Así, aplicando el teorema de la probabilidad total,

$$\begin{aligned} F_Z(z) = p[Z \leq z] \;&= p[X \geq Y] \cdot p[Z \leq z \mid X \geq Y] + p[X < Y] \cdot p[Z \leq z \mid X < Y] = \\ &= p[X \geq Y] \cdot p[X \leq z \mid X \geq Y] + p[X < Y] \cdot p[Y \leq z \mid X < Y] = \\ &= p[X \leq z,\, X \geq Y] + p[Y \leq z,\, X < Y]\,. \end{aligned}$$

Para hallar estas probabilidades obtengamos la distribución conjunta de las variables X e Y, que, al no tener más información, supondremos independientes, a pesar de que ello no sea razonable desde el punto de vista de la teoría económica. Entonces,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{-2y+10}{125} & 0 < x < 5, \quad 0 < y < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La figura 9.4 muestra el recinto en el que $x \leq z$ y $x \geq y$, para $0 \leq z \leq 5$.

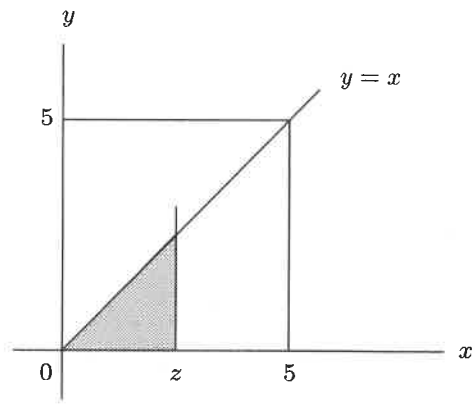


FIG. 9.4.

Con lo cual,

$$p[X \leq z,\ X \geq Y] = \int_{x=0}^{z} \int_{y=0}^{x} \frac{-2y+10}{125}\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{125} \int_{x=0}^{z} (-x^2 + 10x)\, dx = \frac{1}{125} \left(-\frac{z^3}{3} + 5z^2 \right),$$

para $0 \leq z \leq 5$.

Para calcular la segunda probabilidad hay que integrar $f_{(X,Y)}$ en la zona rayada de la figura 9.5.

esto es, para $0 < z < 5$,

$$p[Y \leq z,\ X < Y] = \int_{y=0}^{z} \int_{x=0}^{y} \frac{-2y+10}{125}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{125} \int_{y=0}^{z} (-2y^2 + 10y)\, dy = \frac{1}{125} \left(-\frac{2z^3}{3} + 5z^2 \right)$$

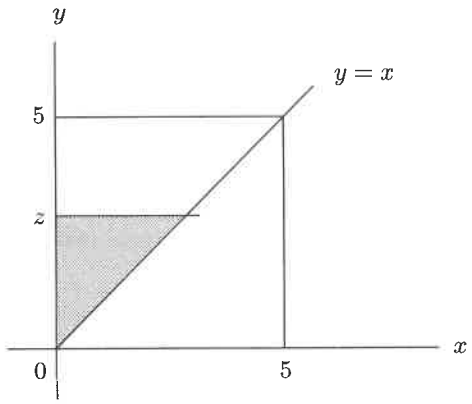


FIG. 9.5.

De esta forma, para $0 < z < 5$,

$$F_Z(z) = \frac{1}{125}\left(-\frac{z^3}{3} + 5z^2\right) + \frac{1}{125}\left(-\frac{2z^3}{3} + 5z^2\right) = \frac{-z^3 + 10z^2}{125},$$

siendo nula si $z \leq 0$, e igual a uno si $z \geq 5$. Derivando, resulta la función de densidad:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{-3z^2 + 20z}{125} & 0 < z < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

En definitiva, la esperanza de Z es

$$E(Z) = \int_{z=0}^{5} z \cdot \frac{-3z^2 + 20z}{125}\, dz = \frac{35}{12} = 2.91\,,$$

es decir, el incremento esperado de los salarios es del 2.91 %.

Ejercicio 9.9.
La variable X, *capacidad de una botella*, sigue una distribución $N(1, 0.01)$. Se rechaza una botella si $X < 0.99$, o bien si $X > 1.1$; entonces, designando por Z a la variable tipificada,

$$\begin{aligned} p(\text{rechazar una botella}) &= p[X < 0.99 \text{ o } X > 1.1] = p[X < 0.99] + p[X > 1.1] = \\ &= p\left[Z < \frac{0.99 - 1}{0.01}\right] + 1 - p\left[Z \leq \tfrac{1.1-1}{0.01}\right] = \\ &= \Phi(-1) + 1 - \Phi(10)\,, \end{aligned}$$

donde Φ denota la función de distribución de la normal estándar. Ahora bien, las tablas de esta distribución no proporcionan los valores para $z < 0$. Entonces, teniendo en cuenta la simetría de la distribución normal, $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$, y consultando las citadas tablas,

$$p(\text{rechazar una botella}) = 1 - \Phi(1) + 1 - \Phi(10) \approx 1 - 0.8413 + 1 - 1 = 0.1587\,,$$

esto es, se rechazará el 15.87 % de las botellas.

Ejercicio 9.10.
La función de distribución de X es

$$F_X(x) = p[X \leq x] = p[\sigma Z + \mu \leq x] = p\left[Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right] = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Entonces, derivando, se obtiene la función de densidad:

$$f_X(x) = f_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\,,$$

función de densidad de una distribución $N(\mu, \sigma)$.

Ejercicio 9.11.
Denotando por X el *número de horas necesarias para aprender un tema*, $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$, entonces,

$$p[X > 3] = 0.8413 \qquad \text{y} \qquad p[X > 9] = 0.0228\,.$$

Designando por Z a la variable tipificada, las probabilidades de los sucesos complementarios son:

$$p[X \leq 3] = p\left[Z \leq \frac{3-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0.1587$$

y

$$p[X \leq 9] = p\left[Z \leq \frac{9-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 0.9772\,.$$

Con lo cual, buscando en las tablas de la normal estándar, resulta

$$\frac{3-\mu}{\sigma} = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{9-\mu}{\sigma} = 2\,,$$

sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de cuya resolución se obtiene $\mu = 5$ y $\sigma = 2$.

Ejercicio 9.12.
La función de distribución de Z, para $0 < z < 1$, es

$$F_Z(z) = p[Z \leq z] = p[F_X(X) \leq z] = p[X \leq F_X^{-1}(z)]\,,$$

ya que, al ser F_X estrictamente monótona creciente, existe su inversa, que también es estrictamente monótona creciente, con lo cual, si $0 < z < 1$,

$$F_Z(z) = F_X(F_X^{-1}(z)) = z\,,$$

anulándose para $z \leq 0$ y valiendo uno para $z \geq 1$.

Por tanto, la función de densidad de Z resulta

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

es decir, Z sigue una distribución $\mathcal{U}(0,1)$. Entonces, su esperanza es el punto medio del intervalo, esto es,

$$E(Z) = \frac{1}{2} .$$

Adviértase que este resultado no es exclusivo de la distribución $N(0,1)$; cualquier variable continua, X, cuya función de distribución sea estrictamente creciente en el campo de variación de X, también lo verifica, según se indica en el resumen teórico de este capítulo.

Ejercicio 9.13.

La variable X, *peso, en gramos, de los recién nacidos*, sigue una distribución $N(3\,000, \sigma)$. Como $p[2\,500 < X < 3\,500] = 0.98$, tipificando, se obtiene:

$$p[2\,500 < X < 3\,500] = p\left[\frac{2\,500 - 3\,000}{\sigma} < \frac{X - 3\,000}{\sigma} < \frac{3\,500 - 3\,000}{\sigma}\right] =$$

$$= \Phi\left(\tfrac{500}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{500}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\tfrac{500}{\sigma}\right) - 1 = 0.98 ,$$

dado que, por la simetría de la función de densidad normal, $\Phi\left(-\frac{500}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{500}{\sigma}\right)$. Por tanto,

$$\Phi\left(\frac{500}{\sigma}\right) = 0.99 .$$

Buscando en las tablas de la distribución normal estándar, resulta $\frac{500}{\sigma} = 2.33$, es decir, $\sigma = 214.6$.

Ejercicio 9.14.

La variable $Y = \sqrt{X^2}$ es la variable $|X|$ y no la variable X como pudiera parecer. Por tanto, sólo toma valores positivos, no siendo posible, en consecuencia, que su distribución corresponda a la de una normal. Comprobémoslo.

La función de distribución de Y, para cualquier $y > 0$, es

$$F_Y(y) = p[\sqrt{X^2} \leq y] = p[X^2 \leq y^2] = p[-y \leq X \leq y] = p\left[-\frac{y}{\sigma} \leq \frac{X}{\sigma} \leq \frac{y}{\sigma}\right] =$$

$$= \Phi\left(\frac{y}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\tfrac{y}{\sigma}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\tfrac{y}{\sigma}\right) - 1 ,$$

anulándose para valores de $y \leq 0$.

Derivando se obtiene la función de densidad de Y,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

función de densidad que no es la de una normal.

Ejercicio 9.15.
La variable que recoge la *cotización de un cierto título*, X, sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Se sabe que

$$p[X > 400] = 0.025 \qquad \text{y} \qquad p[X \leq 380] = 0.5 .$$

Entonces, si Z designa la variable tipificada,

$$p[X \leq 400] = p\left[Z \leq \frac{400-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{400-\mu}{\sigma}\right) = 0.975$$

y

$$p[X \leq 380] = p\left[Z \leq \frac{380-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{380-\mu}{\sigma}\right) = 0.5 .$$

Consultando la tabla de la distribución normal estándar, se tiene

$$\frac{400-\mu}{\sigma} = 1.96$$

y

$$\frac{380-\mu}{\sigma} = 0 .$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, se obtiene que $\mu = 380$ y $\sigma = 10.2$.

Adviértase que el valor del parámetro μ resultaba obvio, ya que, como $p[X \leq 380] = 0.5$, la mediana vale 380, coincidiendo con la media, pues la distribución normal es simétrica.

Por tanto, la cotización en Bolsa de un cierto título es una variable $N(380, 10.2)$. De aquí, la probabilidad de que *dicha cotización se encuentre entre 385 y 395* es

$$\begin{aligned} p[385 < X < 395] &= p[0.49 < Z < 1.47] = \\ &= \Phi(1.47) - \Phi(0.49) = 0.9292 - 0.6879 = 0.2413 . \end{aligned}$$

Ejercicio 9.16.
Dado que la media muestral de n variables normales independientes, de media μ y desviación σ, sigue también una distribución normal de media μ y desviación $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

$$\overline{X} \hookrightarrow N\left(\mu, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{e} \qquad \overline{Y} \hookrightarrow N\left(\mu, \frac{2}{\sqrt{n}}\right) .$$

Además, $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ son independientes al serlo entre sí las variables que las forman. Entonces, su diferencia, $\overline{X} - \overline{Y}$, es también normal, en concreto,

$$\overline{X} - \overline{Y} \hookrightarrow N\left(\mu - \mu, \sqrt{\frac{4}{n} + \frac{4}{n}}\right) \equiv N\left(0, \sqrt{\frac{8}{n}}\right) .$$

Busquemos el valor de n para el que se cumpla:

$$p[|\overline{X} - \overline{Y}| < 1] \geq 0.95 .$$

Ahora bien, la probabilidad anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} p[|\overline{X} - \overline{Y}| < 1] &= p[-1 \leq \overline{X} - \overline{Y} \leq 1] = p\left[-\sqrt{\frac{n}{8}} \leq \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - 0}{\sqrt{8/n}} \leq \sqrt{\frac{n}{8}}\right] = \\ &= 2\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{8}}\right) - 1 \geq 0.95 , \end{aligned}$$

de donde resulta que

$$\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{8}}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96) .$$

Al ser Φ una función de distribución, es creciente y, por tanto, $\sqrt{\frac{n}{8}} \geq 1.96$; luego, n ha de ser mayor, o a lo sumo igual, que 31.

El lector podría plantearse el mismo ejercicio aunque desconociera la distribución de las variables, no así su media, su varianza y su relación de independencia. En efecto, dado que

$$E(\overline{X} - \overline{Y}) = E(\overline{X}) - E(\overline{Y}) = \mu - \mu = 0$$

y

$$\text{Var } (\overline{X} - \overline{Y}) = \text{Var } (\overline{X}) + \text{Var } (\overline{Y}) = \frac{4}{n} + \frac{4}{n} = \frac{8}{n} ,$$

utilizando la desigualdad de CHEBYSHEV,

$$p[|(\overline{X} - \overline{Y}) - 0| \geq 1] \leq \frac{\text{Var } (\overline{X} - \overline{Y})}{1^2} = \frac{8}{n} .$$

Considerando $\frac{8}{n}$ un valor aproximado de $p[|\overline{X} - \overline{Y}| \geq 1]$, entonces, $\frac{8}{n} \leq 0.05$, de donde se deduce que $n \geq 160$. La diferencia entre este resultado y el que se obtiene cuando se conoce la distribución de las variables, que indica que n puede ser cualquier valor mayor o igual que 31, está en que $\frac{8}{n}$ no es un valor aproximado de $p[|\overline{X} - \overline{Y}| \geq 1]$, sino bastante superior.

Ejercicio 9.17.
La variable X, *puntuación de un individuo en el test*, sigue una distribución $N(4, 2)$. Entonces, la probabilidad del suceso T, *aprobar el test*, es

$$p(T) = p[X > 6] = 1 - p\left[Z \leq \frac{6 - 4}{2}\right] = 1 - \Phi(1) = 0.1587 ,$$

donde Z designa a la variable tipificada.

Una vez superado el test, se pasa una entrevista personal; denotemos por E al suceso *pasar con éxito dicha entrevista.* Se sabe que

$$p(E \mid M) = 0.8 \qquad \text{y} \qquad p(E \mid H) = 0.7 \,,$$

siendo M el suceso *ser mujer* y H, *ser hombre*, ambos, en principio, con idéntica probabilidad; es decir, $p(M) = p(H) = 0.5$. En definitiva, la probabilidad de *pasar la entrevista* (una vez pasado el test, evidentemente) es

$$p(E) = p(M) \cdot p(E \mid M) + p(H) \cdot p(E \mid H) = 0.5 \cdot 0.8 + 0.5 \cdot 0.7 = 0.75 \,.$$

(Para no complicar la notación, denotamos por $p(E)$ lo que, en rigor, es $p(E \mid T)$.)

Un individuo es seleccionado para el trabajo cuando aprueba el test y, a continuación, pasa con éxito la entrevista. Entonces, la probabilidad de que *un candidato sea seleccionado*, S, es

$$p(S) = p(TE) = p(T) \cdot p(E \mid T) = 0.1587 \cdot 0.75 = 0.119 \,.$$

a) Entonces, considerando que las selecciones de los candidatos son independientes, la probabilidad de que *sean seleccionados el segundo y el tercer candidato* y, por tanto, sea rechazado el primero, es

$$p(\overline{S}_1 S_2 S_3) = p(\overline{S}_1) \cdot p(S_2) \cdot p(S_3) = (1 - 0.119)\, 0.119 \cdot 0.119 = 0.012 \,,$$

donde S_i es el suceso *el candidato i-ésimo es seleccionado.*

b) La variable X_1, *número de candidatos examinados antes de elegir al primer agente*, contabiliza el número de fracasos (candidato no seleccionado) antes del primer éxito y, por tanto, sigue una distribución geométrica de parámetro 0.119, probabilidad de que *un candidato sea seleccionado.* Asimismo, X_2, *número de candidatos examinados después de elegir el primer agente y antes de elegir el segundo*, sigue también una distribución geométrica $\mathcal{G}(0.119)$, siendo X_1 y X_2 independientes.

Entonces, la probabilidad pedida es

$$p[X_1 = 20 \mid X_1 + X_2 = 49] \,,$$

pues si ha sido necesario examinar a 50 candidatos antes de elegir al segundo agente, entonces 49 fueron rechazados y sólo uno seleccionado.

En el ejercicio 8.24 se probó que, si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución geométrica $\mathcal{G}(p)$, la distribución de X_1 condicionada por $X_1 + X_2 = n$ es una uniforme discreta de parámetro $n + 1$. En consecuencia,

$$p[X_1 = 20 \mid X_1 + X_2 = 49] = \frac{1}{49 + 1} = 0.02 \,.$$

Ejercicio 9.18.
La suma de n variables normales independientes es, también, normal, siendo su media la suma de las medias, y su varianza la suma de las varianzas; en concreto,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow N(2n, \sqrt{n}) \, .$$

Entonces, tipificando,

$$0.975 = p\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 59.8\right] = \Phi\left(\frac{59.8 - 2n}{\sqrt{n}}\right)$$

y, como $\Phi(1.96) = 0.975$, se tiene que

$$1.96 = \frac{59.8 - 2n}{\sqrt{n}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$2n + 1.96\sqrt{n} - 59.8 = 0 \, .$$

Resolviendo esta ecuación, resulta $\sqrt{n} = 5$, siendo 25 el valor de n para el que se verifica la igualdad propuesta.

Ejercicio 9.19.
La función de distribución de Y, para $y > 0$, es

$$F_Y(y) = p[e^X \leq y] = p[X \leq \ln y] = F_X(\ln y) \, ,$$

anulándose para $y \leq 0$. Entonces, derivando,

$$f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}$$

si $y > 0$, siendo cero en el resto. Esta función de densidad corresponde a la distribución logarítmico-normal de parámetros 0 y 1.

Ejercicio 9.20.
Si X sigue una distribución log $N(3, 2)$, su media es

$$E(X) = e^{3+\frac{2^2}{2}} = e^5 \, .$$

Entonces, como $\ln X$ es una normal $N(3, 2)$,

$$p[X > e^5] = p[\ln X > 5] = 1 - \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) = 0.1587 \, ,$$

es decir, el 15.87 % de los individuos tiene ingresos superiores a la media.

Ejercicio 9.21.
Sea X una variable con distribución log $N(\mu, \sigma)$, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

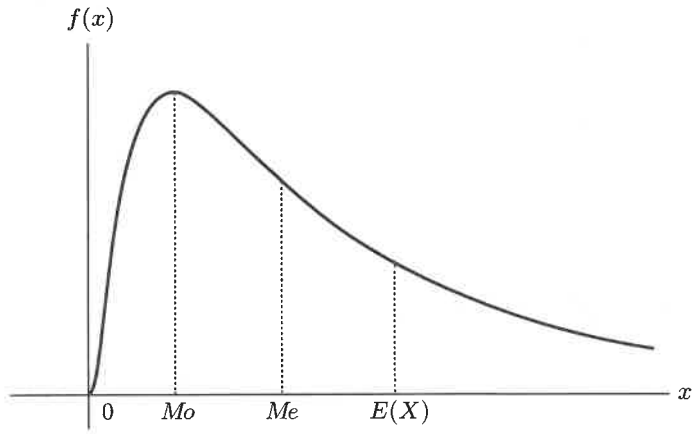


FIG. 9.6.

Para calcular la moda, el valor donde se alcanza el máximo absoluto de la función de densidad, anulamos su derivada,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 + \frac{\ln x - \mu}{\sigma^2}\right) = 0 .$$

Así, resulta el valor de la moda

$$Mo = e^{\mu - \sigma^2} ,$$

pudiéndose comprobar que la segunda derivada es negativa en ese punto.

Para calcular la mediana, tengamos en cuenta que ésta es el valor de la variable que deja a su izquierda la mitad de la probabilidad, es decir,

$$p[X \leq Me] = p[\ln X \leq \ln Me] = \Phi\left(\frac{\ln Me - \mu}{\sigma}\right) = 0.5 ,$$

pues $\ln X$ sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. De aquí resulta que

$$\ln Me - \mu = 0 ,$$

de donde $Me = e^{\mu}$.

Como la media es conocida y vale

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} ,$$

entonces,

$$E(X) = e^{\mu} e^{\sigma^2/2} > Me = e^{\mu} > Mo = e^{\mu} e^{-\sigma^2} .$$

La gráfica de la función de densidad de X de la figura 9.6 recoge esta relación.

Ejercicio 9.22.

a) Sabemos que el beneficio es la diferencia entre ingresos y gastos. En este caso, el ingreso es fijo (5.000 pesetas) y los gastos, 1.000 pesetas fijas de fabricación y $C \cdot X$ de reparación, donde X es la variable que designa *el tiempo, en horas, empleado en la reparación* y C el coste por hora de la misma. Por tanto, el *beneficio en miles de pesetas*, B, es

$$B = 5 - (CX + 1)$$

y, consecuentemente, el beneficio medio es

$$E(B) = 5 - [C \cdot E(X) + 1] .$$

Como X sigue una distribución $\gamma(0.5, 2)$, el tiempo medio que se tarda en reparar una pieza es

$$E(X) = \frac{2}{0.5} = 4 \text{ horas} ,$$

y, si se desea que el beneficio medio sea de 3.000 pesetas, bastará despejar para obtener $C = 0.25$. Es decir, hay que cobrar 250 pesetas por hora de reparación, si se espera obtener un beneficio de 3.000 pesetas por pieza.

b) Fijado un coste de 250 pesetas por hora de reparación, *el beneficio, en miles de pesetas*, es

$$B = 5 - (0.25\,X + 1) = 4 - 0.25 \cdot X .$$

Entonces, la probabilidad de que *el beneficio no supere las 2.000 pesetas* es

$$\begin{aligned} p[B \leq 2] &= p[4 - 0.25 \cdot X \leq 2] = p[X \geq 8] = \\ &= \int_{x=8}^{\infty} 0.5^2\, x\, e^{-0.5x}\, dx = 0.078 . \end{aligned}$$

Ejercicio 9.23.

La función de densidad de una distribución gamma de parámetros a y p es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-1} e^{-ax} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

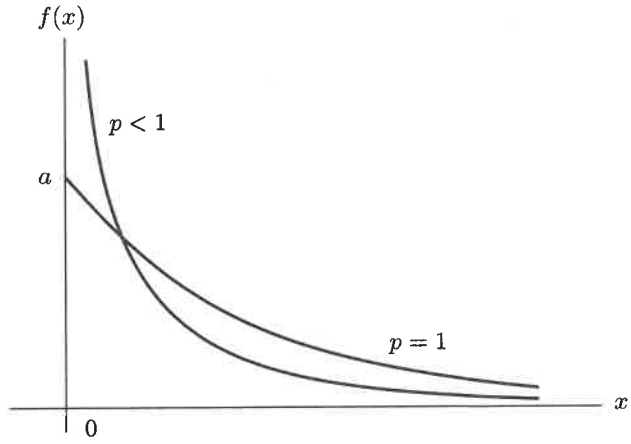


FIG. 9.7.

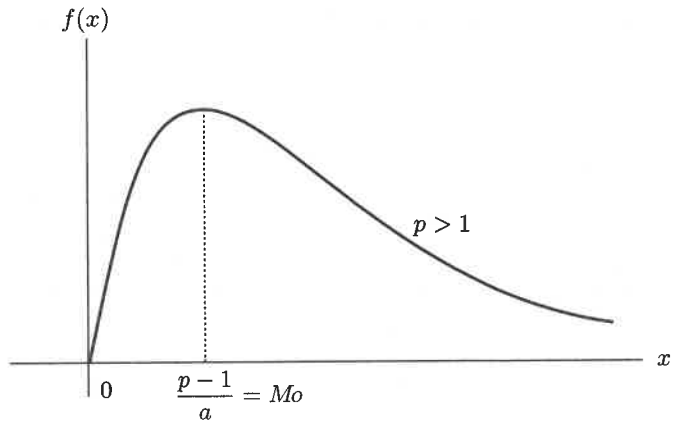


FIG. 9.8.

Estudiemos el crecimiento y el decrecimiento de f, analizando el signo de su derivada para $x > 0$ (en el resto de los valores, f es igual a cero y, por tanto, constante),

$$f'(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot x^{p-2} e^{-ax}(p - 1 - ax) .$$

Como los primeros factores de $f'(x)$ son siempre positivos, sólo tendremos en cuenta el signo de $(p - 1 - ax)$.

Así, si $p \leq 1$, la expresión $(p - 1 - ax)$ es siempre negativa, siendo, entonces, $f'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Es decir, la función de densidad es constante para $x \leq 0$ (de hecho

vale cero) y decreciente para $x > 0$. En este caso no existe la moda, ya que la función de densidad no tiene máximo; si $p = 1$, al menos tiene un extremo superior, que es el valor a, pero cuando $p < 1$ no tiene, tampoco, dicho extremo.

Cuando $p > 1$, la expresión $(p - 1 - ax)$ es positiva o negativa dependiendo de los valores de x. Así, $(p - 1 - ax) > 0$, si $x < \frac{p-1}{a}$, siendo la función creciente para estos valores, pues $f'(x) > 0$; en cambio, si $x > \frac{p-1}{a}$, $(p - 1 - ax) < 0$, y la función de densidad decrece. Entonces, el maximo se alcanza en $\frac{p-1}{a}$ y, por tanto,

$$Mo = \frac{p-1}{a} .$$

Las figuras 9.7 y 9.8 describen las distintas situaciones.

Ejercicio 9.24.
Sea X el *tiempo, en horas, empleado diariamente en transporte*, variable que sigue una distribución $\gamma(2, 2)$. Entonces, su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Integrando *por partes*, se obtiene la función de distribución de X que, para $x > 0$, es

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} 4te^{-2t}\, dt = 1 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} ,$$

anulándose en el resto.

a) La probabilidad de que *un trabajador emplee más de media hora en transporte* es

$$p[X > 0.5] = 1 - p[X \leq 0.5] = 1 - F(0.5) = 2e^{-1} = 0.736 .$$

b) Si un trabajador emplea al menos una hora en transporte, la probabilidad de que *no supere la hora y media* es

$$p[X \leq 1.5 \mid X \geq 1] = \frac{p[1 \leq X \leq 1.5]}{p[X \geq 1]} = \frac{F(1.5) - F(1)}{1 - F(1)} = 1 - \frac{4}{3} \cdot e^{-1} = 0.509 .$$

c) Tenemos que hallar el valor de m, tal que

$$p[X > m] = 0.5 ,$$

es decir,

$$F(m) = 0.5 .$$

Entonces, el valor buscado es la solución de la ecuación

$$1 - 2me^{-2m} - e^{-2m} = 0.5 ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$e^{2m} - 4m - 2 = 0 .$$

Dicho valor, obtenido por aproximación, resulta ser $m = 0.84$, esto es, el 50 % de los trabajadores que pierden más tiempo en transporte, pierden, como mínimo, 0.84 horas. El lector advertirá que este valor no es otro que la mediana de la distribución.

Ejercicio 9.25.
La variable X, *cuantía de daños por accidente*, sigue una distribución $\gamma(0.10, 2)$. *La cantidad que la compañía paga por accidente*, Y, es una variable aleatoria función de X; en concreto,

$$Y = g(X) = \begin{cases} X & X \leq 3 \\ 3 + \dfrac{X-3}{2} & 3 < X \leq 70 \\ 36.5 & X > 70 \end{cases}$$

Dado que Y es función de X, puede calcularse su esperanza como

$$E(Y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx ,$$

donde

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.01xe^{-0.1x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Entonces,

$$E(Y) = \int_{x=0}^{3} x \cdot f_X(x)\, dx + \int_{x=3}^{70} \left(3 + \frac{x-3}{2}\right) \cdot f_X(x)\, dx + \int_{x=70}^{\infty} 36.5 \cdot f_X(x)\, dx = 11.44 ,$$

solución obtenida integrando varias veces *por partes*. En consecuencia, la cantidad que la compañía espera pagar por accidente es de 11.440 pesetas.

El lector puede calcular esta esperanza hallando previamente la distribución de la variable mixta Y, si bien el proceso es más complicado.

Ejercicio 9.26.
Si X sigue una distribución $\mathcal{E}(a)$, sabemos que $E(X) = \frac{1}{a}$ y Var $(X) = \frac{1}{a^2}$. Entonces,

$$p[X > E(X)] = p\left[X > \frac{1}{a}\right] = \int_{x=\frac{1}{a}}^{\infty} ae^{-ax}\, dx = e^{-1} .$$

Adviértase que la probabilidad de que una variable exponencial negativa de parámetro a supere la media, no depende del valor de a, siendo la misma sea cual sea a y, por tanto, sea cual sea la media.

Dado que la mediana, Me, deja a su izquierda, al igual que a su derecha, la mitad de la probabilidad,

$$p[X \leq Me] = \int_{x=0}^{Me} ae^{-ax}\, dx = 1 - e^{-aMe} = 0.5\,,$$

entonces, $-a \cdot Me = \ln(0.5)$ y, en definitiva,

$$Me = \frac{-\ln(0.5)}{a}\,.$$

Por último, el coeficiente de variación es

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} = \frac{1/a}{1/a} = 1\,.$$

Ejercicio 9.27.

a) Al tener X una distribución $\mathcal{E}(a)$, su esperanza y su desviación típica valen $\frac{1}{a}$. Entonces,

$$\begin{aligned} p[|X-\mu| \geq k\cdot\sigma] &= p\left[\left|X - \tfrac{1}{a}\right| \geq \tfrac{k}{a}\right] = 1 - p\left[-\tfrac{k}{a} < X - \tfrac{1}{a} < \tfrac{k}{a}\right] = \\ &= 1 - p\left[\frac{1-k}{a} < X < \frac{1+k}{a}\right] = 1 - \int_{x=\frac{1-k}{a}}^{\frac{1+k}{a}} ae^{-ax}\, dx = \\ &= 1 + e^{-(1+k)} - e^{-(1-k)}\,. \end{aligned}$$

b) Utilizando la desigualdad de CHEBYSHEV, se obtiene:

$$p[|X-\mu| \geq k\cdot\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2}\,.$$

Ejercicio 9.28.

Denotemos por X_A y X_B a las variables que recogen la duración de una bombilla fabricada por el método A y por el método B, respectivamente. Ambas variables siguen una distribución exponencial negativa de parámetros $\frac{1}{80}$ y $\frac{1}{100}$. Asimismo, denotemos por X la *duración de una bombilla* sea cual sea el método de fabricación. Entonces, designando por A y B los sucesos *estar fabricada por el método A* y *estar fabricada por el B*, la probabilidad de que *una bombilla dure al menos 90 horas* es

$$\begin{aligned} p[X \geq 90] &= p(A)\cdot p[X \geq 90 \mid A] + p(B)\cdot p[X \geq 90 \mid B] = \\ &= p(A)\cdot p[X_A \geq 90] + p(B)\cdot p[X_B \geq 90] = \\ &= 0.7 \cdot \int_{x=90}^{\infty} \frac{1}{80}\cdot e^{-\frac{x}{80}}\, dx + 0.3 \cdot \int_{x=90}^{\infty} \frac{1}{100}\cdot e^{-\frac{x}{100}}\, dx = 0.349\,. \end{aligned}$$

Sea Y el *número de bombillas, entre 10, que duran al menos 90 horas.* Esta variable sigue una distribución $\mathcal{B}(10, 0.349)$. Por tanto, la probabilidad de que *6 bombillas duren al menos 90 horas* es

$$p[Y = 6] = \binom{10}{6} 0.349^6 \cdot 0.651^4 = 0.068 .$$

Ejercicio 9.29.

La variable X, *diámetro interior de una pieza, en milímetros*, sigue una distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Si una pieza se desecha, se produce una pérdida de 25 pesetas, su coste; si no se desecha, se obtiene un beneficio de 15 pesetas (su precio de venta, 40 pesetas, menos su coste, 25). Entonces, el *beneficio*, B, es una variable aleatoria que toma dos valores,

$$B : \left| \begin{array}{ll} -25 & \text{si } X > 3 \text{ o } X < 1 \\ 15 & \text{si } 1 \leq X \leq 3 \end{array} \right.$$

Obtengamos la probabilidad de aceptar una pieza:

$$p[1 \leq X \leq 3] = \int_{x=1}^{3} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}} dx = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-\frac{3}{\lambda}}$$

y, por tanto, la probabilidad de aceptar una pieza es

$$p[X > 3 \text{ o } X < 1] = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{3}{\lambda}} .$$

En consecuencia, la distribución de la variable *beneficio*, B, es

$$B : \left| \begin{array}{ll} -25 & p[B = -25] = 1 - e^{-\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{3}{\lambda}} \\ 15 & p[B = 15] = e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-\frac{3}{\lambda}} \end{array} \right.$$

Entonces, el beneficio medio resulta

$$\begin{aligned} E(B) &= -25 \cdot (1 - e^{-\frac{1}{\lambda}} + e^{-\frac{3}{\lambda}}) + 15 \cdot (e^{-\frac{1}{\lambda}} - e^{-\frac{3}{\lambda}}) = \\ &= 40 \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}} - 40 \cdot e^{-\frac{3}{\lambda}} - 25 . \end{aligned}$$

Considerando que $E(B)$ es una función de λ, hallemos el valor de λ que la maximiza, igualando su derivada a cero. Así,

$$\frac{d}{d\lambda} E(B) = 40 \cdot e^{-\frac{1}{\lambda}} \cdot \frac{1}{\lambda^2} - 40 \cdot e^{-\frac{3}{\lambda}} \cdot \frac{3}{\lambda^2} = 0 ,$$

de donde se obtiene $\lambda = \frac{2}{\ln 3} = 1.82$. (Puede el lector comprobar que la segunda derivada es negativa en dicho punto, en concreto vale -4.2, lo que confirma que en 1.82 se alcanza

el máximo.) Por tanto, la máquina tiene que ajustarse para que el diámetro medio de las piezas sea 1.82 milímetros, maximizándose, entonces, el beneficio medio.

Ejercicio 9.30.
Hemos de calcular

$$p[X > t+2 \mid X > t]\,,$$

donde X es la variable con distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{5}\right)$ y t el número de días que han transcurrido.

La propiedad del olvido que verifican las exponenciales negativas, dice que dicha probabilidad es

$$p[X > t+2 \mid X > t] = p[X > 2] = \int_{x=2}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot e^{-\frac{x}{5}}\, dx = e^{-2/5} = 0.670\,.$$

Ejercicio 9.31.
Llamemos X_M al *tiempo que tarda en responder un macho*, variable que sigue una distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)$, y X_H, al *tiempo que tarda en responder una hembra*, variable con distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, ya que $E(X_M) = 2 \cdot E(X_H)$. Llamando X al *tiempo de respuesta de un ratón*, sea macho o hembra, se sabe que

$$\begin{aligned} 0.8 = p[X > 4] &= p(M) \cdot p[X > 4 \mid M] + p(H) \cdot p[X > 4 \mid H] = \\ &= p(M) \cdot p[X_M > 4] + p(H) \cdot p[X_H > 4] = \\ &= 0.4 \cdot \int_{x=4}^{\infty} \frac{1}{2\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{2\lambda}}\, dx + 0.6 \cdot \int_{x=4}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}}\, dx = \\ &= 0.4 \cdot e^{-\frac{2}{\lambda}} + 0.6 \cdot e^{-\frac{4}{\lambda}}\,, \end{aligned}$$

donde M y H designan los sucesos *ratón macho* y *ratón hembra*, respectivamente. Entonces,

$$0.6 \cdot e^{-\frac{4}{\lambda}} + 0.4 \cdot e^{-\frac{2}{\lambda}} - 0.8 = 0$$

ecuación de segundo grado en $e^{-\frac{2}{\lambda}}$, cuya única solución posible es $e^{-\frac{2}{\lambda}} = 0.8685$, de donde resulta el valor $\lambda = 14.19$. Por tanto, el tiempo medio de respuesta es de 14.19 minutos para los ratones hembras y de 28.38 para los machos.

Ejercicio 9.32.
El *tiempo de vida, en horas, de una válvula*, X, sigue una distribución $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, siendo su función de distribución, para $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{t}{\lambda}}\, dt = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}\,,$$

anulándose en el resto de valores.

Denotando por X_1 y X_2 el *tiempo de vida* de cada una de las dos válvulas, variables independientes e igualmente distribuidas, $\mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, se sabe que

$$p[X_1 \geq 4, X_2 \geq 4] = (p[X \geq 4])^2 = 0.252\,,$$

o, lo que es lo mismo,

$$p[X < 4] = 1 - e^{-\frac{4}{\lambda}} = 0.498\,,$$

de lo cual resulta $\lambda = 5.8$.

La variable U, *tiempo de vida de la primera pieza que falla en el par*, es el mínimo valor entre X_1 y X_2, es decir, $U = \text{mín}\,(X_1, X_2)$. Calculemos la función de distribución de U. Así, para $u > 0$:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= p[\text{mín}\,(X_1, X_2) \leq u] = 1 - p[\text{mín}\,(X_1, X_2) > u] = \\ &= 1 - p[X_1 > u, X_2 > u] = 1 - p[X_1 > u] \cdot p[X_2 > u] = 1 - (p[X > u])^2 = \\ &= 1 - [1 - F_X(u)]^2 = 1 - e^{-\frac{u}{2.9}}\,, \end{aligned}$$

anulándose para $u \leq 0$.

Derivando, obtenemos la función de densidad de la variable U,

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2.9} \cdot e^{-\frac{u}{2.9}} & u > 0 \\ 0 & u \leq 0 \end{cases}$$

En consecuencia, U se distribuye como una exponencial negativa de media 2.9, y, por tanto, $E(U) = 2.9$ horas.

Ejercicio 9.33.

a) Calculemos la función de distribución de Z_i, teniendo en cuenta que Z_i toma valores positivos:

$$\begin{aligned} F_{Z_i}(z) = p[Z_i \leq z] &= p[-2\,\ln(X_i) \leq z] = p\left[\ln(X_i) \geq -\frac{z}{2}\right] = \\ &= p[X_i \geq e^{-z/2}] = 1 - F_{X_i}\left(e^{-z/2}\right)\,, \end{aligned}$$

siendo igual a cero para $z \leq 0$.

Derivando, se obtiene la función de densidad,

$$f_{Z_i}(z) = f_{X_i}\left(e^{-z/2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-z/2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot e^{-z/2} & z > 0 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases}$$

pues, cuando $z > 0$, entonces $e^{-z/2}$ está comprendido entre 0 y 1. Consecuentemente, Z_i es una variable exponencial negativa, $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

b) La distribución de la suma de dos exponenciales negativas independientes es una gamma; en concreto, como Z_1 y Z_2 son independientes, al serlo X_1 y X_2, la variable $Y = Z_1 + Z_2$ sigue una distribución $\gamma\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Entonces,

$$p[Z_1 + Z_2 \leq 4] = p[Y \leq 4] = \int_{y=0}^{4} \frac{(1/2)^2}{\Gamma(2)} \cdot y^{2-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}}\, dy = 1 - 3e^{-2}\,,$$

sin más que resolver la integral anterior *por partes*.

Se puede llegar al mismo resultado integrando la función de densidad conjunta de Z_1 y Z_2 en el recinto donde $z_1 + z_2 \leq 4$. Así,

$$\begin{aligned} p[Z_1 + Z_2 \leq 4] &= \int\int_{(z_1+z_2\leq 4)} f_{(z_1,z_2)}(z_1, z_2)\, dz_1 dz_2 = \\ &= \int_{z_1=0}^{4} \int_{z_2=0}^{4-z_1} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{z_1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{z_2}{2}}\, dz_2 dz_1 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{z_1=0}^{4} e^{-\frac{z_1}{2}} \left(1 - e^{-\frac{z_1-4}{2}}\right) dz_1 = 1 - 3e^{-2}\,. \end{aligned}$$

Ejercicio 9.34.

La variable X, *duración de una llamada*, sigue una distribución $\mathcal{E}(1)$. Entonces, para $x > 0$,

$$F_X(x) = \int_{t=0}^{x} e^{-t}\, dt = [-e^{-t}]_{t=0}^{x} = 1 - e^{-x}\,,$$

anulándose en el resto.

La variable Y, *ingreso por llamada*, es función de X; en concreto,

$$Y: \begin{array}{|ll} 80 \cdot 1 & \text{si } 0 < X \leq 1 \\ 80 \cdot 2 & \text{si } 1 < X \leq 2 \\ 80 \cdot 3 & \text{si } 2 < X \leq 3 \\ \vdots & \vdots \\ 80 \cdot k & \text{si } k-1 < X \leq k \quad (k = 1, 2, \ldots) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Por tanto, el ingreso esperado es

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} 80 \cdot k \cdot p[k-1 < X \leq k]\,,$$

con

$$p[k-1 < X \leq k] = F_X(k) - F_X(k-1) = 1 - e^{-k} - [1 - e^{-(k-1)}] = e^{-k}(e-1)\,.$$

Así,

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} 80 \cdot k \cdot e^{-k}(e-1) = 80(e-1) \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot e^{-k}\,,$$

donde el último sumatorio corresponde a la suma, S, de una progresión aritmético-geométrica. De esta forma,

$$S = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots$$

y, entonces,

$$S - \frac{1}{e} \cdot S = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots ,$$

es decir,

$$S\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}}$$

o, lo que es lo mismo,

$$S = \frac{e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} .$$

En consecuencia,

$$E(Y) = 80 \cdot (e - 1) \cdot \frac{e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} = \frac{80}{1 - e^{-1}} = 126.56 \text{ pesetas.}$$

Ejercicio 9.35.
Si X es una variable uniforme en el intervalo $(0, 1)$, integrando su función de densidad, se obtiene:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Dado que X toma valores entre 0 y 1, la variable $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$ toma valores positivos. Entonces, la función de distribución de Y, para $y > 0$, es

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= p\left[\ln\left(\frac{1}{X}\right) \leq y\right] = p\left[\tfrac{1}{X} \leq e^y\right] = \\ &= p[X \geq e^{-y}] = 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-y} , \end{aligned}$$

pues, como $y > 0$, entonces e^{-y} está comprendido entre 0 y 1; por otro lado, obviamente, para $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$.

Derivando F_Y resulta la función de densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

es decir, la distribución de Y es una exponencial negativa de parámetro 1.

Ejercicio 9.36.
a) Si X_t denota el *número de clientes que acuden a un establecimiento en un intervalo de tiempo* $(0,t)$, y T, el *tiempo de espera hasta que llega el primer cliente*, entonces, para $t > 0$,

$$p[T > t] = p[X_t = 0] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} .$$

b) Calculemos la función de distribución de T:

$$F_T(t) = p[T \leq t] = 1 - p[T > t] = 1 - e^{-\lambda t} ,$$

para $t > 0$, anulándose en el resto. Derivando, se obtiene su función de densidad,

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

es decir, se trata de una exponencial negativa de parámetro λ, con lo cual el tiempo esperado hasta que llega el primer cliente es

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} .$$

Ejercicio 9.37.
La función de densidad de la variable X es

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo conocida su media,

$$E(X) = \frac{p}{p+q} = \frac{2}{2+2} = 0.5 .$$

La moda se obtiene derivando la función de densidad e igualando a cero:

$$f'(x) = 6 - 12x = 0 .$$

El valor obtenido, 0.5, hace negativa la segunda derivada. Es decir, f alcanza el máximo en 0.5 y, por tanto, $Mo = 0.5$.

Para calcular la mediana,

$$p[X \leq Me] = \int_{x=0}^{Me} 6x(1-x)\,dx = 3Me^2 - 2Me^3 = 0.5 ,$$

ecuación de tercer grado que tiene tres soluciones: una es negativa, otra 1.3 y la tercera 0.5. Las dos primeras no tienen sentido, pues la mediana tiene que ser un punto en el intervalo $(0,1)$; por tanto, $Me = 0.5$.

Nótese que, para una distribución $\beta(2,2)$, media, moda y mediana coinciden, dado que, según se observa en la gráfica de su función de densidad (véase la figura 9.9), ésta es simétrica y unimodal.

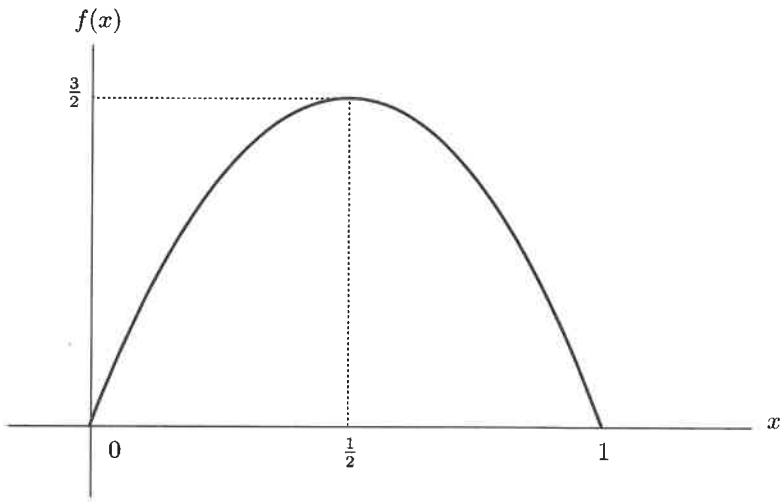


FIG. 9.9.

La varianza de X es, también, un valor conocido

$$\text{Var } (X) = \frac{pq}{(p+q+1)\,(p+q)^2} = \frac{2 \cdot 2}{(2+2+1)\,(2+2)^2} = \frac{1}{20}\,,$$

con lo cual el coeficiente de variación es

$$CV = \frac{\sqrt{\text{Var } (X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{1/20}}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Ejercicio 9.38.

a) La variable X, *proporción de aprobados en Estadística*, sigue una distribución $\beta(3,2)$, con lo cual su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La probabilidad de *suspender menos del 20 %* es la misma que la de *aprobar más del 80 %*. En consecuencia,

$$p[X > 0.8] = \int_{0.8}^{1} 12x^2(1-x)\,dx = 0.18\,.$$

b) La media de aprobados es

$$E(X) = \frac{p}{p+q} = \frac{3}{5}\,.$$

Entonces,

$$p\left[X < \frac{3}{5}\right] = \int_0^{\frac{3}{5}} 12x^2(1-x)\,dx = 0.48\,.$$

Ejercicio 9.39.

a) Como f es una función de densidad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\,,$$

es decir,

$$\int_{x=x_0}^{\infty} \frac{5}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^6 dx = \left[-\left(\frac{3}{x}\right)^5\right]_{x=x_0}^{\infty} = \left(\frac{3}{x_0}\right)^5 = 1\,.$$

Despejando, se obtiene $x_0 = 3$.

b) La función de densidad puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x}\left(\dfrac{3}{x}\right)^5 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

que corresponde a la de una distribución de Pareto de parámetros $\alpha = 5$ y $x_0 = 3$.

c) El cálculo de la esperanza de X es, así, inmediato:

$$E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} = \frac{5 \cdot 3}{5-1} = \frac{15}{4}\,.$$

Ejercicio 9.40.

Si X es una variable de Pareto de parámetros α ($\alpha \geq 3$) y x_0 ($x_0 > 0$), entonces,

$$E(X) = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}$$

y

$$\text{Var}\ (X) = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)\,(\alpha-1)^2}\,.$$

Si x_0 se mantiene constante,

$$\frac{\partial E(X)}{\partial \alpha} = \frac{-x_0}{(\alpha-1)^2} < 0\,,$$

es decir, la esperanza de X es decreciente en α. Por tanto, al crecer α, decrece $E(X)$.

Asimismo,

$$\frac{\partial \text{Var}\ (X)}{\partial \alpha} = \frac{-2(\alpha^2-\alpha-1)}{(\alpha-2)^2\,(\alpha-1)^3} \cdot x_0^2 < 0\,,$$

es decir, la varianza de X es, también, decreciente en α, por lo que, al crecer α, decrece Var (X).

Por otro lado, si α se mantiene constante, obviamente, $E(X)$ y Var (X) crecen cuando lo hace x_0.

Ejercicio 9.41.

a) Si X sigue una distribución de Pareto, conocemos su media y su varianza, entonces, sustituyendo, la expresión del coeficiente de variación es

$$CV = \frac{\sqrt{\text{Var } (X)}}{E(X)} = \sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha-2)}} ,$$

siempre que α sea mayor que 2.

Obsérvese que el coeficiente de variación no depende del valor mínimo, x_0; únicamente depende de α, decreciendo cuando este parámetro crece.

Para hallar la mediana, calculemos previamente la función de distribución de X:

$$F(x) = \int_{t=x_0}^{x} \frac{\alpha}{t}\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha} dt = \left[-\left(\frac{x_0}{t}\right)^{\alpha}\right]_{t=x_0}^{x} = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} ,$$

para $x \geq x_0$, siendo nula para $x < x_0$.

Entonces, como la mediana verifica que $p[X \leq Me] = 0.5$, es decir,

$$1 - \left(\frac{x_0}{Me}\right)^{\alpha} = 0.5 ,$$

resulta $Me = x_0 \cdot 2^{\frac{1}{\alpha}}$.

b) Finalmente, si $\alpha > 1$,

$$p[X < E(X)] = F\left(\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}\right) = 1 - \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^{\alpha} .$$

Ejercicio 9.42.

a) La variable Y es una transformación lineal de la variable X, cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} , \qquad -\infty < x < \infty .$$

La función $y = h(x) = \alpha + \beta x$ es estrictamente monótona y derivable, y su derivada, $\frac{dy}{dx} = \beta$, no se anula. Por tanto, la función de densidad de la variable transformada, Y, es

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right) \cdot \frac{1}{\beta} =$$

$$= \frac{1}{\beta \cdot \pi\left[1 + \left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)^2\right]} , \qquad -\infty < y < \infty ,$$

que corresponde a la función de densidad de una distribución de Cauchy de parámetros α y β.

b) La función de distribución de una variable Y con distribución de Cauchy de parámetros α y β es

$$F_Y(y) = \int_{t=-\infty}^{y} \frac{1}{\beta \cdot \pi \left[1 + \left(\frac{t-\alpha}{\beta}\right)^2\right]} dt$$

y, haciendo el cambio de variable $u = \frac{t-\alpha}{\beta}$, resulta:

$$F_Y(y) = \int_{u=-\infty}^{\frac{y-\alpha}{\beta}} \frac{1}{\pi(1+u^2)} du = \left[\frac{\text{arctg}\,(u)}{\pi}\right]_{u=-\infty}^{\frac{y-\alpha}{\beta}} = \frac{\text{arctg}\left(\frac{y-\alpha}{\beta}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}\,,$$

para $-\infty < y < \infty$.

Ejercicio 9.43.
Anulando la derivada primera de la función de densidad de una distribución de Cauchy de parámetros α y β,

$$f'(x) = \frac{-2\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{\pi\left[1 + \left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2\right]^2} = 0\,,$$

se obtiene como solución $x = \alpha$ (valor que hace negativa la derivada segunda), es decir, el valor en que la función de densidad alcanza el máximo, y, por tanto, $Mo = \alpha$.

Para calcular la mediana, tengamos en cuenta la función de distribución de una variable de Cauchy (hallada en el ejercicio anterior),

$$p[X \leq Me] = F_X(Me) = \frac{\text{arctg}\left(\frac{Me-\alpha}{\beta}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}\,,$$

lo cual conduce al valor $Me = \alpha$.

Por tanto, moda y mediana coinciden, pues la función de densidad es simétrica respecto de α y es unimodal. Adviértase que esto no tiene que llevar a la conclusión errónea de que la esperanza también es α, pues aquí la intuición es contraria a la formalización que asegura la no existencia de $E(X)$.

Ejercicio 9.44.
La función de distribución de $Y = \frac{1}{X}$ es

$$F_Y(y) = p\left[\frac{1}{X} \leq y\right] = p\left[X \geq \frac{1}{y}\right] = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)\,,$$

y, derivando,

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi(1+y^2)}\,, \qquad -\infty < y < \infty\,,$$

que resulta ser la función de densidad de una variable de Cauchy estándar, de la cual ya sabemos que no existe esperanza. Por tanto, la esperanza de $Y = \frac{1}{X}$ no existe.

Ejercicio 9.45.

Se trata de hallar la distribución de la transformada, Z, de una variable bidimensional (X, Y). Para que podamos aplicar el teorema del cambio de variable, debemos construir una transformación de apoyo, por ejemplo, $T = Y$. Entonces, la transformación

$$z = \frac{x}{y} \qquad t = y$$

y su inversa

$$x = z \cdot t \qquad y = t\,,$$

verifican las condiciones del teorema del cambio de variable, siendo el jacobiano de la transformación $J = t$, con lo cual,

$$\begin{aligned} f_{(Z,T)}(z,t) &= f_{(X,Y)}(zt,t) \cdot |t| = f_X(zt) \cdot f_Y(t) \cdot |t| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(zt)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot |t| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot |t| \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2(z^2+1)}\,, \end{aligned}$$

para $-\infty < z < \infty$ y $-\infty < t < \infty$.

La función de densidad marginal de Z es

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot |t| \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2(z^2+1)}\,dt = \\ &= -\int_{t=-\infty}^{0} \frac{1}{2\pi} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2(z^2+1)}\,dt + \int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2(z^2+1)}\,dt = \\ &= 2\int_{t=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2(z^2+1)}\,dt\,, \end{aligned}$$

pues haciendo el cambio de variable $t = -u$ en la integral del primer sumando, se comprueba que los dos sumandos coinciden. Por tanto, mediante el nuevo cambio, $v = \frac{1}{2} \cdot t^2(z^2+1)$, se obtiene

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi}\int_{v=0}^{\infty} \frac{1}{z^2+1} \cdot e^{-v}\,dv = \frac{1}{\pi(z^2+1)}\,, \qquad -\infty < z < \infty\,,$$

que corresponde a la función de densidad de una distribución de Cauchy estándar. Luego $Z = \frac{X}{Y}$ es una variable de Cauchy.

Ejercicio 9.46.
La función de densidad de una variable X con distribución logística es

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta \cdot \left(1 + e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)^2}, \qquad -\infty < x < \infty .$$

Una variable X es simétrica respecto de α cuando lo es su función de densidad, es decir, si $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$, para cualquier valor x. Así,

$$f(\alpha + x) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta \left(1 + e^{-\frac{x}{\beta}}\right)^2}$$

y

$$f(\alpha - x) = \frac{e^{\frac{x}{\beta}}}{\beta \left(1 + e^{\frac{x}{\beta}}\right)^2} .$$

Multiplicando y dividiendo por $(e^{\frac{x}{\beta}})^2$ en la primera expresión, se obtiene la segunda, y, por tanto, ambas expresiones coinciden; esto es, X es simétrica respecto de α.

Para obtener la moda, derivamos la función de densidad y la igualamos a cero, resultando

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} \left(e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}} - 1\right)}{\beta^2 \left(1 + e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)^3} = 0 .$$

El valor que anula esta primera derivada, y hace negativa la segunda, es $x = \alpha$, siendo éste, por tanto, el valor modal.

Dado que la variable es simétrica respecto de α,

$$p[X \leq \alpha] = p[X \geq \alpha] = \frac{1}{2} ,$$

de donde se deduce que $Me = \alpha$, valor que coincide con la moda y con la media.

Ejercicio 9.47.
Para calcular el intervalo intercuartílico debe determinarse, previamente, el primer y el tercer cuartil, C_1 y C_3. Es decir, los valores que verifican

$$F_X(C_1) = 0.25$$

y

$$F_X(C_3) = 0.75 .$$

La función de distribución de X, variable logística estándar, es decir, variable logística con $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, es

$$F_X(x) = \int_{t=-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}\, dt = \frac{1}{1+e^{-x}}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

Entonces,

$$F_X(C_1) = \frac{1}{1+e^{-C_1}} = 0.25\,,$$

de donde resulta $C_1 = -\ln 3$.

En idéntico sentido,

$$F_X(C_3) = \frac{1}{1+e^{-C_3}} = 0.75\,,$$

obteniéndose $C_3 = \ln 3$.

Luego el intervalo intercuartílico es

$$[-\ln 3, \ln 3]\,,$$

es decir, el intervalo $[-1.099, 1.099]$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que la función de distribución de una variable, Y, de Cauchy estándar (véase el ejercicio 9.37) es

$$F_Y(y) = \frac{\text{arctg}\,(y)}{\pi} + \frac{1}{2}\,, \qquad -\infty < y < \infty\,,$$

los cuartiles verifican:

$$F_Y(C_1) = \frac{\text{arctg}\,(C_1)}{\pi} + \frac{1}{2} = 0.25$$

y

$$F_Y(C_3) = \frac{\text{arctg}\,(C_3)}{\pi} + \frac{1}{2} = 0.75\,,$$

de lo cual se obtiene que $C_1 = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ y $C_3 = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, siendo el intervalo intercuartílico $[-1, 1]$.

De todo ello se deduce que el 50 % central de los valores en una variable de Cauchy estándar y en una variable logística estándar se encuentran más o menos igualmente concentrados. De hecho, el recorrido intercuartílico es de 2 para la distribución de Cauchy, y de 2.197 para la logística.

Ejercicio 9.48.

El primer decil, d_1, valor de la variable que deja a su izquierda el 10 % de la probabilidad, se obtiene igualando la función de distribución, hallada en el ejercicio anterior, a 0.10; así,

$$F_Y(d_1) = 0.10\,,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{1+e^{-d_1}} = 0.10 ,$$

resultando

$$d_1 = -\ln 9 = -2.20 .$$

Igualmente, se obtiene el i-ésimo decil ($i = 2, 3, \ldots, 9$) resolviendo la ecuación

$$F_Y(d_i) = \frac{i}{10} .$$

Entonces,

$$\begin{array}{llllll} d_1 = -2.20, & d_2 = -1.39, & d_3 = -0.85, & & d_4 = -0.40, & d_5 = 0, \\ d_6 = 0.40, & d_7 = 0.85, & d_8 = 1.39 & \text{y} & d_9 = 2.20 . & \end{array}$$

Hallemos, ahora, los deciles de una distribución $N(0,1)$, buscando en las tablas de la normal tipificada los valores d_i ($i = 1, \ldots, 9$) tales que

$$\Phi(d_i) = \frac{i}{10} .$$

De este modo resulta

$$\begin{array}{llllll} d_1 = -1.28, & d_2 = -0.84, & d_3 = -0.52, & & d_4 = -0.25, & d_5 = 0, \\ d_6 = 0.25, & d_7 = 0.52, & d_8 = 0.84, & \text{y} & d_9 = 1.28 . & \end{array}$$

Obsérvese que la simetría de la distribución logística y de la normal hacen que los deciles también presenten una estructura simétrica.

Como puede comprobarse comparando los deciles para ambas distribuciones, la distribución logística estándar no sólo está más dispersa globalmente que la normal estándar (la varianza de aquélla es $\frac{\pi^2}{3}$, mientras que la de ésta es 1), sino que esa dispersión es mayor a lo largo de todos los valores reales.

Capítulo 10

DISTRIBUCIONES RELACIONADAS CON LA NORMAL

Describamos algunas distribuciones continuas, construidas a partir de la distribución normal, que, aunque pueden ser usadas como distribuciones tipo, no fueron diseñadas con este objetivo, sino para asignar medidas probabilísticas a las variables aleatorias que aparecen en los procedimientos de estimación bajo supuestos de normalidad.

• Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución $N(0,1)$, la variable

$$X = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$

sigue una **distribución** χ^2 (ji-cuadrado) con n grados de libertad. Lo indicaremos como $X \hookrightarrow \chi_n^2$.

La distribución χ_n^2 es una gamma, en concreto, una $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Por tanto, su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

En el anexo final del libro se recoge una tabla con los valores de la función de distribución de una χ^2 para distintos grados de libertad, que permite hallar sus probabilidades.

Sus principales momentos, así como su función característica son:

$$E(X) = n\,, \qquad \text{Var}\ (X) = 2n \qquad \text{y} \qquad \varphi_X(t) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}\,.$$

La reproductividad de las variables gamma garantiza la de las χ^2; es decir, la suma de variables χ^2 independientes sigue una distribución χ^2 cuyo número de grados de libertad es la suma de los grados de libertad de los sumandos.

• Si X y $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución $N(0,1)$, la variable

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}}}$$

tiene una **distribución t de Student** con n grados de libertad. De forma abreviada, $T \hookrightarrow t_n$.

Una definición equivalente de esta distribución de probabilidad es la siguiente: si X es una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$, Y una variable aleatoria con distribución χ^2_n, y X e Y son independientes, la variable

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

sigue una distribución t de Student con n grados de libertad.

La función de densidad de esta variable es

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad -\infty < t < \infty\,.$$

Su función de distribución está tabulada (véase el anexo final del libro). Los principales momentos son:

$$E(X) = 0 \quad (\text{ si } n > 1) \qquad \text{y} \qquad \text{Var}\,,(X) = \frac{n}{n-2} \quad (\text{si } n > 2)\,.$$

• Si $X_1, \ldots, X_{n_1}$ e $Y_1, \ldots, Y_{n_2}$ son variables aleatorias independientes con distribución $N(0,1)$, la variable

$$U = \frac{\frac{X_1^2+\cdots+X_{n_1}^2}{n_1}}{\frac{Y_1^2+\cdots+Y_{n_2}^2}{n_2}}$$

tiene una **distribución F de Snedecor** con n_1 y n_2 grados de libertad; lo denotaremos de forma abreviada como $U \hookrightarrow F_{n_1,n_2}$.

Enunciemos una definición equivalente: si X e Y son variables aleatorias independientes con distribuciones χ^2 de n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente, la variable

$$U = \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}}$$

sigue una distribución F de Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad.

La función de densidad es

$$f_U(u) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n_2}{2})} \cdot n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}} \cdot u^{\frac{n_1}{2}-1} \cdot (n_2 + n_1 u)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},$$

para $u > 0$, anulándose en el resto.

La función de distribución de una F de Snedecor está tabulada. Las tablas que aparecen en el anexo final de este libro proporcionan los valores de la variable F de Snedecor en los cuales la función de distribución vale 0.90, 0.95 y 0.99, para distintos grados de libertad de numerador y denominador.

Los principales momentos son:

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2} \quad (\text{si } n_2 > 2) \quad \text{y} \quad \text{Var } (X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 4)\,(n_2 - 2)^2} \quad (\text{si } n_2 > 4).$$

Si X sigue una distribución F_{n_1,n_2}, la variable $Y = \frac{1}{X}$ tiene una distribución F_{n_2,n_1}.

Ejercicios propuestos

10.1. Compruébese que si X sigue una distribución exponencial negativa de parámetro a, la variable $2aX$ es una χ^2 con 2 grados de libertad.

10.2. Hállese el intervalo intercuartílico de la distribución χ^2_{15}.

10.3. Demuéstrese que una distribución exponencial negativa de media 2 coincide con una distribución χ^2_2.

10.4. Sea X una variable aleatoria con distribución χ^2. Estúdiese el crecimiento y decrecimiento de su función de densidad y determínese la moda.

10.5. Obténgase la mediana de la distribución χ^2 con 10 grados de libertad y compárese con la moda y la media.

10.6. Una modista tarda una media de 6 minutos en zurcir un calcetín. Sabiendo que el tiempo que emplea en realizar esta labor es una variable aleatoria con distribución gamma de parámetros a y p, siendo $p = 1$, calcúlese el porcentaje de calcetines en los que tarda más de 18 minutos.

10.7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución $N(0, \sigma)$. Obténgase la distribución de la media de sus cuadrados:

$$Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$

10.8. Una niña coge todos los días el autobús para ir al colegio en una parada que está frente a su casa. El tiempo de espera diaria es una variable aleatoria exponencial negativa de media 5 minutos.

Su madre, convencida de que no es necesario que salga tan pronto de casa, decide hacer un análisis más detallado de la situación y anota los tiempos de espera de la niña durante 50 días. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de espera sea superior a 3.5 minutos?

10.9. El tiempo que un funcionario emplea en atender a una persona es una variable aleatoria con distribución exponencial negativa de media 4 minutos. Delante de un individuo hay una cola formada por 10 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 31 minutos hasta que le toque el turno?

10.10. Obténgase el séptimo decil y el quinto percentil de una distribución t de Student con 13 grados de libertad.

10.11. Sea X una variable con distribución t de Student con 20 grados de libertad. Hállese el intervalo real, (a, b), más pequeño y el más grande para los cuales $p[X \in (a, b)] = 0.30$.

¶ **10.12.** Sea X una variable aleatoria con distribución t de Student con n grados de libertad.

a) Calcúlese $E[|X|]$ para $n = 1$ y para $n > 1$.

b) Demuéstrese que, para $n > 1$, $E(X) = 0$.

10.13. Sea X una variable aleatoria con distribución t de Student con n grados de libertad. Demuéstrese que $Y = X^2$ sigue una distribución F de Snedecor con 1 y n grados de libertad.

10.14. Calcúlese el noveno decil y el quinto percentil de una distribución $F_{9,10}$.

10.15. Sea X una variable aleatoria con distribución F de Snedecor. Estúdiese el crecimiento y decrecimiento de su función de densidad y obténgase la moda.

10.16. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución $\gamma(a, p_1)$ y $\gamma(a, p_2)$, respectivamente, tales que $2p_1$ y $2p_2$ son números enteros. Hállese la distribución de $\frac{p_2 X_1}{p_1 X_2}$.

10.17. ¿Qué condición debe cumplir una distribución F de Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad para que el m-ésimo percentil ($m = 1, \ldots, 99$) sea el inverso del $(100 - m)$-ésimo percentil?

10.18. Sean $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ y $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución exponencial negativa. Sean las medias muestrales

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}{n_1} \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}}{n_2}$$

Obténgase la distribución de su cociente, $\frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2}$.

10.19. Un médico cuya especialidad son los problemas de exceso de peso, somete a sus clientes a un nuevo tratamiento. La aplicación de dicho tratamiento en clínicas francesas determina que la proporción de pacientes en los que se produce una reducción de peso es una variable aleatoria beta de parámetros $p = 10$ y $q = 5$. Determínese la probabilidad de que tal proporción sea mayor que 0.8 para los clientes de este médico.

10.20. Sean $X_{1,1}, \ldots, X_{1,8}$ y $X_{2,1}, \ldots, X_{2,6}$, variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución $N(0,1)$.

a) Si

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_{1,i}}{8} \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} X_{2,i}}{6},$$

hállese $p\left[\overline{X}_1 \geq k\overline{X}_2\right]$.

b) Si

$$\overline{X}_{C_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} X_{1,i}^2}{8}} \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_{C_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6} X_{2,i}^2}{6}},$$

determínese el valor de k tal que $p\left[\overline{X}_{C_1} \geq k\overline{X}_{C_2}\right] = 0.10$.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 10.1.
La distribución exponencial negativa es un caso particular de la distribución gamma; en concreto, una exponencial negativa de parámetro a es una distribución $\gamma(a,1)$.

Por otro lado, si una variable con distribución $\gamma(a,p)$ se multiplica por una constante, k, la variable resultante, $k \cdot X$, sigue una distribución $\gamma(\frac{a}{k}, p)$. El resultado es, por tanto, inmediato, ya que

$$2aX \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, 1\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) \equiv \chi_2^2 .$$

Ejercicio 10.2.
Sea X una variable con distribución χ_{15}^2. Busquemos dos valores C_1 y C_3, primer y tercer cuartil, respectivamente, que verifiquen:

$$p[X \leq C_1] = 0.25 \qquad \text{y} \qquad p[X \leq C_3] = 0.75 .$$

Con la ayuda de las correspondientes tablas, se obtiene

$$C_1 = 11 \qquad \text{y} \qquad C_3 = 18.2\,.$$

En consecuencia, el intervalo intercuartílico es $[11, 18.2]$.

La gráfica de la función de densidad de una distribución χ^2_{15} de la figura 10.1 describe este intervalo y su probabilidad.

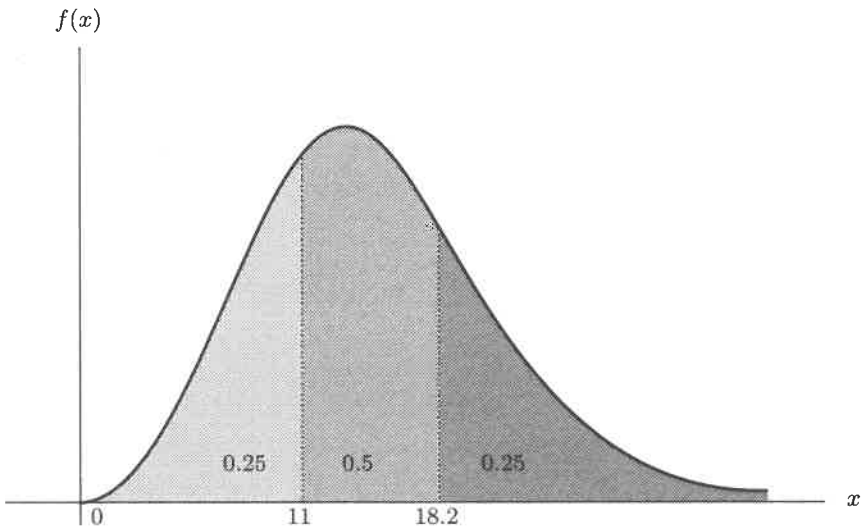


FIG. 10.1.

Ejercicio 10.3.
Como $E(X) = 2$, la variable X sigue una distribución $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$ y, al igual que en el ejercicio 10.1,

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, 1\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) \equiv \chi^2_2 \,.$$

Ejercicio 10.4.
Estudiemos el comportamiento de la función de densidad para los distintos grados de libertad.

Si $n = 1$, teniendo en cuenta que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, la función de densidad de una χ^2_1 es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

La derivada de esta función, para $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \left(x^{-1} + 1\right) < 0 \,,$$

es negativa; se trata, por tanto, de una función decreciente en los valores de la variable. Su representación gráfica en la figura 10.2, muestra este hecho.

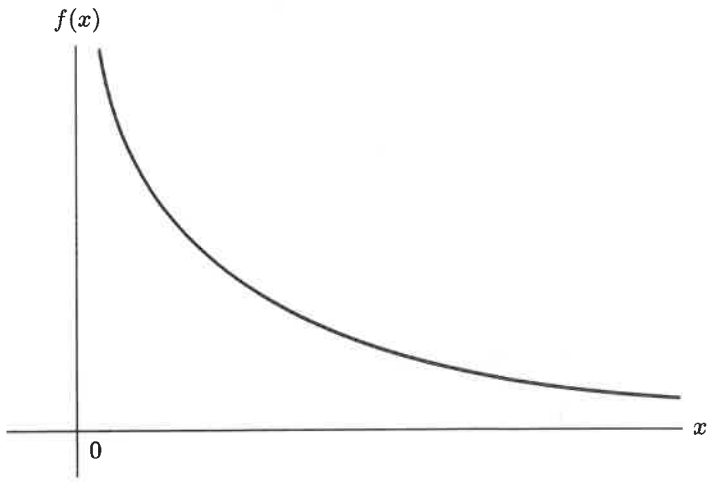


FIG. 10.2.

Si $n = 2$, la función de densidad de una distribución χ^2_2 es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Entonces, su derivada, para $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \,,$$

es siempre negativa; luego, también, esta función es decreciente, como revela su representación gráfica en la figura 10.3.

Obsérvese que no existe la moda en ninguno de los dos casos estudiados, ya que la función de densidad no tiene máximo; si $n = 2$, al menos tiene un extremo superior, el valor $\frac{1}{2}$, pero para $n = 1$ no tiene tampoco dicho extremo.

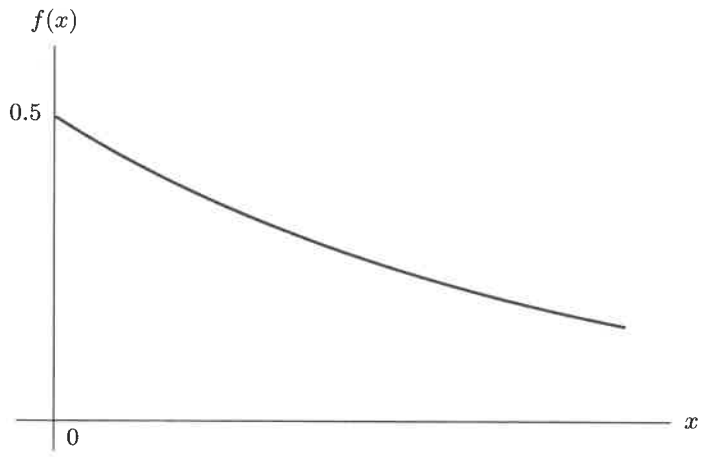


FIG. 10.3.

Para $n > 2$, la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

siendo su primera derivada, para $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{2\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{x}{2}} \left[(n-2) - x\right] .$$

Esta primera derivada es positiva si $[(n-2)-x] > 0$; por tanto, la función de densidad es creciente para $x < (n-2)$. Asimismo, la derivada es negativa si $[(n-2)-x] < 0$, siendo f decreciente para $x > (n-2)$. Obviamente, la moda es el punto en que la función pasa de creciente a decreciente, es decir, $Mo = n-2$, valor en el que se anula f', y la segunda derivada,

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{4\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{x}{2}} \left[x^2 - 2x(n-2) + (n-2)\,(n-4)\right] ,$$

toma un valor negativo.

La gráfica de la función de densidad de una distribución χ^2_n, con $n > 2$ (véase la figura 10.4), pone en evidencia lo anteriormente descrito.

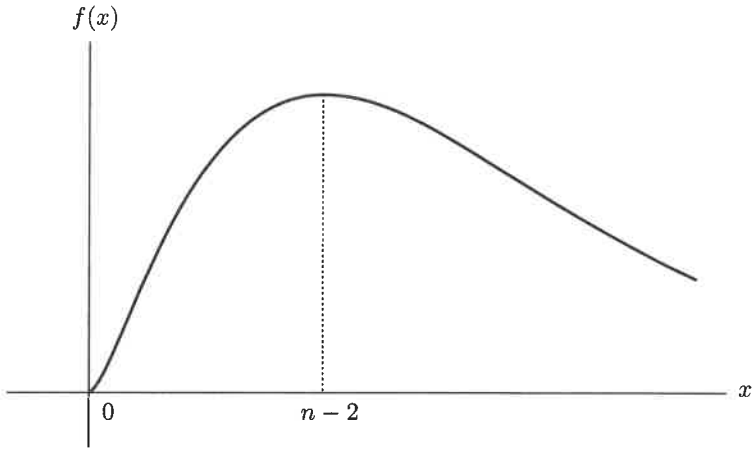


FIG. 10.4.

Ejercicio 10.5.

Busquemos el valor Me que verifique

$$p[X \leq Me] = 0.5 \,,$$

donde X sigue una distribución χ^2_{10}. Consultando en las tablas, se obtiene $Me = 9.34$.

Además, según se demostró en el ejercicio anterior, $Mo = n - 2 = 8$, y, como es conocido, $E(X) = n = 10$.

Por tanto, para esta distribución,

$$Mo < Me < E(X) \,.$$

Ejercicio 10.6.

Sea X la variable *'tiempo que tarda la modista en zurcir un calcetín.* Sabemos que $E(X) = 6$, donde X sigue una distribución $\gamma(a, 1)$. Como la esperanza de una $\gamma(a, p)$ es $\frac{p}{a}$, se deduce que $a = \frac{1}{6}$, con lo cual $X \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{6}, 1) \equiv \mathcal{E}(\frac{1}{6})$. En definitiva, la probabilidad pedida es

$$p[X > 18] = \int_{18}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot e^{-\frac{x}{6}} \, dx = e^{-\frac{18}{6}} = 0.0498 \,,$$

esto es, en el 4.98 % de los calcetines tarda más de 5 minutos.

Esta probabilidad puede hallarse, también, transformando la distribución de X, una gamma, en una distribución χ^2. Así, como $X \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{6}, 1\right)$, entonces,

$$Y = \frac{X}{3} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{3}{6}, 1\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right) \equiv \chi^2_2 \,.$$

De esta forma,

$$p[X > 18] = p\left[\frac{X}{3} > 6\right] = 1 - p[Y \leq 6] \approx 1 - 0.95 = 0.05 \ ,$$

consultando en las tablas de la distribución χ^2 con 2 grados de libertad.

Ejercicio 10.7.
Cada variable X_i, $i = 1, \ldots, n$, sigue una distribución $N(0, \sigma)$; luego, tipificando, la distribución de la variable $\frac{X_i}{\sigma}$ es $N(0,1)$. Por tanto, sus cuadrados son distribuciones χ_1^2 y, al ser independientes, la suma de éstos tiene una distribución χ^2 con n grados de libertad, el número de variables sumadas. Así, la variable

$$\frac{X_1^2}{\sigma^2} + \cdots + \frac{X_n^2}{\sigma^2} = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{\sigma^2}$$

sigue una distribución χ_n^2, es decir, una $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Por tanto, si se multiplica dicha variable por una constante, la variable que resulta tiene, también, una distribución gamma,

$$X_1^2 + \cdots + X_n^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{n}{2}\right) \ ,$$

y, en definitiva,

$$Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{n}{2\sigma^2}, \frac{n}{2}\right) \ .$$

Ejercicio 10.8.
Al ser la media igual a 5 minutos, la variable *tiempo de espera diario* sigue una distribución $\mathcal{E}(\frac{1}{5})$, es decir, una $\gamma(\frac{1}{5}, 1)$. Se consideran las variables $X_1, \ldots, X_{50}$, tiempos de espera en 50 días, variables que son independientes e igualmente distribuidas $\gamma(\frac{1}{5}, 1)$. Por tanto, su media muestral tiene, también, una distribución gamma; en concreto,

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_{50}}{50} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{50}{5}, 50\right) \equiv \gamma(10, 50) \ .$$

Entonces, la probabilidad de que *el tiempo medio de espera sea superior a 3.5 minutos* es

$$p\left[\overline{X} > 3.5\right] = \int_{x=3.5}^{\infty} \frac{10^{50}}{\Gamma(50)} \cdot x^{49} e^{-10x} dx \ ,$$

integral cuya resolución resulta muy farragosa. Pueden evitarse estos cálculos encontrando una variable, función de $\overline{X}$, cuya distribución facilite la obtención de resultados.

Así, considerando que ciertas variables gammas pueden transformarse en χ^2 multiplicando por constantes adecuadas, se tiene, en este caso,

$$Y = 20 \cdot \overline{X} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, 50\right) \equiv \chi_{100}^2 \ .$$

De esta forma, la probabilidad pedida es

$$p\left[\overline{X} > 3.5\right] = p\left[20 \cdot \overline{X} > 70\right] = 1 - p[Y \leq 70] = 1 - 0.01 = 0.99 \ ,$$

sin más que consultar la tabla de la distribución χ^2 con 100 grados de libertad ($p[Y \leq 70.1] = 0.01$, donde $Y \hookrightarrow \chi^2_{100}$).

Ejercicio 10.9.
Consideremos la variable X_i, $i = 1, \ldots, 10$, *tiempo que se emplea en atender al individuo i-ésimo que está por delante en la cola.* Por tanto, la variable $Y = X_1 + \cdots + X_{10}$ representa el *tiempo que le falta al individuo para ser atendido.* La probabilidad que hemos de hallar es

$$p[Y > 31] .$$

Veamos cuál es la distribución de Y. Dado que X_i sigue una distribución exponencial negativa de media 4, también puede considerarse como una gamma. Así,

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{4}\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{4}, 1\right) .$$

Entonces, teniendo en cuenta la propiedad reproductiva de las distribuciones gamma,

$$Y = X_1 + \cdots + X_{10} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{4}, 10\right) .$$

Ahora bien, la función de densidad de esta gamma no sirve para obtener la probabilidad pedida, pues no tiene primitiva. Hay dos alternativas: buscar el valor de la probabilidad en las tablas correspondientes (no disponibles en este libro) o convertir la gamma en una χ^2, hecho que, en este caso, es posible, y buscar en sus tablas, siempre más asequibles, el valor de la probabilidad.

Así, multiplicando convenientemente una variable gamma, puede obtenerse una χ^2. La distribución de $U = \frac{1}{2} \cdot Y$ es, entonces,

$$U = \frac{1}{2} \cdot Y \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, 10\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{20}{2}\right) \equiv \chi^2_{20} .$$

Por tanto,

$$p[Y > 31] = p\left[\frac{Y}{2} > 15.5\right] = 1 - p[U \leq 15.5] .$$

Las tablas de la χ^2 proporcionan el valor de la función de distribución de una χ^2 con 20 grados de libertad en el punto 15.5; esta probabilidad es 0.25.

Entonces, la probabilidad de que *la persona tenga que esperar más de 31 minutos* es 0.75.

Ejercicio 10.10.
Se trata de calcular, para una variable aleatoria X con distribución t_{13}, los valores d_7 y p_5 que dejan a su izquierda el 70 % y el 5 % de la probabilidad, respectivamente. Así,

$$p[X \leq d_7] = 0.7$$

y, consultando las correspondientes tablas, se obtiene $d_7 = 0.538$, valor del séptimo decil.

Por otra parte, teniendo en cuenta la simetría de la función de densidad de una distribución t de Student,

$$p[X \leq p_5] = p[X \geq -p_5] = 1 - p[X \leq -p_5] = 0.05 .$$

Entonces,

$$p[X \leq -p_5] = 0.95 \,,$$

de lo cual, mediante las tablas, se deduce el quinto percentil, $p_5 = -1.77$.

En la figura 10.5 se representa la función de densidad de una distribución t de Student con 13 grados de libertad, marcando los dos cuantiles calculados.

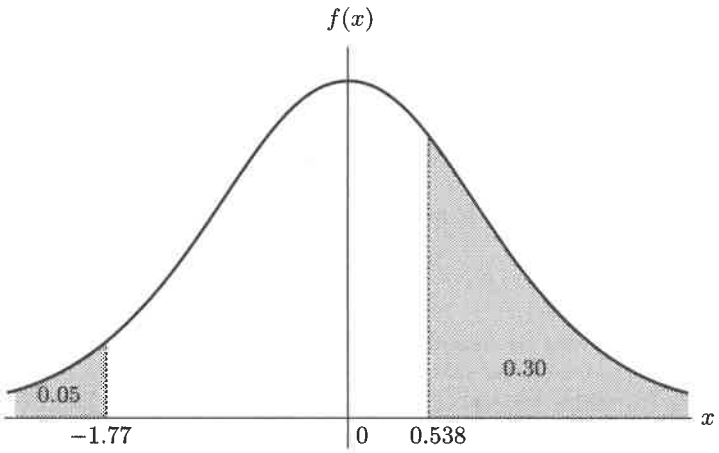


FIG. 10.5.

Ejercicio 10.11.
Sea X una variable con distribución t_{20}; se trata de buscar un intervalo (a, b) tal que

$$p[a < X < b] = 0.30 \,.$$

La función de densidad de la distribución t de Student es simétrica respecto del cero. Entonces, el intervalo de longitud mínima está, evidentemente, centrado en cero, pues es en ese punto donde más probabilidad se acumula por unidad de longitud; consecuentemente, $a = -b$. Obtengamos el valor de b, teniendo en cuenta la simetría de la función de distribución. Así,

$$p[-b < X < b] = F_X(b) - F_X(-b) = F_X(b) - [1 - F_X(b)] = 2 \cdot F_X(b) - 1 = 0.30 \,,$$

con lo cual, $F_X(b) = 0.65$. Las tablas de la distribución t de Student proporcionan el valor $b = 0.391$. Luego el intervalo de longitud mínima que contiene el 30 % de probabilidad para una t_{20} es $(-0.391, 0.391)$.

El intervalo de longitud máxima es aquel en el que uno de los dos extremos es infinito; es decir, buscamos un intervalo del tipo (a, ∞) o bien del tipo $(-\infty, b)$.

En el primer caso,

$$p[a < X < \infty] = \lim_{x \to \infty} F_X(x) - F_X(a) = 1 - F_X(a) = 0.30$$

o, lo que es lo mismo, $F_X(a) = 0.70$, obteniéndose en las tablas el valor $a = 0.533$. En consecuencia, $(0.533, \infty)$ es el intervalo de longitud máxima que contiene el 30 % de probabilidad; también lo es, obviamente, el intervalo $(-\infty, -0.533)$.

Ejercicio 10.12.

a) Si $n = 1$, la función de densidad de una distribución t_1 es

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,,$$

es decir, la de una distribución de Cauchy estándar. Entonces,

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{0} (-x) \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx + \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\left[-\ln(1+x^2)\right]_{x=-\infty}^{0} + \left[\ln(1+x^2)\right]_{x=0}^{\infty}\right]\,, \end{aligned}$$

suma de integrales no convergentes. Por tanto, $E(|X|)$ no existe.

Para $n > 1$, la función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

Entonces,

$$E(|X|) = \int_{x=-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\, dx = \int_{x=-\infty}^{0} (-x)\, f_X(x)\, dx + \int_{x=0}^{\infty} x f_X(x)\, dx\,.$$

Haciendo el cambio de variable $x = -t$ en la primera integral,

$$\begin{aligned} E(|X|) &= \int_{t=\infty}^{0} t\, f_X(-t)\, (-dt) + \int_{x=0}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \\ &= \int_{t=0}^{\infty} t\, f_X(t)\, dt + \int_{x=0}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = 2\int_{x=0}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx\,, \end{aligned}$$

pues f_X es simétrica respecto del cero, esto es, $f_X(-t) = f_X(t)$. Por tanto, haciendo un nuevo cambio de variable, $\frac{x^2}{n} = u$, resulta

$$\begin{aligned} E(|X|) &= 2 \cdot \int_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}\, dx = \\ &= \frac{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{u=0}^{\infty} \frac{1}{(1+u)^{\frac{n+1}{2}}}\, du = \\ &= \frac{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left[-\frac{2}{n-1} \cdot \frac{1}{(1+u)^{\frac{n+1}{2}-1}} \right]_{u=0}^{\infty} = \\ &= \frac{\sqrt{n}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{2}{n-1} \,. \end{aligned}$$

b) Para $n > 1$ existe la esperanza de X, dado que $E(|X|)$ es finita, según acabamos de probar en el apartado anterior. Entonces, como f_X es simétrica respecto del cero,

$$E(X) = 0 \,.$$

Ejercicio 10.13.
Si X sigue una distribución t de Student con n grados de libertad, puede escribirse como

$$X = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}} \,,$$

donde $U \hookrightarrow N(0,1)$ y $V \hookrightarrow \chi^2_n$, siendo U y V independientes. Por tanto,

$$Y = X^2 = \frac{U^2}{V/n} = \frac{W/1}{V/n} \,,$$

donde $W = U^2$ y V siguen distribuciones χ^2 con 1 y n grados de libertad, respectivamente, y son independientes. Obviamente,

$$Y = X^2 \hookrightarrow F_{1,n} \,.$$

Ejercicio 10.14.
Sea X una variable con distribución F de Snedecor con 9 y 10 grados de libertad. Calculemos el valor d_9 que deja a su izquierda el 90 % de la probabilidad, esto es,

$$p[X \leq d_9] = 0.90 \,.$$

Consultando las tablas correspondientes a los percentiles de orden 0.90, se obtiene $d_9 = 2.3473$.

De la misma forma, se halla un valor p_5 tal que

$$p[X \leq p_5] = 0.05 \,.$$

Según puede comprobarse, las tablas disponibles proporcionan únicamente los valores de los percentiles de orden 0.90, 0.95 y 0.99. Ahora bien, teniendo en cuenta que si X sigue una distribución $F_{9,10}$, la variable $Y = \frac{1}{X}$ es una $F_{10,9}$, entonces,

$$p[X \leq p_5] = p\left[\frac{1}{X} \geq \frac{1}{p_5}\right] = 1 - p\left[Y \leq \frac{1}{p_5}\right] = 0.05 .$$

De aquí,

$$p\left[Y \leq \frac{1}{p_5}\right] = 0.95$$

y, consultando las tablas correspondientes se obtiene $\frac{1}{p_5} = 3.1373$, es decir, $p_5 = 0.3187$, valor del quinto percentil.

Ejercicio 10.15.
Sea X una variable con distribución F_{n_1,n_2}. Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \cdot n_1^{\frac{n_1}{2}} \cdot n_2^{\frac{n_2}{2}} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_2+n_1x)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} ,$$

para $x > 0$, anulándose en el resto. Denotando por C el término constante de esta función, la primera derivada, para $x > 0$, es

$$f'(x) = C \cdot \frac{x^{\frac{n_1}{2}-2}}{(n_2+n_1x)^{\frac{n_1+n_2}{2}+1}} \left[n_2\left(\frac{n_1}{2}-1\right) - n_1\left(\frac{n_2}{2}+1\right)x\right] .$$

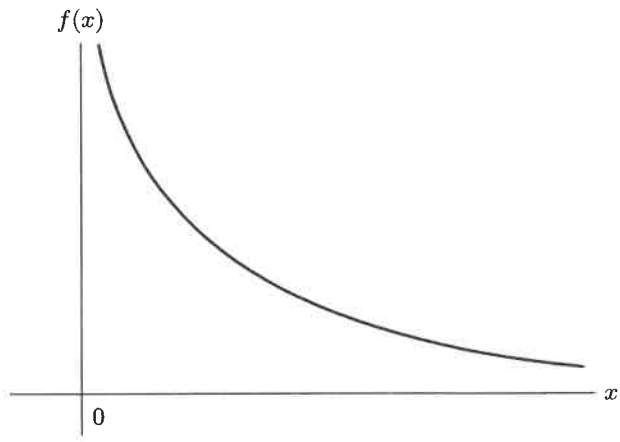


FIG. 10.6.

Si $n_1 = 1$, la derivada resulta

$$f'(x) = C \cdot \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{(n_2 + x)^{\frac{n_2+1}{2}+1}} \left[-\frac{n_2}{2} - \left(\frac{n_2}{2} + 1 \right) x \right] ,$$

que siempre es menor que cero.

Por tanto, la función de densidad es decreciente, como se observa en la figura 10.6.

Si $n_1 = 2$, la derivada,

$$f'(x) = C \cdot \frac{x^{-1}}{(n_2 + 2x)^{\frac{n_2+2}{2}+1}} \left[-2 \left(\frac{n_2}{2} + 1 \right) x \right] ,$$

también es siempre negativa, siendo la función de densidad, cuya gráfica se representa en la figura 10.7, decreciente.

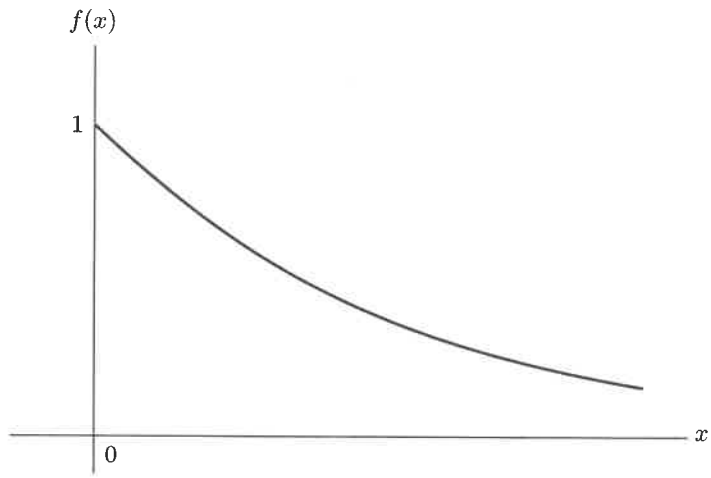


FIG. 10.7.

Por tanto, en los dos casos estudiados hasta ahora no existe moda porque la función de densidad no tiene máximo. Si $n_1 = 2$, la función de densidad tiene al menos extremo superior, mientras que si $n_1 = 1$, no posee ese extremo.

Si $n_1 > 2$, la primera derivada es positiva siempre que $\left[n_2 (\frac{n_1}{2} - 1) - n_1 (\frac{n_2}{2} + 1)\, x \right] > 0$; por tanto, la función de densidad es creciente para los valores de x tales que

$$x < \frac{n_2 (\frac{n_1}{2} - 1)}{n_1 (\frac{n_2}{2} + 1)} = \frac{n_2 (n_1 - 2)}{n_1 (n_2 + 2)} .$$

Asimismo, f' es negativa siempre que $\left[n_2 (\frac{n_1}{2} - 1) - n_1 (\frac{n_2}{2} + 1)\, x \right] < 0$; entonces, f es decreciente para los valores de x que verifiquen

$$x > \frac{n_2 (n_1 - 2)}{n_1 (n_2 + 2)} .$$

Obviamente, la moda es el valor en el que f pasa de ser creciente a decreciente, es decir,

$$Mo = \frac{n_2(n_1 - 2)}{n_1(n_2 + 2)} ,$$

valor menor que la unidad y muy próximo a la misma para grados de libertad grandes. Obsérvese que la media de esta distribución, $E(X) = \frac{n_2}{n_2-2}$, es mayor que la unidad, aproximándose a ella cuando n_2 es grande.

La gráfica de la función de densidad de una F de Snedecor con $n_1 > 2$ recoge los aspectos estudiados (véase la figura 10.8).

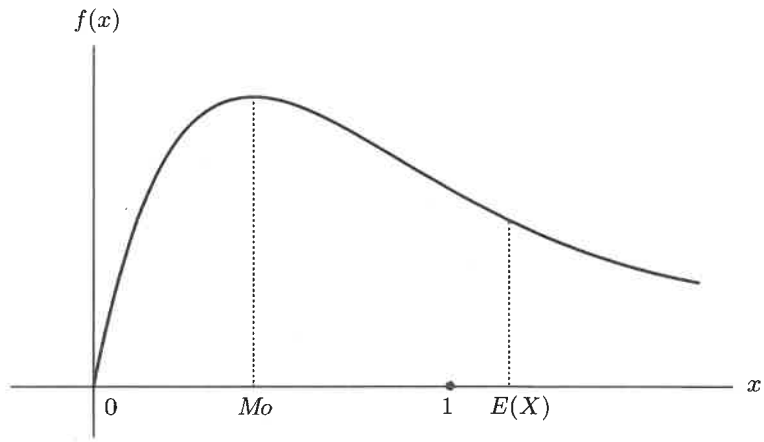


FIG. 10.8.

Ejercicio 10.16.

Dado que cada variable X_i, $i = 1, 2$, sigue una distribución $\gamma(a, p_i)$, es inmediato que

$$2aX_i \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, p_i\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2p_i}{2}\right) \equiv \chi^2_{2p_i} .$$

Teniendo en cuenta que si U y V son dos variables independientes con distribución χ^2 con n_1 y n_2 grados de libertad, respectivamente, entonces,

$$\frac{U/n_1}{V/n_2} \hookrightarrow F_{n_1,n_2} ,$$

se deduce que

$$\frac{\frac{2aX_1}{2p_1}}{\frac{2aX_2}{2p_2}} = \frac{p_2X_1}{p_1X_2} \hookrightarrow F_{2p_1,2p_2} .$$

Ejercicio 10.17.
Sea X una variable con distribución F_{n_1,n_2}. Entonces, los percentiles m-ésimo, p_m, y $(100-m)$-ésimo, p_{100-m}, verifican:

$$p[X \leq p_m] = \frac{m}{100}$$

y

$$p[X \leq p_{100-m}] = \frac{100-m}{100} = 1 - \frac{m}{100} ,$$

respectivamente.

Ahora bien,

$$p[X \leq p_{100-m}] = p\left[\frac{1}{X} \geq \frac{1}{p_{100-m}}\right] = p\left[Y \geq \frac{1}{p_{100-m}}\right] = 1 - \frac{m}{100} ,$$

donde Y sigue una distribución F_{n_2,n_1}. Por tanto,

$$p[X \leq p_m] = \frac{m}{100} \qquad \text{y} \qquad p\left[Y \leq \frac{1}{p_{100-m}}\right] = \frac{m}{100} .$$

Obviamente, dado que las dos probabilidades anteriores son iguales entre sí, para que p_m coincida con $\frac{1}{p_{100-m}}$ ha de cumplirse que las variables X e Y tengan la misma distribución. Este hecho ocurre únicamente cuando $n_1 = n_2$.

Ejercicio 10.18.
Cada una de las variables $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ sigue una distribución $\mathcal{E}(\theta)$ o, lo que es lo mismo, una distribución $\gamma(\theta, 1)$, siendo, además, independientes. La propiedad reproductiva de la distribución gamma permite asegurar que

$$\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} \hookrightarrow \gamma(\theta, n_1) ,$$

de donde

$$\overline{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i}}{n_1} \hookrightarrow \gamma(n_1\,\theta, n_1) .$$

Multiplicando $\overline{X}_1$ por una constante apropiada, se obtiene una variable con distribución χ^2; en concreto,

$$2n_1\,\theta\,\overline{X}_1 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, n_1\right) \equiv \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{2n_1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2n_1} .$$

En idéntico sentido,

$$2n_2\,\theta\,\overline{X}_2 \hookrightarrow \chi^2_{2n_2} ,$$

siendo, además, $2n_1\theta\overline{X}_1$ y $2n_2\theta\overline{X}_2$ independientes, al serlo las variables que forman $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$.

En consecuencia,

$$\frac{\frac{2n_1\,\theta\,\overline{X}_1}{2n_1}}{\frac{2n_2\,\theta\,\overline{X}_2}{2n_2}} \hookrightarrow F_{2n_1,2n_2} ,$$

es decir,

$$\frac{\overline{X}_1}{\overline{X}_2} \hookrightarrow F_{2n_1,2n_2} .$$

Ejercicio 10.19.
Si X es la variable que expresa la *proporción de clientes que reducen peso*, variable que sigue una distribución $\beta(10,5)$, entonces,

$$p[X > 0.8] = \int_{0.8}^{1} \frac{\Gamma(15)}{\Gamma(10)\,\Gamma(5)} \cdot x^9(1-x)^4\,dx ,$$

probabilidad que, resolviendo la integral polinómica, es igual a 0.1298.

Este resultado puede obtenerse, también, utilizando una propiedad que relaciona las distribuciones beta y F de Snedecor; en concreto, si X es una variable $\beta(p,q)$, con $2p$ y $2q$ números enteros, la variable $Y = \frac{qX}{p(1-X)}$ sigue una distribución F de Snedecor con $2p$ y $2q$ grados de libertad. En este caso, como X es una $\beta(10,5)$,

$$Y = \frac{5X}{10(1-X)} = \frac{X}{2(1-X)} \hookrightarrow F_{20,10} .$$

Expresando X en función de Y,

$$X = \frac{2Y}{1+2Y} ,$$

y despejando Y en la probabilidad pedida, resulta:

$$p[X > 0.8] = p\left[\frac{2Y}{1+2Y} > 0.8\right] = p[0.4Y > 0.8] =$$

$$= p[Y > 2] \approx 1 - 0.90 = 0.10 ,$$

dado que en las tablas de la F de Snedecor encontramos que, para $n_1 = 20$ y $n_2 = 10$, el percentil 90 es 2.2007, valor relativamente próximo a 2.

Ejercicio 10.20.
a) La media muestral de variables independientes e igualmente distribuidas $N(\mu,\sigma)$ es también normal, en concreto, $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Entonces,

$$\overline{X}_1 \hookrightarrow N\left(0, \frac{1}{\sqrt{8}}\right) \qquad \text{y} \qquad \overline{X}_2 \hookrightarrow N\left(0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) ,$$

siendo $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ independientes por serlo sus componentes. En consecuencia,

$$p[\overline{X}_1 \geq k\overline{X}_2] = p[\overline{X}_1 - k\overline{X}_2 \geq 0] = 0.5$$

sea cual sea k, ya que la distribución de $\overline{X}_1 - k\overline{X}_2$, combinación lineal de normales independientes, es asimismo normal,

$$\overline{X}_1 - k\overline{X}_2 \hookrightarrow N\left(0, \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{k^2}{6}}\right) ,$$

distribución centrada en cero.

b) Dado que $X_{1,i}$, $i = 1, \ldots, 8$, sigue una distribución $N(0,1)$, su cuadrado, $X_{1,i}^2$, tiene una distribución χ_1^2. Como $X_{1,1}, \ldots, X_{1,8}$ son independientes, entonces, por la reproductividad de la distribución χ^2,

$$\sum_{i=1}^{8} X_{1,i}^2 \hookrightarrow \chi_8^2 .$$

Puesto que

$$\overline{X}_{C_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} X_{1,i}^2}{8}} ,$$

elevando al cuadrado, se deduce que

$$\sum_{i=1}^{8} X_{1,i}^2 = 8 \cdot \bar{X}_{C_1}^2 .$$

Por tanto, la variable $8 \cdot \bar{X}_{C_1}^2$ sigue una distribución χ^2 con 8 grados de libertad. Del mismo modo, $6 \cdot \bar{X}_{C_2}^2$ sigue una distribución χ_6^2, siendo estas dos variables independientes. Entonces,

$$\frac{\frac{8\bar{X}_{C_1}^2}{8}}{\frac{6\bar{X}_{C_2}^2}{6}} = \frac{\bar{X}_{C_1}^2}{\bar{X}_{C_2}^2} \hookrightarrow F_{8,6} .$$

Utilizaremos este resultado para hallar el valor de k. Así,

$$p\left[\bar{X}_{C_1} \geq k\bar{X}_{C_2}\right] = p\left[\bar{X}_{C_1}^2 \geq k^2 \bar{X}_{C_2}^2\right] = p\left[\frac{\bar{X}_{C_1}^2}{\bar{X}_{C_2}^2} \geq k^2\right] = 0.10 ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$p\left[\frac{\bar{X}_{C_1}^2}{\bar{X}_{C_2}^2} \leq k^2\right] = 0.90 .$$

Las tablas de los percentiles de orden 0.90 de una distribución F de Snedecor proporcionan, para $n_1 = 8$ y $n_2 = 6$ grados de libertad, el valor 2.9830. En consecuencia, $k^2 = 2.9830$, es decir, $k = 1.7271$.

Capítulo 11

DISTRIBUCIÓN NORMAL n-DIMENSIONAL

Veamos un importante modelo de distribución continua n-variante: la distribución normal n-dimensional.

• La variable aleatoria n-dimensional $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ sigue una **distribución normal n-dimensional** de parámetros μ y Σ, con $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$ $(-\infty < \mu_i < \infty$, para $i = 1, \ldots, n)$ y $\Sigma = (\sigma_{ij})$, matriz simétrica y definida positiva, si su función de densidad es

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}[(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)]} ,$$

para $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. Lo denotaremos por $\mathbf{X} \hookrightarrow N_n(\mu, \Sigma)$.

Si μ es una matriz columna de ceros y Σ la matriz identidad, resulta la **distribución normal n-dimensional estándar**, $\mathbf{Y} \hookrightarrow N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, que es la distribución conjunta de n variables, $Y_1, \ldots, Y_n$, normales estándar, $N(0, 1)$, e independientes.

Las variables $\mathbf{X}$, con distribución $N_n(\mu, \Sigma)$, e $\mathbf{Y}$, $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ se relacionan por la expresión $\mathbf{X} = \mathbf{AY} + \mu$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n no singular tal que $\Sigma = \mathbf{AA}'$.

La esperanza de $\mathbf{X}$ es

$$E(\mathbf{X}) = \mu ,$$

su matriz de varianzas-covarianzas,

$$V(\mathbf{X}) = \Sigma$$

y su función característica

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu - \frac{1}{2}\cdot\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t}} ,$$

donde $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)'$.

Recordemos algunos resultados importantes de la distribución normal n-dimensional.

1. Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria $N_n(\mu, \Sigma)$ y sean dos matrices de números reales, $\mathbf{B}$, de dimensión $p \times n$, y $\mathbf{C}$, de dimensión $p \times 1$. Entonces, la variable aleatoria p-dimensional $\mathbf{Z} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{C}$ tiene una distribución $N_p(\mathbf{B} \cdot \mu + \mathbf{C}, \mathbf{B} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{B}')$, siempre que $\mathbf{B} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{B}'$ sea una matriz definida positiva.

Para que $\mathbf{B} \cdot \Sigma \cdot \mathbf{B}'$ sea definida positiva, $\mathbf{B}$, matriz de dimensión $p \times n$, debe ser de rango p. Por tanto, dada una variable aleatoria normal de dimensión n, por transformaciones lineales de la misma pueden encontrarse normales de dimensión igual o inferior, pero nunca de dimensión mayor. En el caso en que se construya una variable de igual o menor dimensión, para que ésta sea una normal ha de exigirse que ninguna de las variables que la componen pueda ponerse como combinación lineal del resto.

2. Si $\mathbf{X}$ es una variable aleatoria normal n-dimensional, la variable aleatoria formada por cualquier subconjunto de k variables de las n iniciales, sigue una distribución normal k-dimensional. En concreto, cada una de sus componentes es normal unidimensional.

En cambio, si las distribuiciones marginales de una variable n-dimensional son normales, su distribución conjunta no tiene por qué ser una normal n-dimensional. Pero, si las distribuciones marginales, además de normales, son independientes, queda garantizada la normalidad de la distribución conjunta.

3. Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria n-dimensional, con esperanza μ y matriz de varianzas-covarianzas Σ, simétrica y definida positiva. La variable aleatoria $\mathbf{X}$ sigue una distribución normal n-dimensional si, y sólo si, cualquier combinación lineal de sus componentes sigue una distribución normal unidimensional.

4. Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables independientes, entonces están incorrelacionadas, no cumpliéndose, en general, el resultado recíproco. Ahora bien, para variables normales n-dimensionales, ambos conceptos son equivalentes. Es decir, las n componentes de la variable aleatoria normal n-dimensional $\mathbf{X}$, $X_1, \ldots, X_n$, son independientes si, y sólo si, están incorrelacionadas.

5. Finalmente, si se conocen los valores que toman varias de las componentes de una normal n-dimensional, la distribución condicionada de las restantes componentes es también normal.

• La **distribución normal bidimensional** es un caso particular de la distribución normal n-dimensional para $n = 2$.

La variable (X, Y) sigue una distribución normal bidimensional de parámetro μ y Σ, con $\mu = (\mu_X, \mu_Y)'$ $(-\infty < \mu_X < \infty, -\infty < \mu_Y < \infty)$ y Σ una matriz 2×2 simétrica y definida positiva, si su función de densidad es

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{|\Sigma|}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[(x - \mu_X, y - \mu_Y)\, \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} x - \mu_X \\ y - \mu_Y \end{pmatrix} \right] \right\},$$

para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$, siendo Σ la matriz de varianzas-covarianzas, es decir,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Como $\sigma_{XY} = \rho \cdot \sigma_X \sigma_Y$, la función de densidad de una variable normal bidimensional, escrita en forma no matricial, es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\},$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$.

La figura 11.1 representa la función de densidad de una normal bidimensional.

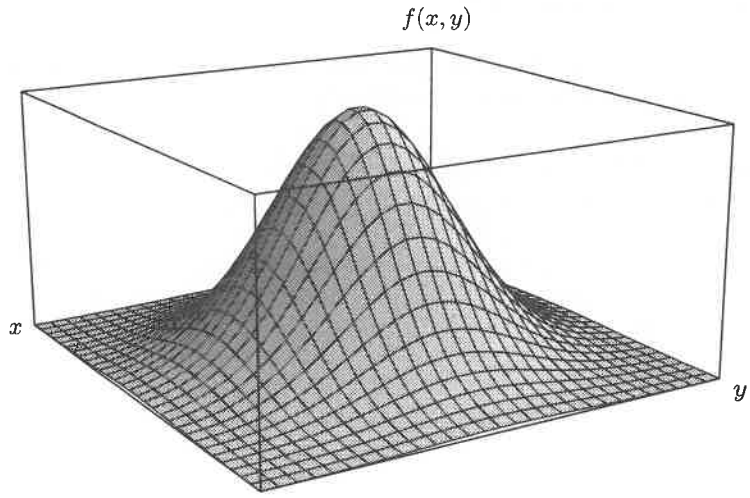


FIG. 11.1.

Por último, si (X, Y) es una variable aleatoria con distribución normal bidimensional, la distribución de Y condicionada por $X = x$ es una normal unidimensional de media $\mu_Y + \rho \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$ y desviación típica $\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$.

Recíprocamente, si X es una variable aleatoria normal $N(\mu_X, \sigma_X)$ y la distribución de Y condicionada por $X = x$ es, también, normal de media $\mu_Y + \rho \cdot$

$\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$ y desviación típica $\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}$, la distribución conjunta de (X,Y) es una normal bidimensional $N_2(\mu,\Sigma)$, donde

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_X\\ \mu_Y\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_X^2 & \sigma_{XY}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2\end{pmatrix}.$$

Del primero de los resultados se deduce que, para $-\infty<x<\infty$

$$E(Y\mid X=x)=\mu_Y+\rho\cdot\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)=\mu_Y+\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}(x-\mu_X).$$

Por tanto, la curva general de regresión de Y sobre X, $y=E(Y\mid X=x)$, resulta ser una recta, con lo cual, la curva y la recta de regresión coinciden y, consecuentemente,

$$\rho^2=\eta^2_{Y\mid X}.$$

Se obtienen análogos resultados estudiando la distribución de X condicionada por $Y=y$.

Ejercicios propuestos

11.1. Sean Y_1 e Y_2 variables aleatorias independientes con distribución $N(0,1)$. Sean las variables $X_1=2Y_1-Y_2+3$ y $X_2=Y_1+Y_2+5$.

a) Hállese la función de densidad de (X_1,X_2).

b) ¿Cómo se distribuye la variable $Z=3X_1+4X_2-1$?

11.2. Sea $\mathbf{X}$ una variable aleatoria con distribución normal n-dimensional, $N_n(\mu,\Sigma)$, tal que sus componentes, $X_1,\ldots,X_n$, son independientes. Demuéstrese que la variable $(\mathbf{X}-\mu)'\,\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\mu)$ sigue una distribución χ^2 con n grados de libertad.

11.3. Sea (X_1,X_2,X_3) una variable aleatoria con distribución normal tridimensional de parámetros

$$\mu=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&1&2\\2&2&9\end{pmatrix}.$$

a) Sea una nueva variable tridimensional (Z_1,Z_2,Z_3) tal que

$$\begin{aligned}Z_1&=X_1-2X_2+3X_3\\ Z_2&=3X_1-X_2+2X_3\\ Z_3&=-X_1+2X_2+2X_3.\end{aligned}$$

Demuéstrese que (Z_1, Z_2, Z_3) sigue una distribución normal tridimensional y obténganse sus parámetros.

b) Sea una nueva variable $Z_4 = 3X_1 - X_2 + 7X_3$. Pruébese que (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) es una variable normal cuatridimensional y calcúlese su esperanza y su matriz de varianzas-covarianzas.

c) Sea otra nueva variable $Z_5 = X_1 + 3X_2 - 4X_3$. ¿Es (Z_1, Z_2, Z_5) una normal tridimensional?

¶ **11.4.** Sea Σ una matriz definida positiva de orden n. Demuéstrese que existe una matriz $\mathbf{A}$ de orden n, no singular, tal que $\Sigma = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}'$. A dicha matriz, $\mathbf{A}$, se le denomina *raíz cuadrada* de Σ. (Sugerencia: descompóngase Σ como $\mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}'$, donde $\mathbf{D}$ es su correspondiente matriz diagonal, y escríbase $\mathbf{D}$ como producto de una matriz diagonal por sí misma.)

11.5. Sea una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & x < 0,\ y > 0 \quad \text{o} \quad x > 0,\ y < 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obténganse las distribuciones marginales de X e Y.

b) Calcúlese la covarianza entre X e Y.

11.6. Sea

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

y sea $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, donde $Y_1 = aX_1 + bX_2$ e $Y_2 = cX_1 + dX_2$. ¿Qué condiciones deben verificar a, b, c y d, para que $\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}$ se distribuya como una χ^2 con 2 grados de libertad?

11.7. Un minorista vende por encargo previo de sus clientes dos productos A y B al precio de 35 y 60 pesetas. Dichos productos los compra en un almacén a 30 y 50 pesetas, respectivamente, gastando 100 pesetas en transporte.

Sabiendo que los pedidos diarios de A y B siguen distribuciones normales independientes de medias 10 y 20, y varianzas 9 y 4, respectivamente, hállese:

a) El coeficiente de correlación entre los gastos y los ingresos del minorista;

b) La probabilidad de que los ingresos dupliquen al menos los gastos.

11.8. Las calificaciones del primer parcial de una asignatura se distribuyen como una normal de media 4 y desviación típica 1, y las del segundo parcial como una

normal de media 6 y desviación típica 2. Suponemos que las notas de ambos parciales siguen una distribución normal bidimensional, siendo 0.8 el coeficiente de correlación.

Un alumno aprueba la asignatura si la media arimética de ambas calificaciones es al menos 5. Hállese la probabilidad de que en un grupo de 8 alumnos sólo haya 3 que aprueben la asignatura.

11.9. Una central eléctrica suministra energía a dos pueblos. El consumo doméstico (en miles de kilovatios) sigue una distribución normal de media 700 y desviación típica 30 para el primer pueblo, y de media 500 y desviación típica 20 para el segundo, siendo su distribución conjunta una normal bidimensional, con coeficiente de correlación lineal igual a 0.9.

Por otra parte, los consumos industriales son 1.100.000 y 900.000 kilovatios, para cada uno de los pueblos.

a) Si el consumo total entre ambos pueblos supera los 3.300.000 kilovatios, se producirá un apagón. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra?

b) El primer pueblo paga 0.3 unidades monetarias por cada 1.000 kilovatios, cantidad que es 0.4 para el segundo. Hállese la probabilidad de que la factura eléctrica del primer pueblo supere la del segundo.

11.10. El número de mujeres que mueren al año a causa de una cierta enfermedad es una variable aleatoria $N(\mu, 4)$, y el de hombres una $N(100, 5)$, siendo el coeficiente de correlación entre ambas de 0.8 (se supone que la distribución conjunta de las dos variables es una normal bidimensional).

Considerando un período de 10 años, y sabiendo que la probabilidad de que el número total de enfermos que mueren al año sea superior a 300 es de 0.5, calcúlese la probabilidad de que en 8, de esos 10 años, el número de mujeres que mueren sea superior a 195.

11.11. Una fábrica tiene 30 máquinas de tipo A y 20 de tipo B. Las máquinas de tipo A producen tornillos y arandelas, cuyos pesos se distribuyen normalmente con medias 10 y 1 gramos y desviaciones típicas 0.5 y 0.1, respectivamente, siendo el coeficiente de correlación entre ambos pesos de 0.8. Las máquinas de tipo B producen tornillos y arandelas, siendo el peso total una variable aleatoria normal de media 11 gramos y desviación típica 0.6. Se admite que la distribución conjunta de los pesos de tornillos y arandelas es una variable aleatoria normal bidimensional.

a) Se elige un tornillo y una arandela producidos por una de las máquinas; ¿cuál es la probabilidad de que la suma de ambos pesos sea mayor que 12 gramos?

b) Si consideramos sólo una máquina de tipo A, ¿cuál es la probabilidad de que el peso del tornillo sea al menos doce veces el de la arandela?

11.12. Una empresa de electrodomésticos exporta a dos países dos tipos de frigoríficos, A y B.

En el país I obtiene 25.000 pesetas de ingreso por cada frigorífico de tipo A vendido, y 15.000 pesetas con los del tipo B, con unos gastos fijos mensuales de un millón de pesetas. En el país II consigue 20.000 de ingreso con cada frigorífico de cualquiera de los dos tipos, con unos gastos fijos de 550.000 pesetas.

El número de frigoríficos de cada tipo vendidos al mes sigue una distribución normal bidimensional de media 200 y varianza 100 para los del tipo A, y de media 100 y varianza 25 para los del tipo B, siendo el coeficiente de correlación -0.8.

Hállese la probabilidad de que el beneficio obtenido al mes sea mayor en el país I que en el país II.

11.13. En un estudio realizado sobre la renta de las familias en las que ambos cónyuges trabajan, se ha estimado que el salario mensual (en miles de pesetas) del marido y de la mujer sigue una distribución normal bidimensional de medias 100 y 80 respectivamente, varianzas iguales y coeficiente de correlación 0.8. Sabemos que el 67 % de los hombres tiene un salario superior al de su pareja. Se toma una familia al azar y se consulta una de las nóminas, resultando ser inferior a 85.000 pesetas. ¿Cuál es la probabilidad de que corresponda al marido?

11.14. De un estudio realizado sobre el gasto telefónico mensual, en miles de pesetas, de dos familias, se han obtenido los siguientes resultados:

Familia 1: El gasto en llamadas urbanas es una distribución normal de media 5 y desviación típica 1, siendo el gasto en interurbanas de 7.000 pesetas.

Familia 2: El gasto en llamadas urbanas es una normal de media 8 y desviación típica 2, siendo el gasto en las interurbanas de 8.000 pesetas.

Suponiendo que los gastos urbanos siguen una distribución normal bidimensional, y considerando un período de un año, calcúlese la probabilidad de que en al menos dos meses los gastos telefónicos de la primera familia superen los de la segunda, en cada una de las situaciones siguientes:

a) Cuando los gastos en llamadas urbanas de las dos familias son independientes.

b) Sabiendo que la probabilidad de que la suma de los gastos totales de ambas familias en un mes sea inferior a 32.000 pesetas, es igual a 0,9772.

11.15. Sea una variable aleatoria (X, Y) con distribución normal bidimensional cuyos parámetros μ y Σ son:

$$\mu = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Hállese el coeficiente de correlación entre X y $X+Y$, y $p[X+Y \leq 5 \mid X > 4]$.

b) Se definen las variables $U = 2X + Y$ y $V = X - Y$. Calcúlense las rectas de regresión de U y V.

11.16. Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional. Supóngase que X sigue una distribución $N(0,1)$ y que la distribución de Y condicionada por $X = x$ es normal de media $2x - 3$ y varianza 12.

a) Demuéstrese que la distribución conjunta de X e Y es una normal bidimensional.

b) Obténgase la distribución marginal de Y y el coeficiente de correlación entre X e Y.

11.17. K. PEARSON estudió en 1903 la relación entre las alturas, en centímetros, de los padres, X, y de los hijos, Y, obteniendo que (X,Y) se ajustaba a una distribución normal bidimensional, siendo las medias de X e Y, 172 y 174.7, las desviaciones típicas, 6.91 y 6.98, y el coeficiente de correlación lineal $\rho = 0.51$. Si un padre mide 178 centímetros, ¿cuál es la altura esperada de su hijo? Coméntese la bondad de la predicción.

11.18. Sea (X,Y) una variable normal bidimensional. Sean U y V las variables X e Y tipificadas.

a) Compruébese que los coeficientes de correlación entre X e Y y entre U y V coinciden.

b) Calcúlense las curvas generales de regresión entre U y V y coméntese la bondad de los ajustes, si el coeficiente de correlación entre X e Y es 0.4.

11.19. Sea (X,Y) una variable aleatoria con función de densidad:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k f_{(U,V)}(x,y) & -0.5 \leq x \leq 0.2\,, \qquad 0.5 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde $f_{(U,V)}$ es la función de densidad de una variable normal bidimensional de media $\mathbf{0}$ y matriz de varianzas-covarianzas I.

a) Calcúlese la función de densidad de (X,Y).

b) Hállense las funciones de densidad marginales de X y de Y.

c) Calcúlese la esperanza de V condicionada por $U + V = 2$.

11.20. En un cierto país, la renta y el consumo mensual (en miles de pesetas) de una familia, (X,Y), siguen una distribución normal bidimensional de medias $\mu_X = 100$ y $\mu_Y = 90$, y de varianzas $\sigma_X^2 = 900$ y $\sigma_Y^2 = 625$. Se sabe que sólo el 10 % de las familias se endeuda mensualmente.

a) ¿Qué porcentaje de familias ahorra al menos el 20 % de su renta mensual?

b) ¿Qué porcentaje de familias tiene un consumo mensual superior a 150.000 pesetas?

c) Hállese el consumo esperado de una familia que tiene una renta mensual de 80 000 pesetas.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 11.1.

a) Al tratarse de normales independientes, la distribución conjunta de Y_1 e Y_2 es una normal bidimensional estándar,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] .$$

Podemos, por otro lado, expresar (X_1, X_2) en función de (Y_1, Y_2),

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} ,$$

esto es,

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{C} .$$

Por tanto, $\mathbf{X}$ sigue una distribución normal bidimensional de media

$$\mu_{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \cdot \mu_{\mathbf{Y}} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

y matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \cdot \Sigma_{\mathbf{Y}} \cdot \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ,$$

matriz definida positiva, ya que sus menores principales valen 5 y $5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 9$. Este hecho es lógico, pues la matriz de la transformación lineal,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

es de rango 2 ($|B| = 3 \neq 0$). Luego,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] .$$

b) La variable $Z = 3X_1 + 4X_2 - 1$ puede expresarse en función de (X_1, X_2) como

$$Z = 3X_1 + 4X_2 - 1 = (3, 4) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - 1 .$$

Se trata, así, de una normal unidimensional, pues es una combinación lineal de normales dependientes que son componentes de una normal bidimensional. La media de Z es

$$\mu_Z = (3,4)\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} - 1 = 28$$

y su varianza

$$\sigma_Z^2 = (3,4)\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 101\,,$$

con lo cual,

$$Z \hookrightarrow N(28,\sqrt{101})\,.$$

Ejercicio 11.2.
Dado que $\mathbf{X}$ sigue una distribución $N_n(\mu,\Sigma)$, al ser sus componentes independientes y, por tanto, incorrelacionadas, resulta que la matriz Σ es diagonal, pues las covarianzas de todos los pares de variables se anulan, esto es,

$$\Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{nn}\end{pmatrix}\,.$$

Por tanto, la variable X_i, $(i = 1,\ldots,n)$, sigue una distribución $N(\mu_i,\sqrt{\sigma_{ii}})$, siendo $X_1,\ldots,X_n$ independientes. Entonces, la variable

$$(\mathbf{X}-\mu)'\,\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\mu) = (X_1-\mu_1,\ldots,X_n-\mu_n)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\sigma_{nn}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1-\mu_1\\ \vdots \\ X_n-\mu_n\end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu_i)^2}{\sigma_{ii}}$$

sigue una distribución χ_n^2 al tratarse de una suma de cuadrados de n variables normales estándar independientes, obtenidas por la tipificación de X_i $(i = 1,\ldots,n)$.

Ejercicio 11.3.
a) La variable tridimensional $\mathbf{Z} = (Z_1,Z_2,Z_3)'$ puede expresarse como una transformación lineal de $\mathbf{X} = (X_1,X_2,X_3)'$,

$$\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\\ Z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}\,,$$

o bien, abreviadamente,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}\,.$$

Dado que $\mathbf{Z}$ no tiene más dimensión que $\mathbf{X}$ y, además, las filas de la matriz $\mathbf{B}$ son linealmente independientes, coincidiendo el rango de $\mathbf{B}$, igual a 3, con la dimensión de la variable transformada $\mathbf{Z}$, dicha variable tiene una distribución normal, $N_3(\mu_{\mathbf{Z}}, \Sigma_{\mathbf{Z}})$, donde

$$\mu_{\mathbf{Z}} = \mathbf{B} \cdot \mu = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 73 & 69 & 52 \\ 69 & 83 & 41 \\ 52 & 41 & 48 \end{pmatrix},$$

matriz definida positiva.

Advierta el lector que la esperanza y la matriz de varianzas-covarianzas de este tipo de transformaciones puede también obtenerse utilizando únicamente las propiedades de las varianzas y covarianzas de combinaciones lineales de variables, sin necesidad de realizar cálculos matriciales.

b) La variable cuatridimensional $\mathbf{Z}^* = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4)'$ es, también, una transformación lineal de $\mathbf{X}$,

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix},$$

o, lo que es lo mismo,

$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{X}.$$

Ahora bien, $\mathbf{Z}^*$ no sigue una distribución normal, pues tiene cuatro componentes, una más que $\mathbf{X}$; en otros términos, la matriz $\mathbf{B}^*$ tiene más filas que columnas.

Calculemos la esperanza y la matriz de varianzas-covarianzas de $\mathbf{Z}^*$,

$$E(\mathbf{Z}^*) = E(\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{B}^* E(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 6 \\ 26 \end{pmatrix}$$

y

$$V(\mathbf{Z}^*) = V(\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{B}^* \cdot V(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{B}^{*'} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 73 & 69 & 52 & 194 \\ 69 & 83 & 41 & 193 \\ 52 & 41 & 48 & 141 \\ \hline 194 & 193 & 141 & 528 \end{array}\right) .$$

Obsérvese que esta matriz, que no es definida positiva, es una ampliación de $\Sigma_{\mathbf{z}}$, matriz calculada en el apartado anterior, con la varianza de Z_4 y las covarianzas entre Z_4 y Z_1, Z_2 y Z_3.

c) La variable $\mathbf{Z}^\circ = (Z_1, Z_2, Z_5)'$ puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} ,$$

esto es,

$$\mathbf{Z}^\circ = \mathbf{B}^\circ \cdot \mathbf{X} .$$

El rango de la matriz $\mathbf{B}^\circ$ es menor que 3, dimensión de la nueva variable $\mathbf{Z}^\circ$; en concreto, el rango de $\mathbf{B}^\circ$ es 2 (puede el lector comprobar que el determinante de $\mathbf{B}^\circ$ es cero). De hecho, Z_5 es una combinación lineal de Z_1 y Z_2,

$$Z_5 = Z_2 - 2Z_1 .$$

Por tanto, $\mathbf{Z}^\circ$ no es una normal tridimensional.

La esperanza de $\mathbf{Z}^\circ$ es

$$E(\mathbf{Z}^\circ) = \left(\begin{array}{c} 9 \\ 11 \\ \hline -7 \end{array}\right) ,$$

ya que $E(Z_5) = E(Z_2) - 2E(Z_1) = 11 - 2 \cdot 9 = -7$.

La matriz de varianzas-covarianzas es

$$V(\mathbf{Z}^\circ) = \left(\begin{array}{cc|c} 73 & 69 & -77 \\ 69 & 83 & -63 \\ \hline -77 & -63 & 99 \end{array}\right) ,$$

pues,

$$\begin{aligned}
\text{Var}\,(Z_5) &= \text{Var}\,(Z_2 - 2Z_1) = \text{Var}\,(Z_2) + 4\,\text{Var}\,(Z_1) - 4\,\text{Cov}\,(Z_1, Z_2) = \\
&= 83 + 4 \cdot 73 - 4 \cdot 69 = 99\,, \\
\text{Cov}\,(Z_1, Z_5) &= \text{Cov}\,(Z_1, Z_2 - 2Z_1) = \text{Cov}\,(Z_1, Z_2) - 2\,\text{Cov}\,(Z_1, Z_1) = \\
&= 69 - 2 \cdot 73 = -77 \qquad \text{y} \\
\text{Cov}\,(Z_2, Z_5) &= \text{Cov}\,(Z_2, Z_2 - 2Z_1) = \text{Cov}\,(Z_2, Z_2) - 2\,\text{Cov}\,(Z_2, Z_1) = \\
&= 83 - 2 \cdot 73 = -63\,.
\end{aligned}$$

El cálculo de $E(\mathbf{Z}^\circ)$ y $V(\mathbf{Z}^\circ)$ podría haberse realizado, también, por métodos matriciales. Por otra parte, puede comprobar el lector que la matriz de varianzas-covarianzas no es definida positiva.

Ejercicio 11.4.

Al ser Σ definida positiva, puede descomponerse como $\Sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}'$, donde $\mathbf{P}$ es una matriz no singular y $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal con todos sus elementos estrictamente positivos, la cual puede descomponerse, a su vez, como producto de dos matrices diagonales idénticas,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}\,.$$

En definitiva,

$$\Sigma = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}' = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{R})\,(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R})'\,,$$

dado que $\mathbf{R}' = \mathbf{R}$. Luego, llamando $\mathbf{A}$ a la matriz $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$, se tiene que el producto de $\mathbf{A}$ por su transpuesta es la matriz Σ, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}' = \Sigma$, siendo $\mathbf{A}$ no singular, ya que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{P}|\,|\mathbf{D}| \neq 0$.

Ejercicio 11.5.

a) Aunque por su aspecto la función de densidad recuerda a la de una normal bidimensional estándar, obsérvese que el campo en el que $f_{(X,Y)}$ es no nula está formado únicamente por el segundo y el cuarto cuadrante del plano real, y no por todo él, como ocurre en la normal bidimensional.

La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{y=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} & x<0 \\ \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{y=-\infty}^{0} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{y=-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}} & x>0 \end{cases}$$

resultando la integral, en ambos casos, $1/2$, pues se trata de la integral de la función de densidad normal estándar en la mitad de su campo de variación. Por tanto, la función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,,$$

para $-\infty < x < \infty$. Es decir, X sigue una distribución normal estándar.

Con idénticos cálculos se obtiene la marginal de la variable Y, que también resulta ser una normal estándar. Obsérvese que las dos distribuciones marginales son normales, pero, en cambio, la conjunta no lo es.

b) Puesto que ambas variables son de media cero, su covarianza es

$$\text{Cov}\,(X,Y) = E(X\cdot Y) = \int_x \int_y xy \cdot f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{x=-\infty}^{0}\int_{y=0}^{\infty} xy\cdot\tfrac{1}{\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx + \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{0} xy\cdot\tfrac{1}{\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_{x=-\infty}^{0} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\cdot\int_{y=0}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy + \int_{x=0}^{\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\cdot\int_{y=-\infty}^{0} ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1)\right] = -\frac{2}{\pi}\,,$$

ya que

$$\int_{x=-\infty}^{0} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_{x=-\infty}^{0} = -1$$

y

$$\int_{y=0}^{\infty} y\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = [-e^{-\frac{y^2}{2}}]_{y=0}^{\infty} = 1\,.$$

Ejercicio 11.6.

Para que $\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}$ siga una distribución χ^2 con 2 grados de libertad, las variables Y_1 e Y_2 han de ser normales estándar e independientes, ya que $\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y} = Y_1^2 + Y_2^2$. Ahora bien,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} \,,$$

de donde, conocida la distribución normal bidimensional de $\mathbf{X}$, resulta que $\mathbf{Y}$ es también una normal bidimensional, siempre y cuando $\mathbf{B}$ sea de rango 2, es decir, su determinante, $|\mathbf{B}| = ad - bc$, sea distinto de cero. La media de $\mathbf{Y}$ es

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y su matriz de varianzas-covarianzas,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\mathbf{Y}} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4a^2 + 2ab + 4b^2 & 4ac + bc + ad + 4bd \\ 4ac + bc + ad + 4bd & 4c^2 + 2cd + 4d^2 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

ha de ser igual a la matriz identidad, para que Y_1 e Y_2 sean independientes (o lo que es lo mismo, incorrelacionadas, al ser las componentes de una normal bidimensional) y de varianza unidad.

En definitiva, si a, b, c y d verifican el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4a^2 + 2ab + 4b^2 &= 1 \\ 4ac + bc + ad + 4bd &= 0 \\ 4c^2 + 2cd + 4d^2 &= 1 \end{aligned}$$

entonces,

$$\mathbf{Y} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] ,$$

es decir, Y_1 e Y_2 son normales estándar independientes y, por tanto, $\mathbf{Y}' \cdot \mathbf{Y}$ se distribuye como una χ^2 con 2 grados de libertad.

El problema no exige la resolución de este sistema, que, por otra parte, es relativamente complicada. El lector que se dé por satisfecho con la condición anterior, puede omitir la lectura de las siguientes líneas, en las que obtendremos unos valores de a, b, c y d.

Como $\Sigma_{\mathbf{Y}} = \mathbf{B} \cdot \Sigma_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{B}'$, donde $\Sigma_{\mathbf{X}}$ es la matriz de varianzas-covarianzas de $\mathbf{X}$, la condición exigida por el problema equivale a pedir que

$$\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{I} \,,$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad de orden dos.

Diagonalizando la matriz $\Sigma_{\mathbf{x}}$ se obtienen sus valores propios. Recuerde el lector que estos valores son las soluciones de la ecuación $|\Sigma_{\mathbf{x}} - \lambda \mathbf{I}| = 0$, que, en este caso, es

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \,,$$

ecuación cuyas soluciones son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 5$.

Calculemos, a continuación, los vectores propios, es decir, los vectores $\binom{u_i}{v_i}$, tales que $\Sigma_{\mathbf{x}} \binom{u_i}{v_i} = \lambda_i \binom{u_i}{v_i}$, $(i = 1, 2)$. Para ello, resolvamos los sistemas de ecuaciones

$$(\Sigma_{\mathbf{x}} - \lambda_1 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_1 + v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$(\Sigma_{\mathbf{x}} - \lambda_2 \mathbf{I}) \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 + v_2 \\ u_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

de los cuales se obtienen los vectores propios de $\Sigma_{\mathbf{x}}$, que, una vez normalizados, esto es, impuesta la condición $u_i^2 + v_i^2 = 1$, resultan ser

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Llamando Λ a la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} ,$$

y $\mathbf{P}$ a la matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} ,$$

es sabido que

$$\mathbf{P}' \cdot \Sigma_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} = \Lambda \,.$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad, a la izquierda y a la derecha, por la matriz

$$\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} ,$$

se obtiene

$$\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{P}' \cdot \Sigma_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} \cdot \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot \Lambda \cdot \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I} \,.$$

En definitiva, la matriz $\mathbf{B}$ es $\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{P}'$, ya que

$$\mathbf{B} \cdot \Sigma_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B}' = (\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{P}') \, \Sigma_{\mathbf{x}} \, (\Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{P}')' = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{P}' \cdot \Sigma_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} \cdot \Lambda^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I} \,,$$

que era la condición exigida por el problema. Consecuentemente,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

es decir,

$$a = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad b = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{y} \quad d = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Obsérvese que la matriz **B**, así calculada, es de rango 2. Puede comprobar el lector que la solución obtenida verifica las condiciones impuestas a a, b, c y d.

Ejercicio 11.7.

a) Sea X el *número de pedidos del producto A*, variable aleatoria con distribución $N(10,3)$, e Y el *número de pedidos del producto B*, variable $N(20,2)$. La variable G, *gastos del minorista*, es función de X e Y,

$$G = 30 \cdot X + 50 \cdot Y + 100,$$

siendo los *ingresos*, I,

$$I = 35 \cdot X + 60 \cdot Y.$$

Puesto que X e Y son normales independientes, la distribución conjunta de X e Y es

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right].$$

La variable bidimensional (G, I) puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} G \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 50 \\ 35 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y, por tanto, sigue una distribución normal bidimensional, ya que la matriz 2×2 de la transformación es de rango 2. La media de (G, I) es

$$\begin{pmatrix} E(G) \\ E(I) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 50 \\ 35 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,400 \\ 1\,550 \end{pmatrix},$$

y la matriz de varianzas-covarianzas

$$\begin{pmatrix} \text{Var } (G) & \text{Cov } (G,I) \\ \text{Cov } (G,I) & \text{Var } (I) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 50 \\ 35 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 35 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18\,100 & 21\,450 \\ 21\,450 & 25\,425 \end{pmatrix},$$

con lo cual,

$$\rho_{GI} = \frac{\sigma_{GI}}{\sigma_G \, \sigma_I} = \frac{21\,450}{\sqrt{18\,100 \cdot 25\,425}} = 0.999.$$

b) Por otra parte, la probabilidad de que *los ingresos dupliquen al menos los gastos* es

$$p[I \geq 2 \cdot G] = p[2 \cdot G - I \leq 0] ,$$

donde

$$2 \cdot G - I = (2, -1)\begin{pmatrix} G \\ I \end{pmatrix} \hookrightarrow N_1 \left[(2, -1)\begin{pmatrix} 1\,400 \\ 1\,550 \end{pmatrix}, (2, -1)\begin{pmatrix} 18\,100 & 21\,450 \\ 21\,450 & 25\,425 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] ,$$

es decir, la variable $2 \cdot G - I$ es una normal unidimensional de media 1 250 y varianza 12 025. Por tanto,

$$p[I \geq 2 \cdot G] = p[2 \cdot G - I \leq 0] = p\left[Z \leq \frac{-1\,250}{\sqrt{12\,025}} \right] = 1 - \Phi(11.4) \approx 0 ,$$

donde Z denota la variable tipificada.

Ejercicio 11.8.
Sea X la *calificación del primer parcial*, variable con distribución $N(4, 1)$, e Y la *calificación del segundo*, con distribución $N(6, 2)$. El coeficiente de correlación es 0.8, luego la covarianza es

$$\sigma_{XY} = \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y = 0.8 \cdot 1 \cdot 2 = 1.6 .$$

Se sabe que la distribución conjunta de X e Y es una normal bidimensional,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1.6 \\ 1.6 & 4 \end{pmatrix} \right] .$$

La probabilidad de aprobar es

$$p\left[\frac{X + Y}{2} \geq 5 \right] = p[X + Y \geq 10] ,$$

donde

$$X + Y = (1, 1)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N \left[(1, 1)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1.6 \\ 1.6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] ,$$

es decir, $X + Y$ es una normal unidimensional de media 10 y varianza 8.2. Por tanto, designando por Z a la variable tipificada,

$$p\left[\frac{X + Y}{2} \geq 5 \right] = p[X + Y \geq 10] = 1 - p\left[Z < \frac{10 - 10}{\sqrt{8.2}} \right] = 1 - \Phi(0) = 0.5 .$$

Denotemos por T el *número de alumnos, de entre 8, que aprueban*; esta variable es una binomial $\mathcal{B}(8, 0.5)$, y la probabilidad de que *aprueben tres de ellos* es

$$p[T = 3] = p[T \leq 3] - p[T \leq 2] = 0.3633 - 0.1445 = 0.2188 ,$$

buscando en las tablas de la distribución binomial para $n = 8$ y $p = 0.5$.

Ejercicio 11.9.

a) Sea X_1 el *consumo doméstico en el primer pueblo* y X_2 el *consumo doméstico en el segundo*, cuyas distribuciones son

$$X_1 \hookrightarrow N(700, 30) \quad \text{y} \quad X_2 \hookrightarrow N(500, 20)\,.$$

Dado que el coeficiente de correlación es 0.9, la covarianza vale

$$\sigma_{X_1 X_2} = \rho \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} = 0.9 \cdot 30 \cdot 20 = 540\,.$$

Además, la distribución conjunta de X_1 y X_2 es una normal bidimensional, luego

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 700 \\ 500 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 900 & 540 \\ 540 & 400 \end{pmatrix} \right].$$

Sea Y_1 e Y_2 el *consumo total en cada pueblo*, es decir, la suma del consumo doméstico y el industrial; entonces,

$$Y_1 = X_1 + 1\,100 \quad \text{e} \quad Y_2 = X_2 + 900\,,$$

esto es,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\,100 \\ 900 \end{pmatrix},$$

siendo $\mathbf{Y}$ una normal bidimensional de parámetros

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 700 \\ 500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\,100 \\ 900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,800 \\ 1\,400 \end{pmatrix}$$

y

$$\Sigma_{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 900 & 540 \\ 540 & 400 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 & 540 \\ 540 & 400 \end{pmatrix}.$$

Por su parte, la distribución del *consumo total*, T,

$$T = Y_1 + Y_2 = (1, 1) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

es una normal unidimensional de media

$$\mu_T = (1, 1) \begin{pmatrix} 1\,800 \\ 1\,400 \end{pmatrix} = 3\,200$$

y varianza

$$\sigma_T^2 = (1, 1) \begin{pmatrix} 900 & 540 \\ 540 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,380\,.$$

La probabilidad de que se produzca un apagón es

$$p[T > 3\,300] = 1 - \Phi\left(\frac{3\,300 - 3\,200}{48.79}\right) = 1 - \Phi(2.05) = 0.0202 .$$

b) Por otro lado, sea Z_1 el *precio de la factura eléctrica del primer pueblo*, esto es $Z_1 = 0.3 \cdot Y_1$, y sea $Z_2 = 0.4 \cdot Y_2$ el *precio de la factura del segundo pueblo*. La distribución conjunta de Z_1 y Z_2 es

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 540 \\ 560 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 81 & 64.8 \\ 64.8 & 64 \end{pmatrix}\right] .$$

Como la probabilidad de que *la factura del primer pueblo supere la del segundo* es

$$p[Z_1 > Z_2] = p[Z_1 - Z_2 > 0] ,$$

y la distribución de

$$Z_1 - Z_2 = (1, -1)\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} ,$$

es una normal unidimensional de media -20 y varianza 15.4, entonces,

$$p[Z_1 > Z_2] = p[Z_1 - Z_2 > 0] = 1 - \Phi\left(\frac{20}{3.92}\right) \approx 0 .$$

Ejercicio 11.10.
Sea X el *número de mujeres que mueren al año a causa de una cierta enfermedad*; por hipótesis, $X \hookrightarrow N(\mu, 4)$. Sea Y el *número de hombres*, siendo $Y \hookrightarrow N(100, 5)$.

Se sabe, además, que el coeficiente de correlación entre ambas variable, ρ, es 0.8. Dado que

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} ,$$

entonces,

$$\sigma_{XY} = \rho \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y = 0.8 \cdot 4 \cdot 5 = 16 .$$

Con ello, tenemos determinada, salvo la media de la primera variable, la distribución de (X, Y), la cual se supone, por hipótesis, normal bidimensional,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2\left[\begin{pmatrix} \mu \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 16 & 25 \end{pmatrix}\right] .$$

Se sabe que la probabilidad de que *el número total de enfermos que mueren cada año sea superior a 300* es 0.5, es decir,

$$p[X + Y > 300] = 0.5 .$$

La distribución de la variable

$$X + Y = (1,1)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

es una normal unidimensional de media $\mu + 100$ y varianza 73, al ser una combinación lineal de las componentes de una normal bidimensional. Luego, llamando Z a la variable tipificada,

$$p[X + Y > 300] = 1 - p\left[Z \leq \frac{300 - (\mu + 100)}{\sqrt{73}}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{200 - \mu}{\sqrt{73}}\right) = 0.5\,.$$

Por tanto, $\Phi\left(\frac{200-\mu}{\sqrt{73}}\right) = 0.5$, de donde resulta $\frac{200-\mu}{\sqrt{73}} = 0$ o, lo que es lo mismo, $\mu = 200$. Con esto, se tiene completamente determinada la distribución de (X, Y) y, por tanto, la de X, una normal $N(200, 4)$.

Llamemos T al *número de años, de entre diez, en que el número de mujeres que mueren sea mayor que 195.* La probabilidad de este suceso es

$$p[X > 195] = 1 - \Phi(-1.25) = \Phi(1.25) = 0.8994$$

y, puesto que T es una variable binomial $\mathcal{B}(10, 0.8994)$, la probabilidad de que *en ocho de los diez años mueran más de 195 mujeres* es

$$p[T = 8] = \binom{10}{8} 0.8994^8\, 0.1006^2 = 0.1949\,.$$

Ejercicio 11.11.
Denotemos por X_A el *peso de los tornillos fabricados por las máquinas del tipo A* y por Y_A el *peso de las arandelas fabricadas por las del tipo A.* Entonces,

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.25 & 0.04 \\ 0.04 & 0.01 \end{pmatrix}\right],$$

donde el valor de la covarianza se obtiene a partir del coeficiente de correlación ($\sigma_{X_A Y_A} = 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.04$).

Se sabe, además, que el *peso de los tornillos fabricados por B*, X_B, más el *peso de las arandelas*, Y_B, sigue una distribución $N(11, 0.6)$, admitiéndose, también, que su distribución conjunta es normal bidimensional.

a) La probabilidad de que *la suma de ambos pesos sea mayor que 12 gramos* es, denotando por X e Y a los pesos de los tornillos y arandelas de cualquier máquina,

$$\begin{aligned} p[X + Y > 12] &= p(A) \cdot p[X + Y > 12 \mid A] + p(B) \cdot p[X + Y > 12 \mid B] = \\ &= p(A) \cdot p[X_A + Y_A > 12] + p(B) \cdot p[X_B + Y_B > 12]\,. \end{aligned}$$

La distribución de la variable

$$X_A + Y_A = (1,1)\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix}$$

es una normal unidimensional de media 11 y desviación típica 0.58, con lo cual,

$$p[X_A + Y_A > 12] = 1 - \Phi\left(\frac{12-11}{0.58}\right) = 1 - 0.95728 = 0.04272 .$$

Asimismo, como $X_B + Y_B \hookrightarrow N(11, 0.6)$,

$$p[X_B + Y_B > 12] = 1 - \Phi\left(\frac{12-11}{0.6}\right) = 1 - 0.95254 = 0.04746 .$$

Por otra parte, $p(A) = \frac{30}{50}$ y $p(B) = \frac{20}{50}$. Por tanto, la probabilidad de que *la suma de ambos pesos sea mayor que 12* es

$$p[X + Y > 12] = \frac{3}{5} \cdot 0.04272 + \frac{2}{5} \cdot 0.04746 = 0.0446 .$$

b) Considerada sólo una máquina de tipo A, la probabilidad de que *el peso del tornillo sea al menos doce veces el de la arandela* es

$$p[X_A \geq 12 \cdot Y_A] = p[X_A - 12 \cdot Y_A \geq 0] ,$$

siendo la distribución de la variable

$$X_A - 12 \cdot Y_A = (1, -12)\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix}$$

una normal unidimensional de media -2 y varianza 0.73. Por consiguiente,

$$p[X_A \geq 12 \cdot Y_A] = p[X_A - 12 \cdot Y_A \geq 0] = 1 - \Phi\left(\frac{2}{0.85}\right) = 1 - 0.9904 = 0.0096 .$$

Ejercicio 11.12.
Designando por X_1 y X_2 el *número de frigoríficos de tipo A o B, vendidos al mes, respectivamente*, sabemos que

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 100 & -40 \\ -40 & 25 \end{pmatrix}\right] ,$$

pues $\sigma_{X_1 X_2} = \rho \cdot \sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2} = -0.8 \cdot 10 \cdot 5 = -40$.

Las variables Y_1 e Y_2, *beneficio obtenido en el país I* y *en el país II*, respectivamente, pueden escribirse como

$$Y_1 = 25X_1 + 15X_2 - 1\,000$$

e

$$Y_2 = 20X_1 + 20X_2 - 550 ,$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .25 & 15 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1\,000 \\ 550 \end{pmatrix} .$$

Por tanto, la distribución conjunta de Y_1 e Y_2 es

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 5\,500 \\ 5\,450 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 38\,125 & 25\,500 \\ 25\,500 & 18\,000 \end{pmatrix} \right] .$$

La probabilidad de que *el beneficio sea mayor en el país I que en el país II* es

$$p[Y_1 > Y_2] = p[Y_1 - Y_2 > 0] ,$$

donde la distribución de

$$Y_1 - Y_2 = (1, -1) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

es una normal de media 50 y varianza 5 125.

En definitiva, la probabilidad pedida es

$$p[Y_1 > Y_2] = p[Y_1 - Y_2 > 0] = 1 - \Phi \left(\frac{-50}{\sqrt{5\,125}} \right) = \Phi(0.70) = 0.7580 .$$

Ejercicio 11.13.

Denotemos por X_H el *salario mensual del hombre* y por X_M el *salario de la mujer*. Se sabe que

$$\begin{pmatrix} X_H \\ X_M \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0.8\sigma^2 \\ 0.8\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \right] ,$$

puesto que las varianzas son iguales, σ^2, y la covarianza es $\sigma_{XY} = \rho\,\sigma\,\sigma = 0.8\,\sigma^2$.

Por otro lado, es sabido que

$$p[X_H > X_M] = p[X_H - X_M > 0] = 0.67 ,$$

siendo la distribución de

$$X_H - X_M = (1, 1) \begin{pmatrix} X_H \\ X_M \end{pmatrix}$$

una normal unidimensional de media 20 y varianza $0.4\,\sigma^2$. Entonces,

$$p[X_H > X_M] = p[X_H - X_M > 0] = 1 - \Phi \left(\frac{-20}{\sqrt{0.4}\,\sigma} \right) = 0.67 ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$\Phi \left(\frac{20}{\sqrt{0.4}\,\sigma} \right) = 0.67 .$$

Buscando en las tablas de la normal estándar, se obtiene

$$\frac{20}{\sqrt{0.4}\,\sigma} = 0.44 ,$$

de donde se deduce el valor $\sigma = 71.9$, teniendo, así, completamente determinada la distribución conjunta de X_H y X_M,

$$\begin{pmatrix} X_H \\ X_M \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 71.9^2 & 0.8 \cdot 71.9^2 \\ 0.8 \cdot 71.9^2 & 71.9^2 \end{pmatrix} \right] .$$

Hay que calcular la probabilidad de que, sabiendo que una nómina es inferior a 85.000 pesetas, ésta corresponda al hombre, H; es decir, denotando por X el *salario mensual*, indistintamente, sea del hombre o de la mujer, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} p[H \mid X < 85] &= \frac{p(H) \cdot p[X < 85 \mid H]}{p[X < 85]} = \\ &= \frac{p(H) \cdot p[X < 85 \mid H]}{p(H) \cdot p[X < 85 \mid H] + p(M) \cdot p[X < 85 \mid M]} = \\ &= \frac{p(H) \cdot p[X_H < 85]}{p(H) \cdot p[X_H < 85] + p(M) \cdot p[X_M < 85]} , \end{aligned}$$

donde, al ser $X_H \hookrightarrow N(100, 71.9)$ y $X_M \hookrightarrow N(80, 71.9)$,

$$p[X_H < 85] = 1 - \Phi(0.21) = 0.4168$$

y

$$p[X_M < 85] = \Phi(0.07) = 0.5279 .$$

Por tanto,

$$p[H \mid X < 90] = \frac{0.5 \cdot 0.4168}{0.5 \cdot 0.4168 + 0.5 \cdot 0.5279} = 0.4412 .$$

Ejercicio 11.14.
Sea X_1 el *gasto mensual en llamadas urbanas de la primera familia*, una variable $N(5, 1)$, y X_2, el *gasto mensual en llamadas urbanas de la segunda*, una variable $N(8, 2)$, siendo el gasto en interurbanas de 7.000 y 8.000 pesetas, respectivamente. Se sabe, además, que los gastos en llamadas urbanas siguen una distribución normal bidimensional,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 4 \end{pmatrix} \right] .$$

Por otra parte, los *gastos telefónicos totales, en miles de pesetas, de cada una de las familias*, Y_1 e Y_2, son:

$$Y_1 = X_1 + 7 \qquad \text{e} \qquad Y_2 = X_2 + 8 .$$

a) Si los gastos en llamadas urbanas, X_1 y X_2, son independientes, estarán incorrelacionados, y, entonces, $\sigma_{XY} = 0$. Por tanto, la distribución conjunta resulta:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right] .$$

La probabilidad de que *los gastos de la primera familia superen los de la segunda* es

$$p[Y_1 > Y_2] = p[X_1 + 7 > X_2 + 8] = p[X_1 - X_2 > 1] ,$$

siendo la distribución de

$$X_1 - X_2 = (1, -1)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

una normal unidimensional de media -3 y varianza 5. Entonces,

$$p[Y_1 > Y_2] = p[X_1 - X_2 > 1] = 1 - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = 1 - 0.96327 = 0.03673 .$$

Sea T el *número de meses de un año en que los gastos de la primera familia superan los de la segunda*; T sigue una distribución $\mathcal{B}(12, 0.03673)$, por lo que la probabilidad pedida es

$$p[T \geq 2] = 1 - p[T = 0] - p[T = 1] = 0.0697 .$$

b) Ahora la única información que se dispone es que

$$p[Y_1 + Y_2 < 32] = p[X_1 + 7 + X_2 + 8 < 32] = p[X_1 + X_2 < 17] = 0.9772 ,$$

siendo la distribución de la variable

$$X_1 + X_2 = (1, 1)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

una normal de media 13 y varianza

$$\text{Var } (X_1 + X_2) = (1, 1)\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\sigma_{XY} + 5 .$$

Entonces,

$$p[Y_1 + Y_2 < 32] = p[X_1 + X_2 < 17] = \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{2\sigma_{XY} + 5}}\right) = 0.9772 ,$$

resultando, de la consulta de las tablas,

$$\frac{4}{\sqrt{2\sigma_{XY} + 5}} = 2 ,$$

de donde $\sigma_{XY} = -0.5$. Así, queda perfectamente determinada la distribución de (X_1, X_2),

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 4 \end{pmatrix}\right] .$$

Resulta ahora sencillo el cálculo de la distribución de la variable $X_1 - X_2$, una normal unidimensional de media -3 y varianza 6, con lo cual la probabilidad de que *los gastos de la primera familia superen los de la segunda* es

$$p[Y_1 > Y_2] = p[X_1 + 7 > X_2 + 8] = p[X_1 - X_2 > 1] = 1 - \Phi(1.63) = 0.05155 .$$

Si, como antes, T denota el *número de meses de un año en que los gastos de la primera familia superen a los de la segunda*, sabemos que T es una $\mathcal{B}(12, 0.05155)$, siendo la probabilidad pedida

$$p[T \geq 2] = 1 - p[T = 0] - p[T = 1] = 0.1245 .$$

Ejercicio 11.15.

a) Denotemos por S y T las variables X y $X + Y$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ,$$

y, por tanto, su distribución es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix} &\hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \equiv \\ &\equiv N_2 \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right] . \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\text{Cov } (X, X + Y) = \text{Cov } (S, T) = 0 ,$$

siendo X y $X + Y$ incorrelacionadas y, al ser las componentes de una normal bidimensional, independientes.

Por otro lado, debido a esta independencia,

$$p[X + Y \leq 5 \mid X > 4] = p[X + Y \leq 5] = \Phi\left(\frac{5 - 1}{\sqrt{3}}\right) = \Phi(2.31) = 0.98956 ,$$

ya que $T = X + Y$ sigue una distribución normal unidimensional de media 1 y varianza 3.

b) Expresando matricialmente la relación entre (U, V) y (X, Y), la distribución de (U, V) es

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \right] .$$

Entonces, la recta de regresión de U sobre V, que coincide con la curva general, es

$$\tilde{U} - E(U) = \frac{\text{Cov } (U,V)}{\text{Var } (V)} (V - E(V)) ,$$

que resulta

$$\tilde{U} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \cdot V - \frac{3}{\sqrt{7}} .$$

Igualmente, se obtiene la recta de regresión de V sobre U,

$$\tilde{V} - E(V) = \frac{\text{Cov } (U,V)}{\text{Var } (U)} (U - E(U)) ,$$

esto es,

$$\tilde{V} = -\frac{1}{2} \cdot U - 3 .$$

Además, como el coeficiente de correlación vale

$$\rho_{UV} = -\frac{1}{2\sqrt{7}} = -0.19 ,$$

es decir, $\rho^2_{UV} = 0.036$, puede asegurarse que la relación lineal entre U y V es prácticamente inexistente.

Ejercicio 11.16.

a) Dado que X es una $N(0,1)$ y que la distribución de Y condicionada por $X = x$ es una $N(2x-3, \sqrt{12})$, la distribución de (X,Y) es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{(Y \mid X=x)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{12}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot 12}[y-(2x-3)]^2} =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{12}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{16x^2+y^2-4xy-12x+6y+9}{12}\right)} .$$

Tratemos de identificar los parámetros de esta función, recordando que la función de densidad de una normal bidimensional,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right] ,$$

es

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[(x-\mu_X, y-\mu_Y)\Sigma^{-1}\binom{x-\mu_X}{y-\mu_Y}\right]} ,$$

para $-\infty < x < \infty$ y $-\infty < y < \infty$.

Por un lado, $E(X) = 0$ y $E(Y)$ puede expresarse como

$$E(Y) = E[E(Y \mid X)] = E(2X - 3) = 2E(X) - 3 = -3 .$$

Por otro lado, Var $(X) = 1$ y Var (Y) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \text{Var } (Y) &= E[\text{Var } (Y \mid X)] + \text{Var } [E(Y \mid X)] = \\ &= E(12) + \text{Var } (2X - 3) = 12 + 4 \cdot \text{Var } (X) = 12 + 4 \cdot 1 = 16 \,. \end{aligned}$$

Por tanto, la media de (X, Y) es

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

y la matriz de varianzas-covarianzas

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 16 \end{pmatrix} .$$

Comparando la función de densidad de (X, Y) obtenida, con la función de densidad genérica de la normal bidimensional, se ha de cumplir que $|\Sigma| = 12$, es decir, $16 - \sigma_{XY}^2 = 12$, de donde se deduce que la covarianza, σ_{XY}, vale 2. Puede el lector comprobar que

$$(x, y+3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix} = \frac{16x^2 + y^2 - 4xy - 12x + 6y + 9}{12} \,.$$

Por tanto, la distribución de (X, Y) es una normal bidimensional, en concreto,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 16 \end{pmatrix} \right] .$$

b) Obviamente, la distribución de Y es una normal de media -3 y varianza 16 y el coeficiente de correlación lineal vale

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{2}{1 \cdot 4} = 0.5 \,.$$

Ejercicio 11.17.
Tenemos que calcular la esperanza de Y, *altura del hijo*, condicionada a que X, *altura del padre*, valga 178 centímetros; es decir, hay que obtener la curva general de regresión de Y sobre X,

$$y = E(Y \mid X = x) \,,$$

y hallar el valor que toma para $x = 178$. Ahora bien, como (X, Y) tiene una distribución normal bidimensional, la curva de regresión coincide con la recta, es decir,

$$y = E(Y \mid X = x) = \mu_Y + \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} (x - \mu_X) \,.$$

Conocido el valor de ρ, se deduce el de la covarianza,

$$\sigma_{XY} = 0.51 \cdot 6.91 \cdot 6.98 = 24.60 \,,$$

disponiendo, entonces, de todos los términos que conforman esta esperanza condicionada,

$$y = E(Y \mid X = x) = 174.7 + \frac{24.60}{6.91^2}\,(x - 172) = 0.515 \cdot x + 86.08\ .$$

Así, si $x = 178$, es decir, si el padre mide 178 centímetros, la altura esperada del hijo es

$$E(Y \mid X = 178) = 0.515 \cdot 178 + 86.08 = 177.73 \text{ centímetros}\ .$$

Al ser $\rho = 0.51$ ($\rho^2 = 0.2601$), la regresión sólo explica el 26.01 % de la variabilidad de la variable, con lo cual la predicción no es fiable.

Ejercicio 11.18.
Sean U y V las variables X e Y tipificadas,

$$U = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \qquad \text{y} \qquad V = \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\ ,$$

o, equivalentemente,

$$U = \frac{1}{\sigma_X} \cdot X - \frac{\mu_X}{\sigma_X} \qquad \text{y} \qquad V = \frac{1}{\sigma_Y} \cdot Y - \frac{\mu_Y}{\sigma_Y}\ ,$$

transformaciones que, en forma matricial, se expresan como

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\mu_X}{\sigma_X} \\ \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \end{pmatrix}\ .$$

Entonces, dado que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right]\ ,$$

la distribución conjunta de U y V es una normal bidimensional de media

$$\begin{pmatrix} E(U) \\ E(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\mu_X}{\sigma_X} \\ \frac{\mu_Y}{\sigma_Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$

resultado obvio, ya que U y V son variables tipificadas, y matriz de varianzas-covarianzas,

$$\begin{pmatrix} \sigma_U^2 & \sigma_{UV} \\ \sigma_{UV} & \sigma_V^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Y} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \\ \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}$$

(resultado, también, obvio en lo que respecta a las varianzas). De este modo,

$$\rho_{UV} = \frac{\sigma_{UV}}{\sigma_U \sigma_V} = \frac{\rho_{XY}}{1 \cdot 1} = \rho_{XY}\ .$$

Obsérvese que el coeficiente de correlación, ρ_{XY}, tiene que ser distinto de 1 y de -1; en caso contrario, (X, Y) no sería normal bidimensional, pues su matriz de varianzas-covarianzas no sería definida positiva.

El anterior resultado puede obtenerse sin más que aplicar las propiedades de varianzas y covarianzas respecto de las transformaciones lineales,

$$\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}\ (U,V)}{\sqrt{\text{Var}\ (U)\cdot\text{Var}\ (V)}} = \frac{\text{Cov}\ \left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}{\sqrt{\text{Var}\ \left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\cdot\text{Var}\ \left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\cdot\text{Cov}\ (X,Y)}{\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\cdot\sqrt{\text{Var}\ (X)\cdot\text{Var}\ (Y)}} = \rho_{XY}\ .$$

b) Para calcular las curvas generales de regresión entre U y V, tengamos en cuenta que su distribución conjunta es una normal bidimensional,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

con lo cual la curva y la recta de regresión coinciden. Por tanto, la curva de regresión de U sobre V es

$$\tilde{U} = E(U \mid V) = \mu_U + \frac{\sigma_{UV}}{\sigma_V^2}\,(V - E(V)) = 0.4\cdot V\ ,$$

y, análogamente, la de V sobre U,

$$\tilde{V} = E(V \mid U) = 0.4\cdot U\ .$$

En esta situación, el cuadrado del coeficiente de correlación coincide con las razones de correlación,

$$\rho_{UV}^2 = \eta_{U\mid V}^2 = \eta_{V\mid U}^2 = 0.16\ ,$$

lo cual confirma el mal ajuste que proporcionan las anteriores curvas de regresión.

Ejercicio 11.19.

a) Para determinar la constante k, téngase en cuenta que

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy\,dx = 1\ ,$$

esto es,

$$\int_{x=-0.5}^{0.2}\int_{y=0.5}^{1} k\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx =$$

$$= k\cdot\int_{x=-0.5}^{0.2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\cdot\int_{y=0.5}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}dy =$$

$$= k\cdot p[-0.5\le Z\le 0.2]\cdot p[0.5\le Z\le 1] =$$

$$= k[\Phi(0.2)-\Phi(-0.5)]\cdot[\Phi(1)-\Phi(0.5)] = k\cdot 0.04 = 1\ ,$$

donde Z designa a una variable aleatoria con distribución $N(0,1)$. Entonces, $k = 24.6$, concretándose la función de densidad de (X,Y),

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 24.6\cdot\dfrac{1}{2\pi}\cdot e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} & -0.5\le x\le 0.2,\quad 0.5\le y\le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) La función de densidad marginal de X resulta

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{y=0.5}^{1} 24.6\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dy =$$

$$= \frac{24.6}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{y=0.5}^{1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}dy =$$

$$= \frac{24.6}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}[\Phi(1)-\Phi(0.5)] = \frac{3.68}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ ,$$

para $-0.5 < x < 0.2$, anulándose en el resto.

Análogamente,

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_{x=-0.5}^{0.2} 24.6\cdot\frac{1}{2\pi}\cdot e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dx =$$

$$= \frac{24.6}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{x=-0.5}^{0.2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx = \frac{24.6}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}[\Phi(0.2)-\Phi(-0.5)] =$$

$$= \frac{6.66}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\ ,$$

si $0.5 < y < 1$, siendo nula en el resto de los casos.

Tanto X como Y presentan una distribución normal estándar truncada, es decir, con el campo de variación limitado a un intervalo.

c) Finalmente, para hallar $E(V \mid U+V=2)$, calculemos previamente la distribución conjunta de V y $W = U+V$,

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ U+V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] ,$$

dado que (U, V) sigue una distribución $N_2(\mathbf{0}, \mathbf{I})$.

Al ser V y W componentes de una normal bidimensional, la curva general de regresión de V sobre W, $E(V \mid W = w)$, coincide con la recta de regresión, es decir,

$$v = E(V \mid W = w) = \mu_V + \frac{\sigma_{VW}}{\sigma_W^2} (w - \mu_W) ,$$

y, por tanto,

$$E(V \mid U+V=2) = E(V \mid W=2) = 0 + \frac{1}{2}(2-0) = 1 .$$

Ejercicio 11.20.

a) Para que una familia ahorre al menos el 20 % de sus ingresos, es necesario que la diferencia entre la *renta*, X, y el *consumo*, Y, sea mayor o igual que el 20 % de X; es decir, hemos de calcular

$$p[X - Y \geq 0.2X] = p[0.8X - Y \geq 0] ,$$

para lo cual necesitamos conocer la distribución de la variable $V = 0.8X - Y$.

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 900 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 625 \end{pmatrix} \right] .$$

Expresemos V en forma matricial. Así,

$$V = 0.8X - Y = (0.8, -1) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} .$$

Entonces, V es normal unidimensional de media

$$E(V) = (0.8, -1) \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix} = 0.8 \cdot 100 - 90 = -10$$

y varianza

$$\text{Var } (V) = (0.8, -1) \begin{pmatrix} 900 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\,201 - 1.6\,\sigma_{XY} .$$

Por tanto,

$$V \hookrightarrow N\left(-10, \sqrt{1\,201 - 1.6\,\sigma_{XY}}\right) .$$

Hay que hallar σ_{XY} y determinar, de este modo, el valor de la varianza de V. Para ello utilizaremos el dato de que el 10 % de las familias se endeuda, es decir, el 10 % tiene un consumo superior a su renta, información que puede escribirse como

$$p[X < Y] = p[X - Y < 0] = 0.10 .$$

Sea $U = X - Y$,

$$U = (1, -1)\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} ,$$

variable con distribución normal unidimensional de media

$$E(U) = (1, -1)\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix} = 10$$

y varianza

$$\text{Var } (U) = (1, -1)\begin{pmatrix} 900 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 625 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\,525 - 2\sigma_{XY} .$$

Sabemos que

$$p[X < Y] = p[U < 0] = \Phi\left(\frac{0 - 10}{\sqrt{1\,525 - 2\sigma_{XY}}}\right) = 0.1 ,$$

con lo cual, buscando en las tablas de la distribución $N(0, 1)$, se tiene que

$$\frac{-10}{\sqrt{1\,525 - 2\sigma_{XY}}} = -1.28 ,$$

igualdad de la que se deduce el valor $\sigma_{XY} = 731.98$. Según esto,

$$V \hookrightarrow N(-10, 5.46) .$$

Estamos, ya, en condiciones de calcular la probabilidad pedida:

$$\begin{aligned} p[X - Y \geq 0.2X] &= p[0.8X - Y \geq 0] = p[V \geq 0] = 1 - p[V < 0] = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10}{5.46}\right) = 1 - \Phi(1.83) = 0.03362 . \end{aligned}$$

Así, sólo el 3,36 % de las familias ahorra más del 20 % de sus ingresos.

b) Dado que las marginales de una distribución normal n-dimensional son normales unidimensionales, el *consumo mensual*, Y, sigue una distribución $N(90, \sqrt{625})$. Entonces,

$$p[Y > 150] = 1 - p[Y \leq 150] = 1 - \Phi\left(\frac{150 - 90}{25}\right) = 1 - \Phi(2.4) = 0.008198 ,$$

es decir, solamente un 0,82 % de las familias tiene una renta mensual superior a 150.000 pesetas.

c) Sabemos que

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \hookrightarrow N_2 \left[\begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 900 & 731.98 \\ 731.98 & 625 \end{pmatrix} \right]$$

y que, en consecuencia, la curva general de regresión de Y sobre X coincide con la recta, con lo cual,

$$y = E(Y \mid X = x) = 90 + \frac{731.98}{900}(x - 100) .$$

Por tanto, para un valor de renta $x = 80$, resulta el siguiente consumo esperado:

$$E(Y \mid X = 80) = 90 + \frac{731.98}{900}(80 - 100) = 73\,700 \text{ pesetas.}$$

Calculando el coeficiente de correlación,

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{731.98}{\sqrt{900}\sqrt{625}} = 0.97 ,$$

se observa que existe una gran correlación positiva entre la renta y el consumo, hecho que, por otro lado, es perfectamente lógico. De esta forma, puede afirmarse que la predicción realizada es muy fiable.

Capítulo 12

LEYES DE LOS GRANDES NÚMEROS Y TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL

Sea (Ω, α, p) un espacio probabilístico, y sean las variables aleatorias X_i $(i = 1, 2, \ldots)$ definidas en dicho espacio. Llamaremos **sucesión de variables aleatorias** a la sucesión de funciones $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, que denotaremos por $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Asimismo, una sucesión de variables bidimensionales es una sucesión de funciones, (X_n, Y_n), de Ω en $\mathbb{R}^2$, que sean variables aleatorias. Dicha sucesión la denotaremos como $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Recordemos, a continuación, los distintos tipos de convergencia para las sucesiones de variables aleatorias.

• Una sucesión, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, **converge casi seguro** hacia la variable X, $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, si

$$p[\omega \in \Omega \mid \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1 \, .$$

Algunas propiedades de interés son:

1. Si para cualquier $\varepsilon > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - X| > \varepsilon]$$

es convergente, entonces, $X_n \xrightarrow{c.s.} X$.

2. Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y g es una función real de variable real continua,

$$g(X_n) \xrightarrow{c.s.} g(X) \, .$$

3. Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, $Y_n \xrightarrow{c.s.} Y$ y g es una función continua de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$,

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{c.s.} g(X, Y) \, .$$

Concretando estas últimas propiedades, la convergencia casi segura se mantiene ante las principales operaciones (suma, diferencia, producto, división, potenciación, etcétera).

• Una sucesión, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, **converge en probabilidad** hacia la variable X, $X_n \xrightarrow{c.p.} X$, si, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - X| > \varepsilon] = 0 \, .$$

Al igual que la convergencia casi segura, la convergencia en probabilidad se mantiene ante las principales operaciones entre las variables.

• Una sucesión, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, **converge en media de orden** r $(r = 1, 2, \ldots)$ hacia la variable X, $X_n \xrightarrow{m.r} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^r] = 0 \, .$$

Para $r = 1$, decimos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge en media** hacia X.

Para $r = 2$, decimos que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge en media cuadrática** hacia X y lo denotaremos como $X_n \xrightarrow{m.c.} X$.

• Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias y X es otra variable aleatoria, siendo F_n y F_X las funciones de distribución de X_n y de X, respectivamente, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge en ley**, o **en distribución**, hacia X, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x) \, ,$$

para todos los números reales x en los que F sea continua. Entonces, diremos que X_n se distribuye asintóticamente como la variable X, designándolo abreviadamente por $X_n \overset{asint.}{\hookrightarrow} X$.

En muchas ocasiones, nos referiremos a dos tipos de distribuciones de las variables de una sucesión: la distribución exacta (distribución de una cualquiera de las variables que componen la sucesión, es decir, distribución de X_n para un n fijo) y la **distribución asintótica** (distribución de la variable a la que la sucesión converge en ley). Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones numéricas, tales que $b_n > 0$, $(n = 1, \ldots)$, y X una variable normal estándar, diremos también que la distribución asintótica de X_n es $N(a_n, b_n)$ cuando $\frac{X_n - a_n}{b_n} \overset{asint.}{\hookrightarrow} X$.

Se puede comprobar la convergencia en ley utilizando las funciones características. Así, la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en ley hacia X si, y sólo si,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \, ,$$

para cualquier número real t, donde φ_n y φ son las funciones características de X_n y X, respectivamente.

Una importante convergencia en ley es la que nos asegura la aproximación de una binomial a una distribución de Poisson. En concreto, cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ y $n \cdot p = \lambda$,

$$\mathcal{B}(n,p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda) \, .$$

Resumamos, para finalizar, las relaciones entre las distintas convergencias:

— Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, entonces, $X_n \xrightarrow{c.p.} X$.
— Si $X_n \xrightarrow{m.c.} X$, entonces, $X_n \xrightarrow{c.p.} X$.
— Si $X_n \xrightarrow{c.p.} X$, entonces, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Las **leyes de los grandes números** estudian el comportamiento probabilístico de las medias muestrales de variables aleatorias, cuando el número de variables tiende hacia infinito. Así, se dice que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple una ley de los grandes números, si existe una sucesión de constantes, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tal que la sucesión $\{\overline{X}_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge hacia cero. Si la convergencia es casi segura la ley se denomina fuerte, y se denomina débil cuando la convergencia es en probabilidad. Enunciemos, a continuación, algunas de éstas.

Así, el teorema de CHEBYSHEV afirma que si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes dos a dos, tales que sus varianzas existen y están acotadas por la misma constante,

$$\overline{X}_n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mu_i \xrightarrow{c.p.} 0 \, ,$$

donde $\mu_i = E(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots$

Un corolario del teorema de CHEBYSHEV, que se utilizará con frecuencia, demuestra que si las variables son independientes dos a dos y tienen la misma esperanza, μ, y varianza, σ^2, entonces,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.p.} \mu \, .$$

El matemático ruso KHINCHIN demostró que si las variables están, además, igualmente distribuidas, no es necesario exigir la existencia de las varianzas.

Este resultado confirma que, bajo ciertas condiciones, las medias muestrales pueden considerarse aproximadamente como variables degeneradas.

Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias; definimos:

— **Momento muestral de orden k centrado respecto del origen (o no central)**,

$$A_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n} \, .$$

Para $k = 1$, dicho momento no es otro que la media muestral, $\overline{X}_n$.

— **Momento muestral de orden k centrado respecto de la media (o central)**,

$$M_k = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k}{n} .$$

Para $k = 2$, este momento recibe el nombre de varianza muestral,

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2}{n} ,$$

siendo su raíz cuadrada positiva, S_X, la desviación típica muestral.

Sea $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias bidimensionales; definimos:

— **Covarianza muestral**,

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n} .$$

— **Coeficiente de correlación muestral**,

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} ,$$

donde S_X y S_Y son las desviaciones típicas muestrales de X y de Y, respectivamente.

Obsérvese que todos estos momentos y características muestrales son sucesiones de variables aleatorias. Entonces, si las variables aleatorias de una sucesión son independientes y están igualmente distribuidas, los momentos muestrales convergen, bajo ciertas condiciones, hacia los denominados momentos poblacionales, definidos éstos como los momentos de las variables de la sucesión. Como consecuencia, las características muestrales, que son funciones de dichos momentos, convergerán, a su vez, hacia las correspondientes características poblacionales. La condición para que se produzcan estas convergencias es que existan los momentos poblacionales del mismo orden.

Enunciemos los principales resultados conocidos genéricamente como leyes fuertes de los grandes números. En primer lugar, el teorema de BOREL: si las variables de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ son variables aleatorias de Bernoulli, independientes y con el mismo parámetro, p, entonces,

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.s.} p .$$

Enunciemos, a continuación, el teorema de KOLMOGOROV: si las variables de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ son independientes, con varianza σ_n^2, y, además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2}$

es convergente, entonces,

$$\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i \xrightarrow{c.s.} 0\,.$$

Del teorema de KOLMOGOROV se deduce inmediatamente el siguiente resultado: si las variables de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ son independientes y sus varianzas están acotadas por la misma constante, entonces se cumple la ley fuerte de los grandes números.

Por último, un teorema también debido a Kolmogorov demuestra que, si las variables tienen todas la misma distribución, no hace falta exigir condición alguna sobre las varianzas; más aún, no hace falta, ni siquiera, exigir que las varianzas existan.

Los diversos **teoremas del límite central** demuestran las convergencias en ley de sumas de variables a la distribución normal. Enunciemos la versión de LEVY y LINDEBERG, que es suficiente para muchas de las aplicaciones.

Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con* $E(X_i) = \mu$ *y* $\mathrm{Var}\,(X_i) = \sigma^2$,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(\sum_{i=1}^{n} X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\cdot\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)\,.$$

La rapidez de la convergencia que establece el teorema depende de que la distribución de las variables $X_1, \ldots, X_n$ se *parezca*, o no, a la distribución normal.

Una importante consecuencia del teorema del límite central afirma que, si las variables de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ son independientes e igualmente distribuidas, de media μ y varianza σ^2, su media muestral se distribuye asintóticamente como una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, es decir,

$$\overline{X}_n \overset{asint.}{\hookrightarrow} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Obsérvese que este resultado es exacto si las variables $X_1, \ldots, X_n$ son normales.

Asimismo, el teorema del límite central permite aproximar distintas distribuciones a la normal. Dos casos particulares de interés son:

a) $\mathcal{B}(n,p) \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(np, \sqrt{npq})$.

b) $\mathcal{P}(n\lambda) \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(n\lambda, \sqrt{n\lambda})$.

Por último, cuando se aproxima la distribución de probabilidades de una variable discreta mediante una distribución continua, surge un problema de cierta relevancia práctica a la hora de calcular probabilidades. El problema consiste, básicamente, en quelas probabilidades aproximadas no están determinadas unívocamente.

La solución más correcta desde el punto de vista de los cálculos recibe el nombre de **corrección por continuidad** de FISHER, y consiste en que, si X es una variable discreta y la probabilidad del suceso $[X = x_i]$ va a calcularse por una aproximación continua, dicho suceso debe escribirse como

$$\left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2} < X \leq \frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right].$$

En consecuencia, la probabilidad de un suceso de la forma $[x_i \leq X \leq x_j]$, con $i < j$, se calculará escribiéndolo como

$$\left[\frac{x_{i-1} + x_i}{2} < X \leq \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right].$$

Ejercicios propuestos

12.1. Demuéstrese que si una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro hacia X, la sucesión $\{X_n - X\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro hacia cero.

12.2. Demuéstrese que si una sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad hacia X, la sucesión $\{X_n - X\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad hacia cero.

12.3. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} 1 & p[X_n = 1] = \dfrac{1}{n^2} \\ 0 & p[X_n = 0] = 1 - \dfrac{1}{n^2} \end{array} \right.$$

Estúdiense las convergencias de la sucesión hacia el cero.

12.4. Se consideran lanzamientos consecutivos e independientes de una moneda. Sea la variable aleatoria:

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{n} & \text{si el } n\text{-ésimo resultado es cara} \\ 0 & \text{si el } n\text{-ésimo resultado es cruz} \end{array} \right.$$

Estúdiense las distintas convergencias de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

12.5. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias, siendo la función de densidad de X_n

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n} & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Estúdiense las convergencias de la sucesión hacia θ

12.6. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tales que

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} \dfrac{1}{n} & p\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = \frac{n^2-1}{n^2} \\ n & p[X_n = n] = \dfrac{1}{n^2} \end{array} \right.$$

Estúdiense las convergencias de la sucesión hacia el cero.

12.7. Sean las sucesiones de variables aleatorias, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, definidas como:

a)

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} 0 & p[X_n = 0] = 1 - \dfrac{1}{n} \\ 1 & p[X_n = 1] = \dfrac{1}{n} \end{array} \right.$$

b)

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} 0 & p[X_n = 0] = 1 - \dfrac{1}{n} \\ n & p[X_n = n] = \dfrac{1}{n} \end{array} \right.$$

Estúdiense las convergencias de las sucesiones hacia el cero. (Sugerencia: la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.)

12.8. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tal que X_n sigue una distribución $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n^2}\right)$. Demuéstrese, utilizando la desigualdad de Chebyshev, que la sucesión $\{X_n - \frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad hacia cero.

12.9. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias tales que X_n sigue una distribución $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$, y sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$. Sean φ_n y φ las correspondientes funciones características. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \, .$$

12.10. Sea A un suceso cualquiera del espacio probabilístico (Ω, α, p). Demuéstrese que la frecuencia de este suceso converge en probabilidad hacia su probabilidad, es decir,

$$fr(A) \xrightarrow{c.p.} p(A) \, .$$

12.11. Sea $\{(X_n, Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias bidimensionales, independientes dos a dos e igualmente distribuidas, existiendo $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{0,2}$ y $\alpha_{1,1}$.

Demuéstrese que

$$S_{XY} \xrightarrow{c.p.} \sigma_{XY}$$

y

$$R_{XY} \xrightarrow{c.p.} \rho_{XY} \ ,$$

donde S_{XY} y R_{XY} son la covarianza y el coeficiente de correlación muestrales, y σ_{XY} y ρ_{XY} las correspondientes características poblacionales.

12.12. Sea $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas tales que

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} 1 & p[X_n = 1] = \dfrac{1}{2} \\ -1 & p[X_n = -1] = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

a) Demuéstrese que $\varphi_{X_n}(t) = \cos(t)$.

b) Compruébese que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t) \ ,$$

siendo

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - E(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{\sqrt{\text{Var } (\sum_{i=1}^{n} X_i)}} \qquad \text{y} \qquad \varphi_Z(t)$$

la función característica de una normal estándar, es decir, compruébese que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica el teorema del límite central. (Sugerencia: recuérdese que $1 - \cos(x) = 2 \text{ sen}^2(\frac{x}{2})$.)

12.13. El número de erratas de imprenta en una página de un libro sigue una distribución de Poisson, siendo 2 el número medio de erratas por página. En un libro de 300 páginas, ¿cuál es la probabilidad de que en una o más páginas existan más de 5 erratas?

12.14. Una máquina empaqueta lotes de folios. El dueño de la máquina desea que al menos el 90 % de dichos lotes tengan más de mil folios no defectuosos. Sabiendo que la probabilidad de que un folio sea defectuoso es 0.02, ¿qué número de folios deberá disponer por lote?

12.15. En un museo se venden diariamente mil entradas, siendo la proporción esperada de visitantes extranjeros del 35 %. ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana fueran más de 5.000 los españoles que visitaron este museo?

12.16. Las galletas Gruñón están de oferta: algunos de sus paquetes incluyen vales canjeables por viajes al Caribe.

El número de paquetes premiados que se venden al día en un establecimiento es una variable de Poisson de parámetro 0.5. Calcúlese la probabilidad de que en 100 días se vendan más de 40 paquetes con premio.

12.17. Tres cadenas de televisión tienen una dura competencia por conseguir los más altos niveles de audiencia.

El promedio diario de premios millonarios es de 5, 3 y 4 para cada una de ellas, siendo las desviaciones típicas de 0.5, 0.4 y 0.3, respectivamente.

Determínese la probabilidad de que el número total de premios millonarios repartidos en dos meses sea superior a 730.

12.18. En las últimas semanas, el servicio de urgencias de un hospital se encuentra desbordado de trabajo, pues el número de pacientes que requieren este tipo de atención ha aumentado de modo alarmante.

Si el número medio de gasas que se utilizan diariamente en este servicio es de 200, con una desviación típica de 20, hállese el número mínimo de gasas que deberá encargar el supervisor de esta unidad para asegurar con probabilidad del 99 % que todas las necesidades queden cubiertas durante un período de medio año.

12.19. El promedio de bolígrafos que se venden diariamente en una papelería es 30, siendo la desviación típica 5. Estos valores son 20 y 4, para el número de cuadernos vendidos. Se sabe, además, que el coeficiente de correlación entre las ventas de ambos productos es 0.7. ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de ambos artículos vendidos durante un trimestre esté comprendido entre 4.300 y 4.600 unidades?

12.20. Cincuenta estudiantes del último curso de una Facultad decidieron vender camisetas para costear su viaje de fin de carrera. Como no estaban muy seguros del éxito que iban a tener, adquirieron pocas camisetas; sin embargo, vendieron todas las unidades en tan poco tiempo que optaron por comprar más. Sabiendo que el promedio de camisetas vendidas por alumno es de 30 y la desviación típica de 6:

a) ¿Cuál es el número máximo de camisetas que deben encargar para asegurar la venta total con una probabilidad del 90 %?

b) Si por cada camiseta se obtiene un beneficio de 500 pesetas, ¿cuál es la probabilidad de que el beneficio total para esta última remesa de camisetas supere las 800.000 pesetas?

12.21. La renta de los individuos de un país sigue una distribución de Pareto con $x_0 = 70.000$ pesetas y $\alpha = 2.5$. ¿Cuál es la probabilidad de que la renta media de un grupo de 1.000 individuos sea superior a 120.000 pesetas?

12.22. Sean $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución gamma $\gamma(a, p)$.

a) Hállese la distribución exacta y la distribución asintótica de $\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$.

b) Utilizando las distribuciones obtenidas, calcúlese, $p[\overline{X}_n > 2.2525]$ para $a = 0.1$, $p = 0.25$ y $n = 200$.

Resolución de los ejercicios

Ejercicio 12.1.
Dado que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro hacia X,

$$p[\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)] = 1\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$p[\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} (X_n(\omega) - X(\omega)) = 0] = p[\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} (X_n - X)(\omega) = 0] = 1\,.$$

Por tanto, la sucesión $\{X_n - X\}_{n=1}^{\infty}$ convergerá casi seguro hacia cero.

Ejercicio 12.2.
Como $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad hacia X, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - X| > \varepsilon] = 0\,,$$

que escrito como

$$\lim_{n\to\infty} p[|(X_n - X) - 0| > \varepsilon] = 0\,,$$

confirma que $\{X_n - X\}_{n=1}^{\infty}$ converge en probabilidad hacia cero.

Ejercicio 12.3.
Veamos si la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro hacia 0, estudiando, para cualquier $\varepsilon > 0$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon]\,.$$

Como X_n es siempre no negativa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

En cualquier caso, y dado que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, la serie es convergente y, consecuentemente, la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge casi seguro hacia la variable degenerada que siempre vale cero; es decir,

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0\,.$$

Estudiemos la convergencia en probabilidad, es decir, veamos si se verifica que, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = 0\,.$$

Ahora bien,

$$p[|X_n - 0| > \varepsilon] = p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} & \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

En ambos casos,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = 0\,,$$

es decir,

$$X_n \xrightarrow{c.p.} 0\,.$$

Veamos si esta sucesión converge en media de orden r hacia la variable aleatoria degenerada en el cero. Como X_n es una variable no negativa,

$$E[|X_n - 0|^r] = E[(X_n)^r] = \frac{1}{n^2}\,.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^r] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0\,,$$

es decir, sea cual sea r $(r = 1, 2, \ldots)$,

$$X_n \xrightarrow{m.r} 0\,.$$

Para estudiar la convergencia en ley de la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, obtengamos la función de distribución de X_n:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n^2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Por su parte, la función de distribución de X, variable degenerada en cero, es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, dado que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1\,,$$

obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_X(x) .$$

Por tanto,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 .$$

Ejercicio 12.4.
Concretemos las probabilidades de X_n. Obviamente, la probabilidad de obtener cara, o la de obtener cruz, es la misma en todos los lanzamientos; es decir, suponiendo que la moneda es normal,

$$X_n : \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{n} & p\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = \frac{1}{2} \\ 0 & p[X_n = 0] = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Estudiemos las distintas convergencias de la serie hacia el cero, pues de existir estas convergencias, lo lógico es que lo sean hacia el cero, dado que los valores de las variables que forman la serie, o bien son cero, o bien son un número que se acerca progresivamente hacia cero. Así, si al tirar consecutivamente la moneda, obtenemos la siguiente secuencia de caras (c) y cruces (z),

$$(z_1, c_2, z_3, c_4, z_5, z_6, c_7, z_8, \ldots) ,$$

la sucesión se concreta en

$$(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{7}, 0, \ldots) .$$

Para estudiar la convergencia casi segura analicemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} p[X_n > \varepsilon] .$$

Teniendo en cuenta que

$$[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \varepsilon \geq 1/n \\ [X_n = \frac{1}{n}] & \text{si } \varepsilon < 1/n \end{cases}$$

su probabilidad será

$$p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geq 1/n \\ 1/2 & \text{si } \varepsilon < 1/n \end{cases}$$

Luego la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \geq 1 \\ \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2} = \frac{k}{2} & \text{si } \frac{1}{k+1} \leq \varepsilon < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

En todo caso, la serie es convergente y, por tanto,

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0\,.$$

Estudiemos la convergencia en probabilidad. Si $\varepsilon \geq 1$,

$$p[|X_n - 0| > \varepsilon] = p[X_n > \varepsilon] = 0$$

para todo n, y si $\varepsilon < 1$,

$$p[|X_n - 0| > \varepsilon] = p[X_n > \varepsilon] = \frac{1}{2}$$

para los primeros valores de n (en concreto, para $n < 1/\varepsilon$), anulándose a partir de un n dado. Por tanto, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = 0\,,$$

es decir,

$$X_n \xrightarrow{c.p.} 0\,.$$

A continuación estudiemos la convergencia en media de orden r:

$$E[|X_n - 0|^r] = E[(X_n)^r] = \left(\frac{1}{n}\right)^r \cdot \frac{1}{2} + 0^r \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2n^r}\,.$$

De aquí, sea cual sea r ($r = 1, 2, \ldots$),

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^r] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n^r} = 0\,,$$

esto es,

$$X_n \xrightarrow{m.r.} 0\,.$$

Para concluir, calculemos la función de distribución de X_n:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Obteniendo el límite,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

que es la función de distribución de la variable degenerada en cero. Por tanto,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0\,.$$

Ejercicio 12.5.

Para facilitar los razonamientos posteriores, calculemos la función de distribución de X_n y las funciones de densidad y de distribución de $Y_n = |X_n - \theta|$.

De forma inmediata, integrando la función de densidad de X_n,

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & 0 < x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

Por otra parte,

$$F_{Y_n}(y) = p[Y_n \leq y] = p[|X_n - \theta| \leq y] = p[\theta - y \leq X_n \leq \theta + y] =$$

$$= F_{X_n}(\theta + y) - F_{X_n}(\theta - y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{\theta - y}{\theta}\right)^n & 0 < y < \theta \\ 1 & y \geq \theta \end{cases}$$

Derivando,

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} n \cdot \dfrac{(\theta - y)^{n-1}}{\theta^n} & 0 < y < \theta \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para estudiar la convergencia casi segura, analicemos, para cualquier $\varepsilon > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - \theta| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} p[Y_n > \varepsilon]\,.$$

Ahora bien,

$$p[|X_n - \theta| > \varepsilon] = p[Y_n > \varepsilon] = 1 - F_{Y_n}(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon \geq \theta \\ \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n & \varepsilon < \theta \end{cases}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - \theta| > \varepsilon] = \begin{cases} 0 & \varepsilon \geq \theta \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n = \frac{\theta - \varepsilon}{\varepsilon} & \varepsilon < \theta \end{cases}$$

resultado este último que se obtiene al sumar la progresión geométrica ilimitada, siendo el primer término y la razón iguales a $\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}$, valor éste menor que uno. En todo caso, la serie es convergente y, por tanto,

$$X_n \xrightarrow{c.s.} \theta\,.$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n-\theta|>\varepsilon] = \begin{cases} 0 & \varepsilon \geq 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n = 0 & \varepsilon < \theta \end{cases}$$

es decir,

$$X_n \xrightarrow{c.p.} \theta\,.$$

Para estudiar la convergencia en media de orden r, calculemos la siguiente esperanza:

$$E[|X_n-\theta|^r] = E(Y_n^r) = \int_{y=0}^{\theta} y^r \cdot n \frac{(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n}\,dy =$$

$$= n\cdot\theta^r \int_{u=0}^{1} (1-u)^r \cdot u^{n-1}\,du\,,$$

sin más que realizar el cambio de variable $u = \frac{\theta-y}{\theta}$. Ahora bien, esta última integral es la función beta,

$$\beta(n, r+1) = \frac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+1)}\,.$$

Por tanto,

$$E[|X_n-\theta|^r] = n\cdot\theta^r \frac{\Gamma(n)\cdot\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+1)} = \theta^r \frac{n!\,r!}{(n+r)!} = \frac{\theta^r\,r!}{(n+r)\cdots(n+1)}\,.$$

En todo caso,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n-\theta|^r] = 0\,,$$

y, por tanto, para todo r ($r = 1, 2, \ldots$),

$$X_n \xrightarrow{m.r.} \theta\,.$$

Por último, tomando límites en la función de distribución de X_n,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \theta \\ 1 & x \geq \theta \end{cases}$$

que no es otra que la función de distribución de una variable degenerada en θ; esto es,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta\,.$$

Ejercicio 12.6.
Para estudiar la convergencia casi segura hacia cero, analicemos la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n-0|>\varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} p[X_n>\varepsilon]\,,$$

para cualquier $\varepsilon > 0$. Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{si } k-1 \leq \varepsilon < k\,, \quad k = 2,3,\ldots \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} & \text{si } \tfrac{1}{2} \leq \varepsilon < 1 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{n^2-1}{n^2} & \text{si } \dfrac{1}{k+1} \leq \varepsilon < \dfrac{1}{k}\,, \quad k = 2,3,\ldots \end{cases}$$

En todos los casos se trata de la serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$, a la que se le suman o restan distintas cantidades; esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} p[X_n > \varepsilon]$ converge siempre. Por tanto,

$$X_n \xrightarrow{c.s.} 0\,.$$

Por otra parte, dado un $\varepsilon > 0$ cualquiera, siempre se cumple que, si n es mayor que un cierto n_0, entonces, $\frac{1}{n} \leq \varepsilon < n$; el suceso $[|X_n - 0| \leq \varepsilon] = [X_n \leq \varepsilon]$ coincide, por tanto, con $[X_n = \frac{1}{n}]$, para valores de n mayores que n_0.

Así, para esos valores de n,

$$p[|X_n - 0| \leq \varepsilon] = p\left[X_n = \frac{1}{n}\right] = \frac{n^2-1}{n^2}\,.$$

En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - 0| \leq \varepsilon] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = 1\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = 0\,,$$

y, por tanto,

$$X_n \xrightarrow{c.p.} 0\,.$$

Para estudiar la convergencia en media de orden r,

$$E[|X_n - 0|^r] = E[(X_n)^r] = \left(\frac{1}{n}\right)^r \cdot \frac{n^2-1}{n^2} + n^r \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^{2r} + n^2 - 1}{n^{r+2}}\,.$$

Si $r = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|] = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^3} = 0\,,$$

pero si $r \geq 2$, dicho límite o no es finito ($r > 2$) o es uno ($r = 2$). Por tanto, la sucesión converge en media ($r = 1$) hacia cero, no convergiendo en media de orden superior.

Para estudiar la convergencia en ley hacia el cero, hallemos previamente la función de distribución de X_n:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{n^2-1}{n^2} & \dfrac{1}{n} \leq x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

ya que las dos ramas no nulas de $F_n(x)$ tienden hacia 1 cuando n tiende hacia ∞, tomando x valores mayores o iguales que cero. Entonces, $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ es la función de distribución de una variable degenerada en cero y, por tanto,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0 .$$

Ejercicio 12.7.

a) Estudiemos la convergencia casi seguro hacia cero, viendo el comportamiento de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon]$$

para cualquier $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

Como esta serie no es siempre convergente (en concreto, para $0 < \varepsilon < 1$ es divergente), no podemos afirmar que la sucesión $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja casi seguro hacia cero; ahora bien, tampoco podemos negarlo, dado que la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] ,$$

para cualquier $\varepsilon > 0$, es una condición suficiente, pero no necesaria, para la convergencia casi segura. Por otra parte, el estudio directo de la convergencia casi segura, es decir, comprobar si se verifica, o no, que

$$p[\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0] = 1 ,$$

no es posible, dado que se desconoce la aplicación, X_n, de Ω en $\mathbb{R}$, y sólo conocemos los valores que toma dicha aplicación, el cero y el uno.

Estudiemos la convergencia en probabilidad. Para ello,

$$p[|X_n - 0| > \varepsilon] = p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad 0 < \varepsilon < 1 \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

Entonces, tanto si ε es mayor o igual que uno, como si es menor,

$$\lim_{n\to\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = 0\,,$$

esto es,

$$X_n \xrightarrow{c.p.} 0\,.$$

Consideremos, ahora, la convergencia en media de orden r. Calculando la siguiente esperanza,

$$E[|X_n - 0|^r] = E[(X_n)^r] = \frac{1}{n}\,,$$

deducimos que, para todo $r = 1, 2, \ldots$,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^r] = 0\,,$$

es decir,

$$X_n \xrightarrow{m.r.} 0\,.$$

Por último, consideremos la función de distribución de X_n:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{n} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Calculando el límite,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

obtenemos la función de distribución de una variable degenerada en el cero, esto es,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0\,.$$

b) Estudiemos, en primer lugar, la convergencia casi segura, analizando para cualquier $\varepsilon > 0$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = \sum_{n=1}^{\infty} p[X_n > \varepsilon] = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{si} \quad k - 1 \leq \varepsilon < k\,,$$

donde $k = 1, 2, \ldots$ En todo caso, $\sum_{n=1}^{\infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon]$ es una serie divergente, pues no es otra que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a falta de sus $k-1$ primeros términos ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Por tanto, de aquí no podemos deducir la convergencia casi segura de $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ hacia cero, pero tampoco podemos decir que ésta no se verifique.

Estudiemos la convergencia en probabilidad. Para ello,

$$p[|X_n - 0| > \varepsilon] = p[X_n > \varepsilon] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad \varepsilon < n \\ 0 & \text{si} \quad \varepsilon \geq n \end{cases}$$

En todo caso,

$$\lim_{n \to \infty} p[|X_n - 0| > \varepsilon] = 0\,,$$

con lo cual,

$$X_n \xrightarrow{c.p.} 0\,.$$

Estudiemos, ahora, la convergencia en media de orden r hacia el cero. Así,

$$E[|X_n - 0|^r] = E[(X_n)^r] = 0^r \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^r \cdot \frac{1}{n} = n^{r-1}\,.$$

Entonces, para $r = 1$,

$$\lim_{n \to \infty} E[|X_n - 0|] = 1\,,$$

siendo divergente el límite cuando $r > 1$. Por tanto, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge en media de ningún orden hacia cero.

Para concluir, calculemos la función de distribución de X_n,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{n} & 0 \leq x < n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

que no es otra cosa que la función de distribución de una variable aleatoria degenerada en cero. Por tanto,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0\,.$$

Ejercicio 12.8.
Aplicando la desigualdad de CHEBYSHEV a la variable X_n, obtenemos que, para cualquier $\varepsilon > 0$,

$$p[|X_n - \mu_n| > \varepsilon] \leq \frac{\sigma_n^2}{\varepsilon^2}\,.$$

Ahora bien, como X_n sigue una distribución binomial de parámetros n y $\frac{1}{n^2}$,

$$\mu_n = E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

y

$$\sigma_n^2 = \text{Var } (X_n) = n \cdot \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n^2 - 1}{n^3},$$

de donde resulta que

$$p\left[\left|X_n - \frac{1}{n}\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{\frac{n^2-1}{n^3}}{\varepsilon^2}.$$

Tomando límites,

$$\lim_{n\to\infty} p\left[\left|X_n - \frac{1}{n}\right| > \varepsilon\right] = 0,$$

es decir,

$$X_n - \frac{1}{n} \xrightarrow{c.p.} 0.$$

Ejercicio 12.9.
La función característica de la variable X_n con distribución $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ es

$$\varphi_n(t) = \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n} \cdot e^{it}\right]^n.$$

Calculemos el límite de esta función cuando n tiende hacia ∞, límite que es de la forma 1^∞.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) &= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) + \frac{\lambda}{n} \cdot e^{it}\right]^n = \\
&= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n \ln\left[\left(1 - \tfrac{\lambda}{n}\right) + \tfrac{\lambda}{n} \cdot e^{it}\right]\right\} = \\
&= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left(-\frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} \cdot e^{it}\right)\right\} = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi(t),
\end{aligned}$$

sin más que tener en cuenta que cuando z tiende a cero, $\ln(1+z)$ y z son infinitésimos equivalentes.

El resultado confirma la convergencia en ley de la binomial hacia la distribución de Poisson, es decir, si X_n es una $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X,$$

donde $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 12.10.
Se realizan sucesivos experimentos de Bernoulli independientes observándose la ocurrencia, o no, del suceso A. Consideremos la variable

$$X_i : \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{ocurre } A \text{ en el } i\text{-ésimo experimento} \\ 0 & \text{no ocurre } A \text{ en el } i\text{-ésimo experimento} \end{array} \right.$$

que será una variable de Bernoulli de parámetro $p = p[X_i = 1] = p(A)$. Por tanto,

$$E(X_i) = p(A)\,.$$

El teorema de KHINCHIN, aplicado a esta sucesión de variables, demuestra que

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.p.} \mu\,.$$

Ahora bien, como

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} X_i}{n} = \frac{\text{Número de veces que ocurre } A}{\text{Número de experimentos}} = \text{fr}(A)$$

y

$$\mu = E(X_i) = p(A)\,,$$

concluimos que

$$fr(A) \xrightarrow{c.p.} p(A)\,.$$

Este resultado confirma la denominada ley de regularidad estadística, es decir, el hecho de que la frecuencia relativa de un suceso se estabiliza cuando el número de experimentos crece indefinidamente.

(Obsérvese que si aplicásemos directamente el teorema de BOREL demostraríamos este resultado para la convergencia casi segura.)

Ejercicio 12.11.
El teorema de KHINCHIN confirma la convergencia en probabilidad de la media muestral de una sucesión de variables independientes dos a dos e igualmente distribuidas hacia su media poblacional, μ, siempre que ésta exista:

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{c.p.} \mu\,.$$

El término general de la sucesión de las covarianzas de $\{(X_n\,, Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ se puede expresar como

$$S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot Y_i}{n} - \overline{X}_n \cdot \overline{Y}_n = \overline{(X \cdot Y)}_n - \overline{X}_n \cdot \overline{Y}_n$$

donde por $\overline{(X \cdot Y)}_n$ designamos la media muestral de los productos $X_i \cdot Y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Por el teorema de KHINCHIN,

$$\overline{(X \cdot Y)}_n \xrightarrow{c.p.} E(X \cdot Y) = \alpha_{1,1}\,,$$

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.p.} E(X) = \alpha_{1,0} \qquad \text{e}$$
$$\overline{Y}_n \xrightarrow{c.p.} E(Y) = \alpha_{0,1} ,$$

donde designamos por $E(X \cdot Y)$, $E(X)$ y $E(Y)$ a las esperanzas de $X_i \cdot Y_i$, de X_i y de Y_i, respectivamente, para cualquier i. Teniendo en cuenta que, si varias sucesiones convergen en probabilidad, esta convergencia se mantiene en la sucesión formada por sumas, diferencias, productos o divisiones de las anteriores,

$$S_{XY} = \overline{(X \cdot Y)}_n - \overline{X}_n \cdot \overline{Y}_n \xrightarrow{c.p.} E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \sigma_{XY} .$$

En cuanto a la sucesión de coeficientes de correlación lineal de $\{(X_n , Y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, cuyo término general designamos por

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} ,$$

donde S_X y S_Y son los términos generales de las sucesiones de las desviaciones típicas muestrales de $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, podemos seguir un razonamiento similar. En primer lugar, el término general de la sucesión de varianzas muestrales de $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ se puede expresar como

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{n} - (\overline{X}_n)^2 = \overline{(X^2)}_n - (\overline{X}_n)^2 ,$$

con $\overline{(X^2)}_n$ media muestral de las variables X_i^2 $(i = 1, \ldots, n)$.

Aplicando el teorema de KHINCHIN a las sucesiones $\{{X_n}^2\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, se obtiene:

$$\overline{(X^2)}_n \xrightarrow{c.p.} E(X^2) = \alpha_{2,0}$$

y

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.p.} E(X) = \alpha_{1,0} .$$

Dado que la convergencia en probabilidad se mantiene al aplicar a las sucesiones las operaciones más comunes, entonces,

$$S_X^2 = \overline{(X^2)}_n - (\overline{X}_n)^2 \xrightarrow{c.p.} E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma_X^2 ,$$

o bien,

$$S_X \xrightarrow{c.p.} \sigma_X ,$$

resultado que se verificará, asimismo, para la sucesión $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir,

$$S_Y \xrightarrow{c.p.} \sigma_Y .$$

Teniendo en cuenta el resultado demostrado en la primera parte del ejercicio y la propiedad de la convergencia en probabilidad de mantenerse ante las principales operaciones,

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} \xrightarrow{c.p.} \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho_{XY} .$$

Ejercicio 12.12.

a) La función característica de X_n es

$$\varphi_{X_n}(t) = E(e^{itX}) = e^{it} \cdot \frac{1}{2} + e^{-it} \cdot \frac{1}{2} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$$

y

$$e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) = \cos(t) - i \operatorname{sen}(t),$$

obtenemos que

$$e^{it} + e^{-it} = 2\cos(t)$$

y, por tanto,

$$\varphi_{X_n}(t) = \cos(t).$$

b) Teniendo en cuenta que $\mu = E(X_i) = 0$ y $\sigma^2 = \text{Var}\ (X_i) = 1$, tenemos que

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - E(\sum_{i=1}^n X_i)}{\sqrt{\text{Var}\ (\sum_{i=1}^n X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n \cdot \sigma^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cdot \overline{X}_n.$$

Calculemos el límite de la función característica de la variable Z_n. Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones características,

$$\varphi_{Z_n} = \varphi_{\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n}(t) = \varphi_{\overline{X}_n}(\sqrt{n}\,t) = \left[\varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n,$$

y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln\left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\}.$$

El infinitésimo $\ln[\cos(\frac{t}{\sqrt{n}})]$ se puede sustituir por $\cos(\frac{t}{\sqrt{n}}) - 1$; entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left[\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1\right]\right\} = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left[-2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right]\right\},$$

y, dado que el infinitésimo $\operatorname{sen}(\frac{t}{2\sqrt{n}})$ se puede sustituir por $(\frac{t}{2\sqrt{n}})$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \exp\left\{\lim_{n\to\infty} -\frac{2nt^2}{4n}\right\} = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

que es la función característica de la distribución normal estándar.

Ejercicio 12.13.
La variable X, *número de erratas por página*, sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$. La probabilidad de que *en una página existan más de 5 erratas* es

$$p[X > 5] = 1 - p[X \leq 5] = 1 - 0.9834 = 0.0166\,,$$

sin más que utilizar la tabla de la distribución de Poisson.

Sea Y la variable *número de páginas con más de 5 erratas*, variable que contabiliza el número de éxitos (páginas con más de 5 erratas) en 300 experimentos de Bernoulli independientes; es decir,

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(300, 0.0166)\,.$$

Se trata de calcular la probabilidad de que *en una o más páginas existan más de 5 erratas*, es decir,

$$p[Y \geq 1] = 1 - p[Y = 0]\,.$$

Esta probabilidad no se puede calcular con ayuda de las tablas, puesto que las tablas de la distribución binomial solamente admiten valores de n menores o iguales que 20. Por tanto, habrá que calcularla directamente, o por aproximación a otras distribuciones. Así,

$$p[Y = 0] = \binom{300}{0} \cdot (0.0166)^0 \cdot (0.9834)^{300} = 0.0066\,,$$

con lo cual,

$$p[Y \geq 1] = 0.9934\,.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\mathcal{B}(n, p) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\lambda)$$

cuando $n \to \infty$, $p \to 0$ y $n \cdot p = \lambda$, pudiéndose aplicar la aproximación cuando $n > 20$, $p \leq 0.1$ y $n \cdot p \leq 20$.

En este sentido, como $n \cdot p = 4.98$,

$$Y \overset{asint.}{\hookrightarrow} \mathcal{P}(4.98)\,,$$

con lo cual, tras consultar la tabla de la distribución de Poisson de parámetro 5 (valor más próximo), obtenemos que

$$p[Y = 0] \simeq 0.0067\,,$$

con lo cual

$$p[Y \geq 1] \simeq 0.9933\,.$$

Asimismo, sabemos que

$$\mathcal{B}(n, p) \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(np, \sqrt{npq})\,,$$

aproximación que será válida para $n \geq 20$. Entonces,

$$Y \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(4.98, 2.21)\,,$$

y, utilizando la corrección por continuidad de FISHER, obtenemos:

$$p[Y = 0] = p[-0.5 < Y \leq 0.5] \quad = p\left[\frac{-0.5 - 4.98}{2.21} < \frac{Y - 4.98}{2.21} \leq \frac{0.5 - 4.98}{2.21}\right] \simeq$$
$$\simeq p[-2.48 < Z \leq -2.03]\,,$$

donde hemos designado por Z una variable con distribución normal estándar. Consultando las tablas de esta distribución,

$$p[Y = 0] \simeq 0.0146\,,$$

de donde

$$p[Y \geq 1] \simeq 0.9854\,.$$

La corrección por continuidad de FISHER es absolutamente necesaria cuando se calculan, mediante aproximación a una distribución continua, probabilidades puntuales de una variable discreta (si no se hiciese la corrección, la probabilidad aproximada valdría cero), mientras que sólo es recomendable cuando se trata de hallar la probabilidad de un conjunto de valores (de hecho, recurrir o no a esta corrección no cambia significativamente estas probabilidades).

Ejercicio 12.14.
Consideremos la variable X, *número de folios no defectuosos* en un paquete que contiene n folios, variable que contabiliza el número de éxitos (folio no defectuoso) en n experimentos de Bernoulli independientes. Por tanto,

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.98)\,,$$

donde 0.98 es la probabilidad de que *un folio no sea defectuoso*. Trataremos de calcular el mínimo valor de n para el cual

$$p[X > 1\,000] \geq 0.90\,.$$

Dado que n tiene que ser mayor que 1 000, no podemos ayudarnos de las tablas de la distribución binomial, que sólo proporcionan probabilidades cuando n es menor o igual que 20. Por otra parte, el cálculo directo, es decir, hallar el mínimo n que verifique que

$$\sum_{k=1001}^{n} \binom{n}{k} \cdot 0.98^k \cdot 0.02^{n-k} \geq 0.90\,,$$

no es sencillo. Estas dificultades obligan a aproximar la distribución binomial a una distribución de Poisson o a una normal. La aproximación a la distribución de Poisson se complica, pues tenemos que definir la variable $Y = n - X$, *número de folios defectuosos*, para que el valor de p, probabilidad de éxito, sea pequeño, de acuerdo con los supuestos de esta aproximación. Es por ello por lo que utilizaremos la aproximación a la normal.

En este caso,

$$X \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(0.98 \cdot n,\, 0.14 \cdot \sqrt{n})\,.$$

Entonces, haciendo la corrección por continuidad y tipificando,

$$p[X > 1\,000] = p[X > 1\,000.5] \;= p\left[\frac{X - 0.98 \cdot n}{0.14 \cdot \sqrt{n}} > \frac{1\,000.5 - 0.98 \cdot n}{0.14 \cdot \sqrt{n}}\right] \simeq$$
$$\simeq p\left[Z > \frac{1\,000.5 - 0.98 \cdot n}{0.14 \cdot \sqrt{n}}\right] \geq 0.90\,,$$

siendo Z una normal estándar. Las tablas proporcionan el mayor valor que deja a su derecha al menos el 90 % de la probabilidad, que es -1.29, es decir,

$$\frac{1\,000.5 - 0.98 \cdot n}{0.14 \cdot \sqrt{n}} = -1.29\,.$$

La resolución de la ecuación

$$0.98 \cdot n - 0.1792 \cdot \sqrt{n} - 1\,000.5 = 0$$

proporciona el valor $\sqrt{n} = 32.04$, es decir, $n = 1\,026.82$. Por tanto, se han de disponer al menos 1 027 folios en cada lote para que al menos el 90 % de los lotes contenga más de 1 000 folios no defectuosos.

Ejercicio 12.15.
Consideremos la variable X_i, *número de visitantes españoles que acuden el día i-ésimo*, que sigue una distribución binomial,

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1\,000, 0.65)\,,$$

pues contabiliza el número de éxitos (visitante español) en 1 000 experimentos independientes (las 1 000 entradas vendidas). Entonces, el *número de visitantes españoles que acuden en una semana*, Y, será

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_7\,.$$

Suponiendo que estas variables son independientes, la variable Y será también binomial, en concreto,

$$Y \hookrightarrow \mathcal{B}(7\,000, 0.65)\,.$$

Entonces, tendremos que calcular la probabilidad de que *acudan más de 5.000 españoles*, es decir,

$$p[Y > 5\,000]\,.$$

Dado que el parámetro n de la binomial es mayor que 20, tendremos que recurrir a la aproximación a la distribución de Poisson o a la normal. Desechamos la primera aproximación

pues da lugar a una distribución de Poisson de parámetro 650, que no está tabulada. En consecuencia, aproximando a una normal,

$$Y \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(4\,550, 39.91)\,.$$

Por tanto, haciendo la corrección por continuidad,

$$p[Y > 5\,000] = p[Y > 5\,000.5] = p\left[\frac{Y - 4\,550}{39.91} \geq \frac{5\,000.5 - 4\,550}{39.91}\right] \simeq p[Z \geq 11.29]\,;$$

ahora bien, la probabilidad de que una normal estándar sea mayor o igual que 11.29 es prácticamente cero, es decir, es muy improbable (casi imposible) que acudan más de 5 000 españoles al museo.

Ejercicio 12.16.
El *número de paquetes premiados que se venden el día i-ésimo* en el establecimiento, X_i, sigue una distribución de Poisson,

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(0.5)\,.$$

Entonces, el *número de paquetes premiados que se venden en 100 días*, Y, será

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}\,,$$

que, suponiendo independencia entre las variables X_i, también seguirá una distribución de Poisson,

$$Y \hookrightarrow \mathcal{P}(50)\,.$$

Por tanto, se trata de calcular la probabilidad de que Y sea mayor que 40, $p[Y > 40]$. Ahora bien, no podemos valernos de las tablas de la distribución de Poisson (sólo disponibles para $\lambda \leq 20$) y, por otra parte, el cálculo directo,

$$p[Y > 40] = 1 - p[Y \leq 40] = 1 - \sum_{k=0}^{40} e^{-50} \cdot \frac{50^k}{k!}\,,$$

es engorroso. Todo ello nos obliga a utilizar la aproximación de la distribución de Poisson a la normal. En concreto,

$$Y \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(50, \sqrt{50})\,.$$

Entonces, haciendo la corrección por continuidad de FISHER,

$$p[Y > 40] = p[Y > 40.5] = p\left[\frac{Y - 50}{\sqrt{50}} > \frac{40.5 - 50}{\sqrt{50}}\right] \simeq p[Z > -1.34] \simeq 0.9099\,,$$

donde Z es una normal estándar.

Ejercicio 12.17.
Sean X_1, X_2 y X_3 el número de premios millonarios que reparten diariamente cada una de las cadenas, variables cuya distribución desconocemos, siendo conocidas únicamente

sus esperanzas y desviaciones:

$$\mu_1 = 5, \quad \mu_2 = 3, \quad \mu_3 = 4,$$
$$\sigma_1 = 0.5, \quad \sigma_2 = 0.4 \quad \text{y} \quad \sigma_3 = 0.3.$$

El *número de premios concedidos por las tres cadenas el día i-ésimo*, Y_i, es

$$Y_i = X_{1i} + X_{2i} + X_{3i},$$

y, suponiendo que el número de premios que conceda una cadena es independiente del de cualquier otra,

$$\mu = E(Y_i) = E(X_{1i}) + E(X_{2i}) + E(X_{3i}) = 12$$

y

$$\sigma^2 = \text{Var } (Y_i) = \text{Var } (X_{1i}) + \text{Var } (X_{2i}) + \text{Var } (X_{3i}) = 0.5.$$

Por otra parte, el *número total de premios repartidos en dos meses*, U, es

$$U = Y_1 + \cdots + Y_{60},$$

donde las variables Y_i, que supondremos independientes, tienen la misma distribución, si bien ésta es desconocida. Como no tenemos información de esta distribución, salvo de su esperanza y varianza, podemos utilizar el resultado del teorema del límite central que proporciona la distribución asintótica de la suma de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

donde $\mu = E(Y_i)$ y $\sigma^2 = \text{Var }, (Y_i)$. En este caso,

$$U = \sum_{i=1}^{60} Y_i \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(720, 5.48).$$

Entonces, dado que vamos a aproximar una distribución discreta a una normal, debemos considerar la corrección por continuidad de FISHER; por tanto, la probabilidad de *repartir más de 730 premios en 2 meses* es

$$p[U > 730] = p[U > 730.5] \simeq p[Z > 1.92] = 0.0274,$$

donde $Z \hookrightarrow N(0, 1)$.

Ejercicio 12.18.
Sea X el *número de gasas utilizadas diariamente*, variable cuya esperanza, μ, es 200, y su desviación, σ, 20. El *número de gasas utilizadas durante medio año*, Y, se puede expresar como

$$Y = X_1 + \cdots + X_{183}.$$

De nuevo, no conocemos la distribución de Y, suma de 183 variables independientes e igualmente distribuidas. El teorema del límite central nos puede proporcionar su distribución asintótica. Así,

$$Y = \sum_{i=1}^{183} X_i \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(183 \cdot 200, 20 \cdot \sqrt{183}),$$

es decir, una normal de media 36 600 y desviación 270.55. Entonces, tenemos que calcular el mínimo valor de y, número de gasas que se deberán encargar, tal que

$$p[Y \leq y] \geq 0.99 .$$

Tipificando,

$$p[Y \leq y] \simeq p\left[Z \leq \frac{y - 36\,600}{270.55}\right] \geq 0.99 ,$$

donde $Z \hookrightarrow N(0,1)$. En las tablas de la normal estándar buscaremos el mínimo valor que deja a su izquierda al menos el 99 % de probabilidad; este valor es 2.33. Por tanto,

$$\frac{y - 36\,600}{270.55} = 2.33 ,$$

resultando $y = 37\,230.39$. Es decir, habrá que encargar 37 231 gasas para asegurar, con un 99 % de probabilidad, que se cubren las necesidades del servicio de urgencia.

Ejercicio 12.19.
Sean X_{1i} y X_{2i} las variables aleatorias que designan, respectivamente, el número de bolígrafos y el número de cuadernos vendidos el i-ésimo día ($i = 1, \ldots, 90$). Sabemos que $E(X_{1i}) = 30$, $E(X_{2i}) = 20$, Var $(X_{1i}) = 25$, Var $(X_{2i}) = 16$, y que el coeficiente de correlación entre X_{1i} y X_{2i} es 0.7.

Si denotamos por Y_i la variable aleatoria *número total de bolígrafos y cuadernos vendidos el día i-ésimo*, evidentemente,

$$Y_i = X_{1i} + X_{2i} .$$

Las variables aleatorias $Y_1, \ldots, Y_{90}$ son independientes e igualmente distribuidas, con esperanza

$$E(Y_i) = E(X_{1i}) + E(X_{2i}) = 30 + 20 = 50$$

y varianza

$$\text{Var } (Y_i) = \text{Var}\,(X_{1i}) + \text{Var } (X_{2i}) + 2 \cdot \text{Cov } (X_{1i}, X_{2i}) = 69 ,$$

ya que Cov (X_{1i}, X_{2i}), calculada a partir del coeficiente de correlación y de las desviaciones típicas, vale 14.

La probabilidad pedida,

$$p\left[4\,300 < \sum_{i=1}^{90} Y_i \leq 4\,600\right] ,$$

se puede calcular por aproximación, sin más que aplicar el teorema del límite central; es decir, considerando que

$$\sum_{i=1}^{90} Y_i \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(90 \cdot 50, \sqrt{69} \cdot \sqrt{90}) ,$$

o, lo que es lo mismo, una normal de media 4 500 y desviación 78.8.

Ahora bien, antes de hallar dicha probabilidad hemos de tener en cuenta que el hecho de aproximar una distribución discreta a una continua obliga a utilizar la corrección por continuidad de Fisher. Consecuentemente, la probabilidad que habrá que buscar será

$$p\left[4\,300.5 < \sum_{i=1}^{90} Y_i \leq 4\,600.5\right]$$

que, tipificando, resulta

$$p\left[\frac{4\,300.5 - 4\,500}{78.8} < \frac{\sum_{i=1}^{90} Y_i - 4\,500}{78.8} \leq \frac{4\,600.5 - 4\,500}{78.8}\right] .$$

Aproximando por la distribución normal,

$$p\left[4\,300.5 < \sum_{i=1}^{90} Y_i \leq 4\,600.5\right] \simeq p[-2.53 < Z \leq 1.28] = 0.8942 ,$$

donde $Z \hookrightarrow N(0,1)$. Por tanto, la probabilidad de vender trimestralmente entre 4 300 y 4 600 bolígrafos y cuadernos es, aproximadamente, 0.8942.

Ejercicio 12.20.

a) Si el *número de camisetas vendidas por un estudiante*, X, es una variable de distribución desconocida, siendo su esperanza 30 y su desviación 6, el *número de camisetas vendidas por los 50 estudiantes*, Y, se puede expresar como

$$Y = X_1 + \cdots + X_{50} ,$$

siendo su distribución igualmente desconocida. El teorema del límite central nos permite conocer su distribución asintótica:

$$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(1\,500, 42.43) .$$

Para asegurarse la venta total, al menos con una probabilidad del 90 %, el número de camisetas encargadas, y, deberá ser menor o igual que el número de camisetas que los clientes solicitan para su compra (téngase en cuenta que algún posible comprador se puede quedar sin su camiseta). Entonces, debemos calcular el mayor número y, tal que

$$p[Y \geq y] \geq 0.90 .$$

Entonces, siendo Z una normal estándar,

$$p[Y \geq y] \simeq p\left[Z \geq \frac{y - 1\,500}{42.43}\right] \geq 0.90\,.$$

Las tablas de la distribución normal nos proporcionan el máximo valor que deja a su derecha una probabilidad de al menos 0.90; éste es -1.29. Entonces,

$$\frac{y - 1\,500}{42.43} = -1.29\,,$$

siendo $y = 1\,445.27$. Por tanto, se deben encargar un máximo de 1 445 camisetas para asegurar su venta con al menos el 90 % de probabilidad.

b) Siendo $U = 500 \cdot Y$ el *beneficio total*, y teniendo en cuenta la distribución asintótica de Y,

$$p[U > 800\,000] = p[Y > 1\,600] \simeq p\left[Z > \frac{1\,600 - 1\,500}{42.43}\right] = p[Z > 2.36] = 0.0091\,;$$

es decir, es casi imposible que superen las 800.000 pesetas de beneficios.

Ejercicio 12.21.
Consideremos la variable aleatoria, X, *renta de los individuos de un país*, con distribución de Pareto de parámetros $x_0 = 70.000$ y $\alpha = 2.5$. Vamos a hacer 1.000 observaciones de dicha variable que designaremos por $(X_1, X_2, \ldots, X_{1\,000})$, donde las variables X_i tienen todas la misma distribución, la de X, y son independientes. Entonces, la variable *renta media*,

$$\overline{X}_{1\,000} = \frac{\sum_{i=1}^{1\,000} X_i}{1\,000}\,,$$

seguirá una distribución en principio desconocida. Para calcular la probabilidad pedida,

$$p[\overline{X}_{1\,000} > 120\,000]\,,$$

deberíamos obtener dicha distribución. Ahora bien, esto no es tarea fácil, pudiéndose evitar aplicando un corolario del teorema del límite central que nos asegura, bajo ciertas condiciones (existencia de esperanza, μ, y varianza, σ^2), la normalidad de la distribución asintótica de la media muestral. En concreto,

$$\overline{X}_n \overset{asint.}{\hookrightarrow} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

En este caso, dado que X es una variable de Pareto,

$$\mu = E(X) = \frac{2.5 \cdot 70\,000}{2.5 - 1} = 116\,666.7$$

y

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\ (X) = \frac{2.5 \cdot (70\,000)^2}{(2.5 - 2)\,(2.5 - 1)^2} = 10\,888\,888\,888.9\,.$$

Entonces,

$$\overline{X}_{1\,000} \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(116\,666.7, 3\,299.83) .$$

Por tanto, tipificando,

$$p[\overline{X}_{1\,000} > 120\,000] \simeq p[Z > 1.01] = 0.1562 ,$$

siendo Z una normal estándar.

Ejercicio 12.22.

a) Dado que la distribución gamma es reproductiva,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \gamma(a, p \cdot n) ,$$

y, teniendo en cuenta que al multiplicar una variable gamma por una constante la nueva variable sigue siendo gamma,

$$\overline{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \hookrightarrow \gamma(a\,n, p\,n) .$$

Por tanto, la distribución exacta de la media muestral (distribución para un n fijo) es una gamma de parámetros an y pn, siendo

$$E(\overline{X}_n) = \frac{pn}{an} = \frac{p}{a} \qquad \text{y} \qquad \text{Var } (\overline{X}_n) = \frac{pn}{(an)^2} = \frac{p}{a^2 n} .$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el teorema del límite central (aplicable para las variables gamma, pues su media y su varianza existe),

$$\overline{X}_n \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) .$$

Ahora bien, como $\mu = E(X) = \frac{p}{a}$ y $\sigma^2 = \text{Var } (X) = \frac{p}{a^2}$, el resultado se concreta en

$$\overline{X}_n \overset{asint.}{\hookrightarrow} N\left(\frac{p}{a}, \sqrt{\frac{p}{a^2 \cdot n}}\right) ,$$

es decir, la distribución asintótica de $\overline{X}_n$ (distribución aproximada cuando n es grande) es normal de media $\frac{p}{a}$ y varianza $\frac{p}{a^2 n}$. Obsérvese que los momentos *exactos* coinciden, en este caso, con los momentos *asintóticos*.

Advierta el lector que el resultado asintótico no se debe entender en el sentido que $\overline{X}_n$ converge en ley hacia una variable con distribución $N\left(\frac{p}{a}, \sqrt{\frac{p}{a^2 \cdot n}}\right)$ (absurdo, dado que esta distribución depende de n), sino que

$$\frac{\overline{X}_n - \frac{p}{a}}{\sqrt{\frac{p}{a^2 n}}} \overset{asint.}{\hookrightarrow} N(0, 1) .$$

b) Si las variables X_i siguen una distribución $\gamma(0.1,\ 0.25)$ y $n = 200$, la distribución exacta de la media muestral es

$$\overline{X}_{200} \hookrightarrow \gamma(20, 50) .$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$40 \cdot \overline{X}_{200} \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, 50\right) \simeq \chi^2_{100} ,$$

se obtiene:

$$p[\overline{X}_{200} > 2.2525] = p[40 \cdot \overline{X}_{200} > 90.1] = 1 - 0.25 = 0.75 ,$$

sin más que consultar las tablas de la distribución χ^2.

Por otro lado, dado que $n = 200$ es grande, la media muestral, $\overline{X}_{200}$, seguirá aproximadamente una distribución $N(2.5, 0.3535)$. Por tanto,

$$p[\overline{X}_{200} > 2.2525] = 1 - p\left[\frac{\overline{X}_{200} - 2.5}{0.3535} \leq \frac{2.2525 - 2.5}{0.3535}\right] \simeq 1 - \Phi(-0.70) = 0.7580 .$$

Como se comprueba, la aproximación que proporciona la distribución asintótica es muy buena, distinguiéndose del valor exacto únicamente a partir del tercer decimal.

ANEXO
Tablas estadísticas

I. Función de distribución binomial

La función tabulada para $n \leq 20$ y $p \leq 0.5$ es:

$$F_X(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots, n .$$

Si $p > 0.5$, utilizaremos el resultado $F_X(k) = 1 - F_Y(n-k-1)$, siendo X e Y variables con distribución binomial de parámetros (n, p) y $(n, 1-p)$, respectivamente.

La función de probabilidad es:

$$\begin{aligned} p[X=0] &= F_X(0) \\ p[X=k] &= F_X(k) - F_X(k-1) \qquad \text{para } k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Si $n > 20$, la distribución binomial se aproxima a una distribución normal de media np y varianza npq.

Si $n > 20$, siendo p pequeño y $np \leq 20$, la distribución binomial se aproxima a una distribución de Poisson de media np.

		p											
n	k	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,9999	0,9975	0,9900	0,9775	0,9600	0,9375	0,9100	0,8889	0,8775	0,8400	0,7975	0,7500
	2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,9997	0,9928	0,9720	0,9392	0,8960	0,8438	0,7840	0,7407	0,7182	0,6480	0,5748	0,5000
	2	1,0000	0,9999	0,9990	0,9966	0,9920	0,9844	0,9730	0,9630	0,9571	0,9360	0,9089	0,8750
			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,9994	0,9860	0,9477	0,8905	0,8192	0,7383	0,6517	0,5926	0,5630	0,4752	0,3910	0,3125
	2	1,0000	0,9995	0,9963	0,9880	0,9728	0,9492	0,9163	0,8889	0,8735	0,8208	0,7585	0,6875
	3		1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9961	0,9919	0,9876	0,9850	0,9744	0,9590	0,9375
	4			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0312
	1	0,9990	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4609	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875
	2	1,0000	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7901	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000
	3		1,0000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9547	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125
	4			1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9959	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688
	5				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,9986	0,9672	0,8857	0,7765	0,6553	0,5339	0,4202	0,3512	0,3191	0,2333	0,1636	0,1094
	2	1,0000	0,9978	0,9842	0,9527	0,9011	0,8306	0,7443	0,6804	0,6471	0,5443	0,4415	0,3438
	3		0,9999	0,9987	0,9941	0,9830	0,9624	0,9295	0,8999	0,8826	0,8208	0,7447	0,6562
	4		1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9954	0,9891	0,9822	0,9777	0,9590	0,9308	0,8906
	5			1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9986	0,9982	0,9959	0,9917	0,9844
	6					1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *(cont.)*

		p											
n	*k*	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	0,0152	0,0078
	1	0,9980	0,9556	0,8503	0,7166	0,5767	0,4449	0,3294	0,2634	0,2338	0,1586	0,1024	0,0625
	2	1,0000	0,9962	0,9743	0,9262	0,8520	0,7564	0,6471	0,5706	0,5323	0,4199	0,3164	0,2266
	3		0,9998	0,9973	0,9879	0,9667	0,9294	0,8740	0,8267	0,8002	0,7102	0,6083	0,5000
	4		1,0000	0,9998	0,9988	0,9953	0,9871	0,9712	0,9547	0,9444	0,9037	0,8471	0,7734
	5			1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9962	0,9931	0,9910	0,9812	0,9643	0,9375
	6				1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9995	0,9994	0,9984	0,9963	0,9922
	7						1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	0,0084	0,0039
	1	0,9973	0,9428	0,8131	0,6572	0,5033	0,3671	0,2553	0,1951	0,1691	0,1064	0,0632	0,0352
	2	0,9999	0,9942	0,9619	0,8948	0,7969	0,6785	0,5518	0,4682	0,4278	0,3154	0,2201	0,1445
	3	1,0000	0,9996	0,9950	0,9786	0,9437	0,8862	0,8059	0,7413	0,7064	0,5941	0,4770	0,3633
	4		1,0000	0,9996	0,9971	0,9896	0,9727	0,9420	0,9121	0,8939	0,8263	0,7396	0,6367
	5			1,0000	0,9998	0,9988	0,9958	0,9887	0,9803	0,9747	0,9502	0,9115	0,8555
	6				1,0000	0,9999	0,9996	0,9987	0,9974	0,9964	0,9915	0,9819	0,9648
	7					1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9998	0,9993	0,9983	0,9961
	8							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
9	0	0,9135	0,6302	0,3874	0,2316	0,1342	0,0751	0,0404	0,0260	0,0207	0,0101	0,0046	0,0020
	1	0,9965	0,9288	0,7748	0,5995	0,4362	0,3003	0,1960	0,1431	0,1211	0,0705	0,0385	0,0195
	2	0,9999	0,9916	0,9470	0,8591	0,7382	0,6007	0,4628	0,3772	0,3373	0,2318	0,1495	0,0898
	3	1,0000	0,9994	0,9917	0,9661	0,9144	0,8343	0,7297	0,6503	0,6089	0,4826	0,3614	0,2539
	4		1,0000	0,9991	0,9944	0,9804	0,9511	0,9012	0,1552	0,8283	0,7334	0,6214	0,5000
	5			0,9999	0,9994	0,9969	0,9900	0,9747	0,9576	0,9464	0,9006	0,8342	0,7461
	6			1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9957	0,9917	0,9888	0,9750	0,9502	0,9102
	7					1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9986	0,9962	0,9909	0,9805
	8						1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9992	0,9980
	9								1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9958	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	1,0000	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3		0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4		0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7869	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5		1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9234	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6			1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8803	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7				1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9966	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8					1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9							1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10										1,0000	1,0000	1,0000
11	0	0,8954	0,5688	0,3138	0,1673	0,0859	0,0422	0,0198	0,0116	0,0088	0,0036	0,0014	0,0005
	1	0,9948	0,8981	0,6974	0,4922	0,3221	0,1971	0,1130	0,0752	0,0606	0,0302	0,0139	0,0059
	2	0,9998	0,9848	0,9104	0,7788	0,6174	0,4552	0,3127	0,2341	0,2001	0,1189	0,0652	0,0327
	3	1,0000	0,9984	0,9815	0,9306	0,8389	0,7133	0,5696	0,4726	0,4256	0,2963	0,1911	0,1133
	4		0,9999	0,9972	0,9841	0,9496	0,8854	0,7897	0,7110	0,6683	0,5328	0,3971	0,2744
	5		1,0000	0,9997	0,9973	0,9883	0,9657	0,9218	0,8779	0,8513	0,7535	0,6331	0,5000
	6			1,0000	0,9997	0,9980	0,9924	0,9784	0,9614	0,9499	0,9006	0,8262	0,7256
	7				1,0000	0,9998	0,9988	0,9957	0,9912	0,9878	0,9707	0,9390	0,8867
	8					1,0000	0,9999	0,9994	0,9986	0,9980	0,9941	0,9852	0,9673
	9						1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9993	0,9978	0,9941
	10								1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9995
	11											1,0000	1,0000

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *(cont.)*

		p											
n	*k*	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
12	0	0,8864	0,5404	0,2824	0,1422	0,0687	0,0317	0,0138	0,0077	0,0057	0,0022	0,0008	0,0002
	1	0,9938	0,8816	0,6590	0,4435	0,2749	0,1584	0,0850	0,0540	0,0424	0,0196	0,0083	0,0032
	2	0,9998	0,9804	0,8891	0,7358	0,5583	0,3907	0,2528	0,1811	0,1513	0,0834	0,0421	0,0193
	3	1,0000	0,9978	0,9744	0,9078	0,7946	0,6488	0,4925	0,3931	0,3467	0,2253	0,1345	0,0730
	4		0,9998	0,9957	0,9761	0,9274	0,8424	0,7237	0,6315	0,5833	0,4382	0,3044	0,1938
	5		1,0000	0,9995	0,9954	0,9806	0,9456	0,8822	0,8223	0,7873	0,6652	0,5269	0,3872
	6			0,9999	0,9993	0,9961	0,9857	0,9614	0,9336	0,9154	0,8418	0,7393	0,6128
	7			1,0000	0,9999	0,9994	0,9972	0,9905	0,9812	0,9745	0,9427	0,8883	0,8062
	8				1,0000	0,9999	0,9996	0,9983	0,9961	0,9944	0,9847	0,9644	0,9270
	9					1,0000	1,0000	0,9998	0,9995	0,9992	0,9972	0,9921	0,9807
	10							1,0000	0,9999	0,9999	0,9997	0,9989	0,9968
	11								1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998
	12											1,0000	1,0000
13	0	0,8775	0,5133	0,2542	0,1209	0,0550	0,0238	0,0097	0,0051	0,0037	0,0013	0,0004	0,0001
	1	0,9928	0,8646	0,6213	0,3983	0,2336	0,1267	0,0637	0,0358	0,0296	0,0126	0,0049	0,0017
	2	0,9997	0,9755	0,8661	0,6920	0,5017	0,3326	0,2025	0,1387	0,1132	0,0579	0,0269	0,0112
	3	1,0000	0,9969	0,9658	0,8820	0,7473	0,5843	0,4206	0,3224	0,2783	0,1686	0,0929	0,0461
	4		0,9997	0,9935	0,9658	0,9009	0,7940	0,6543	0,5520	0,5005	0,3530	0,2279	0,1334
	5		1,0000	0,9991	0,9924	0,9700	0,9198	0,8346	0,7587	0,7159	0,5744	0,4268	0,2905
	6			0,9999	0,9987	0,9930	0,9757	0,9376	0,8965	0,8705	0,7712	0,6437	0,5000
	7			1,0000	0,9998	0,9988	0,9944	0,9818	0,9654	0,9538	0,9023	0,8212	0,7095
	8				1,0000	0,9998	0,9990	0,9960	0,9912	0,9874	0,9679	0,9302	0,8666
	9					1,0000	0,9999	0,9993	0,9984	0,9975	0,9922	0,9797	0,9539
	10						1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9987	0,9959	0,9888
	11							1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983
	12										1,0000	1,0000	0,9999
	13												1,0000
14	0	0,8687	0,4877	0,2288	0,1028	0,0440	0,0178	0,0068	0,0034	0,0024	0,0008	0,0002	0,0001
	1	0,9916	0,8470	0,5846	0,3567	0,1979	0,1010	0,0475	0,0274	0,0205	0,0081	0,0029	0,0009
	2	0,9997	0,9699	0,8416	0,6479	0,4481	0,2811	0,1608	0,1053	0,0839	0,0398	0,0170	0,0065
	3	1,0000	0,9958	0,9559	0,8535	0,6982	0,5213	0,3552	0,2612	0,2205	0,1243	0,0632	0,0287
	4		0,9996	0,9908	0,9533	0,8702	0,7415	0,5842	0,4755	0,4227	0,2793	0,1672	0,0898
	5		1,0000	0,9985	0,9885	0,9561	0,8883	0,7805	0,6899	0,6405	0,4859	0,3373	0,2120
	6			0,9998	0,9978	0,9884	0,9617	0,9067	0,8505	0,8164	0,6925	0,5461	0,3953
	7			1,0000	0,9997	0,9976	0,9897	0,9685	0,9424	0,9247	0,8499	0,7414	0,6047
	8				1,0000	0,9996	0,9978	0,9917	0,9826	0,9757	0,9417	0,8811	0,7880
	9					1,0000	0,9997	0,9983	0,9960	0,9940	0,9825	0,9574	0,9102
	10						1,0000	0,9998	0,9993	0,9989	0,9961	0,9886	0,9713
	11							1,0000	0,9999	0,9999	0,9994	0,9978	0,9935
	12								1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9991
	13										1,0000	1,0000	0,9999
	14												1,0000

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *(cont.)*

		p											
n	*k*	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
15	0	0,8601	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0023	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000
	1	0,9904	0,8290	0,5490	0,3186	0,1671	0,0802	0,0353	0,0194	0,0142	0,0052	0,0017	0,0005
	2	0,9996	0,9638	0,8159	0,6042	0,3980	0,2361	0,1268	0,0794	0,0617	0,0271	0,0107	0,0037
	3	1,0000	0,9945	0,9444	0,8227	0,6482	0,4613	0,2969	0,2092	0,1727	0,0905	0,0424	0,0176
	4		0,9994	0,9873	0,9383	0,8358	0,6865	0,5155	0,4041	0,3519	0,2173	0,1204	0,0592
	5		0,9999	0,9978	0,9832	0,9389	0,8516	0,7216	0,3184	0,5643	0,4032	0,2608	0,1509
	6		1,0000	0,9997	0,9964	0,9819	0,9434	0,8689	0,8070	0,7548	0,6098	0,4522	0,3036
	7			1,0000	0,9994	0,9958	0,9827	0,9500	0,9118	0,8868	0,7869	0,6535	0,5000
	8				0,9999	0,9992	0,9958	0,9848	0,9692	0,9578	0,9050	0,8182	0,6964
	9				1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9915	0,9876	0,9662	0,9231	0,8491
	10					1,0000	0,9999	0,9993	0,9982	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408
	11						1,0000	0,9999	0,9997	0,9995	0,9981	0,9937	0,9824
	12							1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9963
	13									1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
	14											1,0000	1,0000
16	0	0,8515	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0015	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000
	1	0,9891	0,8108	0,5147	0,2839	0,1407	0,0635	0,0261	0,0137	0,0098	0,0033	0,0010	0,0003
	2	0,9995	0,9571	0,7892	0,5614	0,3518	0,1971	0,0994	0,0594	0,0451	0,0183	0,0066	0,0021
	3	1,0000	0,9930	0,9316	0,7899	0,5981	0,4050	0,2459	0,1660	0,1339	0,0651	0,0281	0,0106
	4		0,9991	0,9830	0,9209	0,7982	0,6302	0,4499	0,3391	0,2892	0,1666	0,0853	0,0384
	5		0,9999	0,9967	0,9765	0,9183	0,8103	0,6598	0,5469	0,4900	0,3288	0,1976	0,1051
	6		1,0000	0,9995	0,9944	0,9733	0,9204	0,8247	0,7374	0,6881	0,5272	0,3660	0,2272
	7			0,9999	0,9989	0,9930	0,9729	0,9256	0,8735	0,8406	0,7161	0,5629	0,4018
	8			1,0000	0,9998	0,9985	0,9925	0,9743	0,9500	0,9329	0,8577	0,7441	0,5982
	9				1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9841	0,9771	0,9417	0,8759	0,7228
	10					1,0000	0,9997	0,9984	0,9960	0,9938	0,9809	0,9514	0,8949
	11						1,0000	0,9997	0,9992	0,9987	0,9951	0,9851	0,9616
	12							1,0000	0,9999	0,9998	0,9991	0,9965	0,9894
	13								1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979
	14										1,0000	0,9999	0,9997
	15											1,0000	1,0000
17	0	0,8429	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0010	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,9877	0,7922	0,4818	0,2525	0,1182	0,0501	0,0193	0,0096	0,0067	0,0021	0,0006	0,0001
	2	0,9994	0,9497	0,7618	0,5198	0,3096	0,1637	0,0774	0,0442	0,0327	0,0123	0,0041	0,0012
	3	1,0000	0,9912	0,9174	0,7556	0,5489	0,3530	0,2019	0,1304	0,1028	0,0464	0,0184	0,0064
	4		0,9988	0,9779	0,9013	0,7582	0,5739	0,3887	0,2814	0,2348	0,1260	0,0596	0,0245
	5		0,9999	0,9953	0,9681	0,8943	0,7653	0,5968	0,6739	0,4197	0,2639	0,1471	0,0717
	6		1,0000	0,9992	0,9917	0,9623	0,8929	0,7752	0,8281	0,6188	0,4478	0,2902	0,1662
	7			0,9999	0,9983	0,9891	0,9598	0,8954	0,9245	0,7872	0,6405	0,4743	0,3145
	8			1,0000	0,9997	0,9974	0,9876	0,9597	0,9727	0,9006	0,8011	0,6626	0,5000
	9				1,0000	0,9995	0,9969	0,9873	0,9920	0,9617	0,9081	0,8166	0,6855
	10					0,9999	0,9994	0,9968	0,9981	0,9880	0,9652	0,9174	0,8338
	11					1,0000	0,9999	0,9993	0,9997	0,9970	0,9894	0,9699	0,9283
	12						1,0000	0,9999	0,9999	0,9994	0,9975	0,9914	0,9755
	13							1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9936
	14									1,0000	0,9999	0,9997	0,9988
	15										1,0000	1,0000	0,9999
	16												1,0000

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL *(cont.)*

		p											
n	*k*	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
18	0	0,8345	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0007	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,9862	0,7735	0,4503	0,2241	0,0991	0,0395	0,0142	0,0068	0,0046	0,0013	0,0003	0,0001
	2	0,9993	0,9419	0,7338	0,4797	0,2713	0,1353	0,0600	0,0326	0,0236	0,0082	0,0025	0,0007
	3	1,0000	0,9891	0,9018	0,7202	0,5010	0,3057	0,1646	0,1017	0,0783	0,0328	0,0120	0,0038
	4		0,9985	0,9718	0,8794	0,7164	0,5187	0,3327	0,2311	0,1886	0,0942	0,0411	0,0154
	5		0,9998	0,9936	0,9581	0,8671	0,7175	0,5344	0,4122	0,3550	0,2088	0,1077	0,0481
	6		1,0000	0,9988	0,9882	0,9487	0,8610	0,7217	0,6085	0,5491	0,3743	0,2258	0,1189
	7			0,9998	0,9973	0,9837	0,9431	0,8593	0,7767	0,7283	0,5634	0,3915	0,2403
	8			1,0000	0,9995	0,9957	0,9807	0,9404	0,8924	0,8609	0,7368	0,5778	0,4073
	9				0,9999	0,9991	0,9946	0,9790	0,9566	0,9403	0,8653	0,7473	0,5927
	10				1,0000	0,9998	0,9988	0,9939	0,9856	0,9788	0,9424	0,8720	0,7597
	11					1,0000	0,9998	0,9986	0,9961	0,9938	0,9797	0,9463	0,8811
	12						1,0000	0,9997	0,9992	0,9986	0,9942	0,9817	0,9519
	13							1,0000	0,9999	0,9997	0,9987	0,9951	0,9846
	14								1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9962
	15										1,0000	0,9999	0,9993
	16											1,0000	0,9999
	17												1,0000
19	0	0,8262	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0004	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,9847	0,7547	0,4203	0,1985	0,0829	0,0310	0,0104	0,0047	0,0031	0,0008	0,0002	0,0000
	2	0,9991	0,9335	0,7054	0,4413	0,2369	0,1113	0,0462	0,0240	0,0170	0,0055	0,0015	0,0004
	3	1,0000	0,9868	0,8850	0,6841	0,4551	0,2631	0,1332	0,0787	0,0591	0,0230	0,0077	0,0022
	4		0,9980	0,9648	0,8556	0,6733	0,4654	0,2822	0,1879	0,1500	0,0696	0,0280	0,0096
	5		0,9998	0,9914	0,9463	0,8369	0,6678	0,4739	0,3518	0,2968	0,1629	0,0777	0,0318
	6		1,0000	0,9983	0,9837	0,9324	0,8251	0,6655	0,5431	0,4812	0,3081	0,1727	0,0835
	7			0,9997	0,9959	0,9767	0,9225	0,8180	0,7207	0,6656	0,4878	0,3169	0,1796
	8			1,0000	0,9992	0,9933	0,9713	0,9161	0,8538	0,8145	0,6675	0,4940	0,3238
	9				0,9999	0,9984	0,9911	0,9674	0,9352	0,9125	0,8139	0,6710	0,5000
	10				1,0000	0,9997	0,9977	0,9895	0,9759	0,9653	0,9115	0,8159	0,6762
	11					1,0000	0,9995	0,9972	0,9926	0,9886	0,9648	0,9129	0,8204
	12						0,9999	0,9994	0,9981	0,9969	0,9884	0,9658	0,9165
	13						1,0000	0,9999	0,9996	0,9993	0,9969	0,9891	0,9682
	14							1,0000	0,9999	0,9999	0,9994	0,9972	0,9904
	15								1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9978
	16										1,0000	0,9999	0,9996
	17											1,0000	1,0000
20	0	0,8179	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0003	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9831	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0033	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,9990	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0176	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
	3	1,0000	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0604	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
	4		0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1515	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
	5		0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2972	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
	6		1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4793	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
	7			0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6615	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
	8			0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,8094	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
	9			1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,9081	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
	10				1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9624	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
	11					0,9999	0,9991	0,9949	0,9870	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
	12					1,0000	0,9998	0,9987	0,9963	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
	13						1,0000	0,9997	0,9991	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
	14							1,0000	0,9999	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
	15								1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
	16										1,0000	0,9997	0,9987
	17											1,0000	0,9998
	18												1,0000

II. Función de distribución de Poisson

La función tabulada para $\lambda \leq 20$ es:

$$F_X(k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \qquad \text{para } k = 0, 1, \ldots$$

La función de probabilidad es:

$$\begin{aligned} p[X = 0] &= F_X(0) \\ p[X = k] &= F_X(k) - F_X(k-1) \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Si $\lambda > 20$, la distribución de Poisson se aproxima a una distribución normal de media y varianza λ.

	λ									
k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4		1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5				1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6							1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7										1,0000

	λ									
k	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,6990	0,6626	0,6268	0,5918	0,5578	0,5249	0,4932	0,4628	0,4338	0,4060
2	0,9004	0,8795	0,8571	0,8335	0,8088	0,7834	0,7572	0,7306	0,7037	0,6767
3	0,9743	0,9662	0,9569	0,9463	0,9344	0,9212	0,9068	0,8913	0,8747	0,8571
4	0,9946	0,9923	0,9893	0,9857	0,9814	0,9763	0,9704	0,9636	0,9559	0,9473
5	0,9990	0,9985	0,9978	0,9968	0,9955	0,9940	0,9920	0,9896	0,9868	0,9834
6	0,9999	0,9997	0,9996	0,9994	0,9991	0,9987	0,9981	0,9974	0,9966	0,9955
7	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9994	0,9992	0,9989
8			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
9							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	λ									
k	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,3796	0,3546	0,3309	0,3084	0,2873	0,2674	0,2487	0,2311	0,2146	0,1991
2	0,6496	0,6227	0,5960	0,5697	0,5438	0,5184	0,4936	0,4695	0,4460	0,4232
3	0,8386	0,8194	0,7993	0,7787	0,7576	0,7360	0,7141	0,6919	0,6696	0,6472
4	0,9379	0,9275	0,9163	0,9041	0,8912	0,8774	0,8629	0,8477	0,8318	0,8153
5	0,9796	0,9751	0,9700	0,9643	0,9580	0,9510	0,9433	0,9349	0,9258	0,9161
6	0,9941	0,9925	0,9906	0,9884	0,9858	0,9828	0,9794	0,9756	0,9713	0,9665
7	0,9985	0,9980	0,9974	0,9967	0,9958	0,9947	0,9934	0,9919	0,9901	0,9881
8	0,9997	0,9995	0,9994	0,9991	0,9989	0,9985	0,9981	0,9976	0,9969	0,9962
9	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9991	0,9989
10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
11					1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN POISSON *(cont.)*

	λ									
k	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1847	0,1712	0,1586	0,1468	0,1359	0,1257	0,1162	0,1074	0,0992	0,0916
2	0,4012	0,3799	0,3594	0,3397	0,3208	0,3027	0,2854	0,2689	0,2531	0,2381
3	0,6248	0,6025	0,5803	0,5584	0,5366	0,5152	0,4942	0,4735	0,4533	0,4335
4	0,7982	0,7806	0,7626	0,7442	0,7254	0,7064	0,6872	0,6678	0,6484	0,6288
5	0,9057	0,8946	0,8829	0,8705	0,8576	0,8441	0,8301	0,8156	0,8006	0,7851
6	0,9612	0,9554	0,9490	0,9421	0,9347	0,9267	0,9182	0,9091	0,8995	0,8893
7	0,9858	0,9832	0,9802	0,9769	0,9733	0,9692	0,9648	0,9599	0,9546	0,9489
8	0,9953	0,9943	0,9931	0,9917	0,9901	0,9883	0,9863	0,9840	0,9815	0,9786
9	0,9986	0,9982	0,9978	0,9973	0,9967	0,9960	0,9952	0,9942	0,9931	0,9919
10	0,9996	0,9995	0,9994	0,9992	0,9990	0,9987	0,9984	0,9981	0,9977	0,9972
11	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997
13				1,0000	1,0000	1,00000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

	λ									
k	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0123	0,0111	0,0101	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0845	0,0780	0,0719	0,0663	0,0611	0,0563	0,0518	0,0477	0,0439	0,0404
2	0,2238	0,2102	0,1974	0,1851	0,1736	0,1626	0,1523	0,1425	0,1333	0,1247
3	0,4142	0,3954	0,3772	0,3595	0,3423	0,3257	0,3097	0,2942	0,2793	0,2650
4	0,6093	0,5898	0,5704	0,5512	0,5321	0,5132	0,4946	0,4763	0,4582	0,4405
5	0,7693	0,7531	0,7367	0,7199	0,7029	0,6858	0,6684	0,6510	0,6335	0,6160
6	0,8787	0,8675	0,8558	0,8436	0,8311	0,8180	0,8046	0,7908	0,7767	0,7622
7	0,9427	0,9361	0,9290	0,9214	0,9134	0,9050	0,8960	0,8867	0,8769	0,8666
8	0,9755	0,9721	0,9683	0,9642	0,9597	0,9549	0,9497	0,9442	0,9382	0,9319
9	0,9905	0,9889	0,9871	0,9851	0,9829	0,9805	0,9778	0,9749	0,9717	0,9682
10	0,9966	0,9959	0,9952	0,9943	0,9933	0,9922	0,9910	0,9896	0,9880	0,9863
11	0,9989	0,9986	0,9983	0,9980	0,9976	0,9971	0,9966	0,9960	0,9953	0,9945
12	0,9997	0,9996	0,9995	0,9993	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9983	0,9980
13	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
15				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

	λ									
k	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0033	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0372	0,0342	0,0314	0,0289	0,0266	0,0244	0,0224	0,0206	0,0189	0,0174
2	0,1165	0,1088	0,1016	0,0948	0,0884	0,0824	0,0768	0,0715	0,0666	0,0620
3	0,2513	0,2381	0,2254	0,2133	0,2017	0,1906	0,1801	0,1700	0,1604	0,1512
4	0,4231	0,4061	0,3895	0,3733	0,3575	0,3422	0,3272	0,3127	0,2987	0,2851
5	0,5984	0,5809	0,5635	0,5461	0,5289	0,5119	0,4950	0,4783	0,4619	0,4457
6	0,7474	0,7324	0,7171	0,7017	0,6860	0,6703	0,6544	0,6384	0,6224	0,6063
7	0,8560	0,8449	0,8335	0,8217	0,8095	0,7970	0,7842	0,7710	0,7576	0,7440
8	0,9552	0,9181	0,9106	0,9027	0,8944	0,8857	0,8766	0,8672	0,8574	0,8472
9	0,9644	0,9603	0,9559	0,9512	0,9462	0,9409	0,9352	0,9292	0,9228	0,9161
10	0,9844	0,9823	0,9800	0,9775	0,9747	0,9718	0,9686	0,9651	0,9614	0,9574
11	0,9937	0,9927	0,9916	0,9904	0,9890	0,9875	0,9859	0,9841	0,9821	0,9799
12	0,9976	0,9972	0,9967	0,9962	0,9955	0,9949	0,9941	0,9932	0,9922	0,9912
13	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9983	0,9980	0,9977	0,9973	0,9969	0,9964
14	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9991	0,9990	0,9988	0,9986
15	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995
16	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998
17				1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN POISSON *(cont.)*

	λ									
k	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	0,0022	0,0020	0,0018	0,0017	0,0015	0,0014	0,0012	0,0011	0,0010	0,0009
1	0,0159	0,0146	0,0134	0,0123	0,0113	0,0103	0,0095	0,0087	0,0080	0,0073
2	0,0577	0,0536	0,0498	0,0463	0,0430	0,0400	0,0371	0,0344	0,0320	0,0296
3	0,1425	0,1342	0,1264	0,1189	0,1119	0,1052	0,0988	0,0928	0,0871	0,0818
4	0,2719	0,2592	0,2469	0,2351	0,2237	0,2127	0,2022	0,1920	0,1823	0,1730
5	0,4298	0,4141	0,3988	0,3837	0,3690	0,3547	0,3407	0,3270	0,3137	0,3007
6	0,5902	0,5742	0,5582	0,5423	0,5265	0,5108	0,4953	0,4799	0,4647	0,4497
7	0,7301	0,7160	0,7018	0,6873	0,6728	0,6581	0,6433	0,6285	0,6136	0,5987
8	0,8367	0,8259	0,8148	0,8033	0,7916	0,7796	0,7673	0,7548	0,7420	0,7291
9	0,9090	0,9016	0,8939	0,8858	0,8774	0,8686	0,8596	0,8502	0,8405	0,8305
10	0,9531	0,9486	0,9437	0,9386	0,9332	0,9274	0,9214	0,9151	0,9084	0,9015
11	0,9776	0,9750	0,9723	0,9693	0,9661	0,9627	0,9591	0,9552	0,9510	0,9467
12	0,9900	0,9887	0,9873	0,9857	0,9840	0,9821	0,9801	0,9779	0,9755	0,9730
13	0,9958	0,9952	0,9945	0,9937	0,9929	0,9920	0,9909	0,9898	0,9885	0,9872
14	0,9984	0,9981	0,9978	0,9974	0,9970	0,9966	0,9961	0,9956	0,9950	0,9943
15	0,9994	0,9993	0,9992	0,9990	0,9988	0,9986	0,9984	0,9982	0,9979	0,9976
16	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9990
17	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
19			1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	λ									
k	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0003
1	0,0067	0,0061	0,0056	0,0051	0,0047	0,0043	0,0039	0,0036	0,0033	0,0030
2	0,0275	0,0255	0,0236	0,0219	0,0203	0,0188	0,0174	0,0161	0,0149	0,0138
3	0,0767	0,0719	0,0674	0,0632	0,0591	0,0554	0,0518	0,0485	0,0453	0,0424
4	0,1641	0,1555	0,1473	0,1395	0,1321	0,1249	0,1181	0,1117	0,1055	0,0996
5	0,2881	0,2759	0,2640	0,2526	0,2414	0,2307	0,2203	0,2103	0,2006	0,1912
6	0,4349	0,4204	0,4060	0,3920	0,3782	0,3646	0,3514	0,3384	0,3257	0,3134
7	0,5838	0,5689	0,5541	0,5393	0,5246	0,5100	0,4956	0,4812	0,4670	0,4530
8	0,7160	0,7027	0,6892	0,6757	0,6620	0,6482	0,6343	0,6204	0,6065	0,5926
9	0,8202	0,8097	0,7988	0,7877	0,7764	0,7649	0,7531	0,7411	0,7290	0,7166
10	0,8942	0,8867	0,8788	0,8707	0,8622	0,8535	0,8445	0,8352	0,8257	0,8159
11	0,9420	0,9371	0,9319	0,9265	0,9208	0,9148	0,9085	0,9020	0,8952	0,8881
12	0,9703	0,9673	0,9642	0,9609	0,9573	0,9536	0,9496	0,9454	0,9409	0,9362
13	0,9857	0,9841	0,9824	0,9805	0,9784	0,9762	0,9739	0,9714	0,9687	0,9658
14	0,9935	0,9927	0,9918	0,9908	0,9897	0,9886	0,9873	0,9859	0,9844	0,9827
15	0,9972	0,9969	0,9964	0,9959	0,9954	0,9948	0,9941	0,9934	0,9926	0,9918
16	0,9989	0,9987	0,9985	0,9983	0,9980	0,9978	0,9974	0,9971	0,9967	0,9963
17	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991	0,9989	0,9988	0,9986	0,9984
18	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995	0,9994	0,9993
19	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
21							1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN POISSON *(cont.)*

	λ									
k	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
1	0,0028	0,0025	0,0023	0,0021	0,0019	0,0018	0,0016	0,0015	0,0014	0,0012
2	0,0127	0,0118	0,0109	0,0100	0,0093	0,0086	0,0079	0,0073	0,0068	0,0062
3	0,0396	0,0370	0,0346	0,0323	0,0301	0,0281	0,0262	0,0244	0,0228	0,0212
4	0,0941	0,0887	0,0837	0,0789	0,0744	0,0701	0,0660	0,0621	0,0584	0,0550
5	0,1823	0,1736	0,1653	0,1573	0,1496	0,1422	0,1352	0,1284	0,1219	0,1157
6	0,3013	0,2896	0,2781	0,2670	0,2562	0,2457	0,2355	0,2256	0,2160	0,2068
7	0,4391	0,4254	0,4119	0,3987	0,3856	0,3728	0,3602	0,3478	0,3357	0,3239
8	0,5786	0,5647	0,5508	0,5369	0,5231	0,5094	0,4958	0,4823	0,4689	0,4557
9	0,7041	0,6915	0,6788	0,6659	0,6530	0,6400	0,6269	0,6137	0,6006	0,5874
10	0,8058	0,7956	0,7850	0,7743	0,7634	0,7522	0,7409	0,7294	0,7178	0,7060
11	0,8807	0,8731	0,8652	0,8571	0,8487	0,8400	0,8311	0,8220	0,8126	0,8030
12	0,9313	0,9261	0,9207	0,9150	0,9091	0,9029	0,8965	0,8898	0,8829	0,8758
13	0,9628	0,9595	0,9561	0,9524	0,9486	0,9445	0,9403	0,9358	0,9311	0,9262
14	0,9810	0,9791	0,9771	0,9749	0,9726	0,9701	0,9675	0,9647	0,9617	0,9585
15	0,9908	0,9898	0,9887	0,9875	0,9862	0,9848	0,9832	0,9816	0,9798	0,9780
16	0,9958	0,9953	0,9947	0,9941	0,9934	0,9926	0,9918	0,9909	0,9899	0,9889
17	0,9982	0,9979	0,9977	0,9973	0,9970	0,9966	0,9962	0,9957	0,9952	0,9947
18	0,9992	0,9991	0,9990	0,9989	0,9987	0,9985	0,9983	0,9981	0,9978	0,9976
19	0,9997	0,9997	0,9996	0,9995	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991	0,9989
20	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996
21	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

	λ									
k	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
0	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000
1	0,0011	0,0010	0,0009	0,0009	0,0008	0,0007	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005
2	0,0058	0,0053	0,0049	0,0045	0,0042	0,0038	0,0035	0,0033	0,0030	0,0028
3	0,0198	0,0184	0,0172	0,0160	0,0149	0,0138	0,0129	0,0120	0,0111	0,0103
4	0,0517	0,0486	0,0456	0,0429	0,0403	0,0378	0,0355	0,0333	0,0312	0,0293
5	0,1098	0,1041	0,0987	0,0935	0,0885	0,0838	0,0793	0,0750	0,0710	0,0671
6	0,1978	0,1892	0,1808	0,1727	0,1650	0,1575	0,1502	0,1433	0,1366	0,1301
7	0,3123	0,3010	0,2900	0,2792	0,2687	0,2584	0,2485	0,2388	0,2294	0,2202
8	0,4426	0,4296	0,4168	0,4042	0,3918	0,3796	0,3676	0,3558	0,3442	0,3328
9	0,5742	0,5611	0,5480	0,5349	0,5218	0,5089	0,4960	0,4832	0,4705	0,4579
10	0,6941	0,6820	0,6699	0,6576	0,6453	0,6330	0,6205	0,6081	0,5956	0,5830
11	0,7932	0,7832	0,7730	0,7626	0,7520	0,7412	0,7303	0,7193	0,7081	0,6968
12	0,8684	0,8607	0,8529	0,8448	0,8364	0,8279	0,8191	0,8101	0,8009	0,7916
13	0,9210	0,9156	0,9100	0,9042	0,8981	0,8919	0,8853	0,8786	0,8716	0,8645
14	0,9552	0,9517	0,9480	0,9441	0,9400	0,9357	0,9312	0,9265	0,9216	0,9165
15	0,9760	0,9738	0,9715	0,9691	0,9665	0,9638	0,9609	0,9579	0,9546	0,9513
16	0,9878	0,9865	0,9852	0,9838	0,9823	0,9806	0,9789	0,9770	0,9751	0,9730
17	0,9941	0,9934	0,9927	0,9919	0,9911	0,9902	0,9892	0,9881	0,9870	0,9857
18	0,9973	0,9969	0,9966	0,9962	0,9957	0,9952	0,9947	0,9941	0,9935	0,9928
19	0,9988	0,9986	0,9985	0,9983	0,9980	0,9978	0,9975	0,9972	0,9969	0,9965
20	0,9995	0,9994	0,9993	0,9992	0,9991	0,9990	0,9989	0,9987	0,9986	0,9984
21	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997	0,9996	0,9996	0,9995	0,9995	0,9994	0,9993
22	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9998	0,9998	0,9997	0,9997
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
24					1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

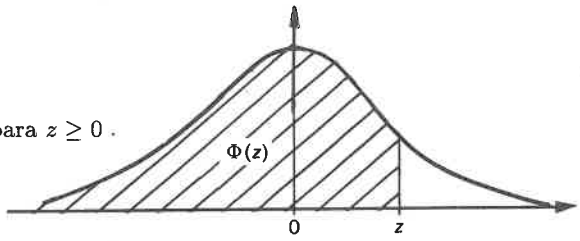
FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN POISSON *(cont.)*

	λ									
k	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0	17,0	18,0	19,0	20,0
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0012	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0049	0,0023	0,0011	0,0005	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0151	0,0076	0,0037	0,0018	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000
5	0,0375	0,0203	0,0107	0,0055	0,0028	0,0014	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001
6	0,0786	0,0458	0,0259	0,0142	0,0076	0,0040	0,0021	0,0010	0,0005	0,0003
7	0,1432	0,0895	0,0540	0,0316	0,0180	0,0100	0,0054	0,0029	0,0015	0,0008
8	0,2320	0,1550	0,0998	0,0621	0,0374	0,0220	0,0126	0,0071	0,0039	0,0021
9	0,3405	0,2424	0,1658	0,1094	0,0699	0,0433	0,0261	0,0154	0,0089	0,0050
10	0,4599	0,3472	0,2517	0,1757	0,1185	0,0774	0,0491	0,0304	0,0183	0,0108
11	0,5793	0,4616	0,3532	0,2600	0,1848	0,1270	0,0847	0,0549	0,0347	0,0214
12	0,6887	0,5760	0,4631	0,3585	0,2676	0,1931	0,1350	0,0917	0,0606	0,0390
13	0,7813	0,6815	0,5730	0,4644	0,3632	0,2745	0,2009	0,1426	0,0984	0,0661
14	0,8540	0,7720	0,6751	0,5704	0,4657	0,3675	0,2808	0,2081	0,1497	0,1049
15	0,9074	0,8444	0,7636	0,6694	0,5681	0,4667	0,3715	0,2867	0,2148	0,1565
16	0,9441	0,8987	0,8355	0,7559	0,6641	0,5660	0,4677	0,3751	0,2920	0,2211
17	0,9678	0,9370	0,8905	0,8272	0,7489	0,6593	0,5640	0,4686	0,3784	0,2970
18	0,9823	0,9626	0,9302	0,8826	0,8195	0,7423	0,6550	0,5622	0,4695	0,3814
19	0,9907	0,9787	0,9573	0,9235	0,8752	0,8122	0,7363	0,6509	0,5606	0,4703
20	0,9953	0,9884	0,9750	0,9521	0,9170	0,8682	0,8055	0,7307	0,6472	0,5591
21	0,9977	0,9939	0,9859	0,9712	0,9469	0,9108	0,8615	0,7991	0,7255	0,6437
22	0,9990	0,9970	0,9924	0,9833	0,9673	0,9418	0,9047	0,8551	0,7931	0,7206
23	0,9995	0,9985	0,9960	0,9907	0,9805	0,9633	0,9367	0,8989	0,8490	0,7875
24	0,9998	0,9993	0,9980	0,9950	0,9888	0,9777	0,9594	0,9317	0,8933	0,8432
25	0,9999	0,9997	0,9990	0,9974	0,9938	0,9869	0,9748	0,9554	0,9269	0,8878
26	1,0000	0,9999	0,9995	0,9987	0,9967	0,9925	0,9848	0,9718	0,9514	0,9221
27		0,9999	0,9998	0,9994	0,9983	0,9959	0,9912	0,9827	0,9687	0,9475
28		1,0000	0,9999	0,9997	0,9991	0,9978	0,9950	0,9897	0,9805	0,9657
29			1,0000	0,9999	0,9996	0,9989	0,9973	0,9941	0,9882	0,9782
30			1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9986	0,9967	0,9930	0,9865
31				1,0000	0,9999	0,9997	0,9993	0,9982	0,9960	0,9919
32					1,0000	0,9999	0,9996	0,9990	0,9978	0,9953
33						0,9999	0,9998	0,9995	0,9988	0,9973
34						1,0000	0,9999	0,9998	0,9994	0,9985
35							1,0000	0,9999	0,9997	0,9992
36								0,9999	0,9998	0,9996
37								1,0000	0,9999	0,9998
38									1,0000	0,9999

III. Función de distribución normal tipificada

La función tabulada es:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx \qquad \text{para } z \geq 0 .$$



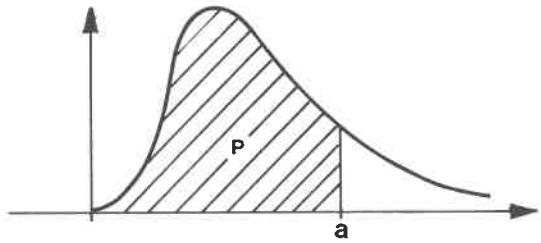
Si $z < 0$, $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ por ser la función de densidad simétrica respecto del cero.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,34448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	$0,9^20097$	$0,9^20358$	$0,9^20613$	$0,9^20863$	$0,9^21106$	$0,9^21344$	$0,9^21576$
2,4	$0,9^21802$	$0,9^22024$	$0,9^22240$	$0,9^22451$	$0,9^22656$	$0,9^22857$	$0,9^23053$	$0,9^23244$	$0,9^23431$	$0,9^23613$
2,5	$0,9^23790$	$0,9^23963$	$0,9^24132$	$0,9^24297$	$0,9^24457$	$0,9^24614$	$0,9^24766$	$0,9^24915$	$0,9^25060$	$0,9^25201$
2,6	$0,9^25339$	$0,9^25473$	$0,9^25604$	$0,9^25731$	$0,9^25855$	$0,9^25975$	$0,9^26093$	$0,9^26207$	$0,9^26319$	$0,9^26427$
2,7	$0,9^26533$	$0,9^26636$	$0,9^26736$	$0,9^26833$	$0,9^26928$	$0,9^27020$	$0,9^27110$	$0,9^27197$	$0,9^27282$	$0,9^27365$
2,8	$0,9^27445$	$0,9^27523$	$0,9^27599$	$0,9^27673$	$0,9^27744$	$0,9^27814$	$0,9^27882$	$0,9^27948$	$0,9^28012$	$0,9^28074$
2,9	$0,9^28134$	$0,9^28193$	$0,9^28250$	$0,9^28305$	$0,9^28359$	$0,9^28411$	$0,9^28462$	$0,9^28511$	$0,9^28559$	$0,9^28605$
3,0	$0,9^28650$	$0,9^28694$	$0,9^28736$	$0,9^28777$	$0,9^28817$	$0,9^28856$	$0,9^28893$	$0,9^28930$	$0,9^28965$	$0,9^28999$
3,1	$0,9^30324$	$0,9^30646$	$0,9^30957$	$0,9^31260$	$0,9^31553$	$0,9^31836$	$0,9^32112$	$0,9^32378$	$0,9^32636$	$0,9^32886$
3,2	$0,9^33129$	$0,9^33363$	$0,9^33590$	$0,9^33810$	$0,9^34024$	$0,9^34230$	$0,9^34429$	$0,9^34623$	$0,9^34810$	$0,9^34991$
3,3	$0,9^35166$	$0,9^35335$	$0,9^35499$	$0,9^35658$	$0,9^35811$	$0,9^35959$	$0,9^36103$	$0,9^36242$	$0,9^36376$	$0,9^36505$
3,4	$0,9^36631$	$0,9^36752$	$0,9^36869$	$0,9^36982$	$0,9^37091$	$0,9^37197$	$0,9^37299$	$0,9^37398$	$0,9^37493$	$0,9^37585$
3,5	$0,9^37674$	$0,9^37759$	$0,9^37842$	$0,9^37922$	$0,9^37999$	$0,9^38074$	$0,9^38146$	$0,9^38215$	$0,9^38282$	$0,9^38347$
3,6	$0,9^38409$	$0,9^38469$	$0,9^38527$	$0,9^38583$	$0,9^38637$	$0,9^38689$	$0,9^38739$	$0,9^38787$	$0,9^38834$	$0,9^38879$
3,7	$0,9^38922$	$0,9^38964$	$0,9^40039$	$0,9^40426$	$0,9^40799$	$0,9^41158$	$0,9^41504$	$0,9^41838$	$0,9^42159$	$0,9^42468$
3,8	$0,9^42765$	$0,9^43052$	$0,9^43327$	$0,9^43593$	$0,9^43848$	$0,9^44094$	$0,9^44331$	$0,9^44558$	$0,9^44777$	$0,9^44988$
3,9	$0,9^45190$	$0,9^45385$	$0,9^45573$	$0,9^45753$	$0,9^45926$	$0,9^46092$	$0,9^46253$	$0,9^46406$	$0,9^46554$	$0,9^46696$
4,0	$0,9^46833$	$0,9^46964$	$0,9^47090$	$0,9^47211$	$0,9^47327$	$0,9^47439$	$0,9^47546$	$0,9^47649$	$0,9^47748$	$0,9^47843$

IV. Función de distribución χ^2 de Pearson

La tabla proporciona el valor a, tal que $p[X \leq a] = p$, donde X es una variable con distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad ($n \leq 100$).

Para $n > 100$, la distribución de $\sqrt{2 \cdot X}$ se aproxima a una $N(\sqrt{2n-1}, 1)$.



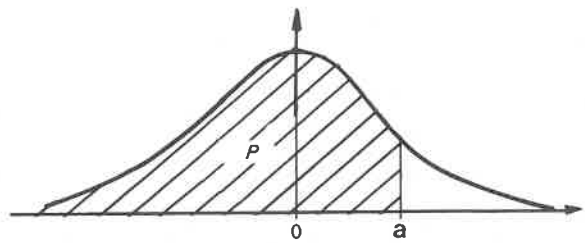
n \ p	0,995	0,99	0,975	0,95	0,90	0,75	0,50	0,25	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
1	7,88	6,63	5,02	3,84	2,71	1,32	0,455	0,102	0,0158	0,0039	0,0010	0,0002	0,0000
2	10,6	9,21	7,38	5,99	4,61	2,77	1,39	0,575	0,211	0,103	0,0506	0,0201	0,0100
3	12,8	11,3	9,35	7,81	6,25	4,11	2,37	1,21	0,584	0,352	0,216	0,115	0,072
4	14,9	13,3	11,1	9,49	7,78	5,39	3,36	1,92	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	16,7	15,1	12,8	11,1	9,24	6,63	4,35	2,67	1,61	1,15	0,831	0,554	0,412
6	18,5	16,8	14,4	12,6	10,6	7,84	5,35	3,45	2,20	1,64	1,24	0,872	0,676
7	20,3	18,5	16,0	14,1	12,0	9,04	6,35	4,25	2,83	2,17	1,69	1,24	0,989
8	22,0	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,34	5,07	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	23,6	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,34	5,90	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	25,2	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,34	6,74	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	26,8	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	7,58	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	28,3	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	8,44	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	29,8	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	9,30	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	31,3	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	10,2	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	32,8	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	11,0	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	34,3	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	11,9	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	35,7	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	12,8	10,1	8,67	7,56	6,41	5,70
18	37,2	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	13,7	10,9	9,39	8,23	7,01	6,26
19	38,6	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	14,6	11,7	10,1	8,91	7,63	6,84
20	40,0	37,6	34,2	31,4	28,4	23,8	19,3	15,5	12,4	10,9	9,59	8,26	7,43
21	41,4	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20,3	16,3	13,2	11,6	10,3	8,90	8,03
22	42,8	40,3	36,8	33,9	30,8	26,0	21,3	17,2	14,0	12,3	11,0	9,54	8,64
23	44,2	41,6	38,1	35,2	32,0	27,1	22,3	18,1	14,8	13,1	11,7	10,2	9,26
24	45,6	43,0	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	19,0	15,7	13,8	12,4	10,9	9,89
25	46,9	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24,3	19,9	16,5	14,6	13,1	11,5	10,5
26	48,3	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	20,8	17,3	15,4	13,8	12,2	11,2
27	49,6	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	21,7	18,1	16,2	14,6	12,9	11,8
28	51,0	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	22,7	18,9	16,9	15,3	13,6	12,5
29	52,3	49,6	45,7	42,6	39,1	33,7	28,3	33,6	19,8	17,7	16,0	14,3	13,1
30	53,7	50,9	47,0	43,8	40,3	34,8	29,3	24,5	20,6	18,5	16,8	15,0	13,8
40	66,8	63,7	59,3	55,8	51,8	45,6	39,3	33,7	29,1	26,5	24,4	22,2	20,7
50	79,5	76,2	71,4	67,5	63,2	56,3	49,3	42,9	37,7	34,8	32,4	29,7	28,0
60	92,0	88,4	83,3	79,1	74,4	67.0	59,3	52,3	46,5	43,2	40,5	37,5	35,5
70	104,2	100,4	95,0	90,5	85,5	77,6	69,3	61,7	55,3	51,7	48,8	45,4	43,3
80	116,3	112,3	106,6	101,9	96,6	88,1	79,3	71,1	64,3	60,4	57,2	53,5	51,2
90	128,3	124,1	118,1	113,1	107,6	98,6	89,3	80,6	73,3	69,1	65,6	61,8	59,2
100	140,2	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,3	90,1	82,4	77,9	74,2	70,1	67,3

V. Función de distribución t de Student

La tabla proporciona el valor a, tal que $p[X \leq a] = p$, para $p > 0.5$, donde X es una variable con distribución t de Student con n grados de libertad ($n = 1, \ldots, 30, \infty$).

Para $p \leq 0.5$, $p[X \leq a] = 1 - p[X \leq -a]$, al ser la función de densidad simétrica respecto del cero.

Para valores grandes de n ($n > 30$), la distribución t se aproxima a la normal tipificada.



n \ p	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,00	1,38	1,96	3,08	6,31	12,7	31,8	63,7	637
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,06	1,39	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,25	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,19	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,16	1,48	2,01	2,57	3,36	4,03	6,86
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,13	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,12	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	5,40
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,11	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,09	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,09	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,08	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,08	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,08	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,07	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,07	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,07	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,96
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,07	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,07	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,06	1,32	1,72	2,09	2,53	2,84	3,85
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,06	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,06	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,06	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,06	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,74
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,06	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,72
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,06	1,32	1,70	2,06	2,48	2,78	3,71
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,06	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,06	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,05	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,66
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,05	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,04	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	3,29

VI. Función de distribución F de Snedecor

Las tablas proporcionan el valor a, tal que $p[X \leq a] = p$, para $p = 0.90$, $p = 0.95$ y $p = 0.99$, donde X es una variable con distribución F de Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad $(n_1, n_2 = 1, \ldots, 120, \infty)$.

De la génesis de la distribución F de Snedecor se deduce:

$$p\left[F_{n_1,n_2} \leq a\right] = 1 - p\left[F_{n_2,n_1} \leq \frac{1}{a}\right]$$

$$\boxed{p[X \leq a] = 0.90}$$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39,864	49,500	53,593	55,833	57,241	58,204	58,906	59,439	59,858	60,195	60,705	61,220	61,740	62,002	62,265	62,529	62,794	63,061	63,328
2	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805	9,3916	9,4081	9,4247	9,4413	9,4496	9,4579	9,4663	9,4746	9,4829	9,4913
3	5,5383	5,4624	5,3908	5,3427	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400	5,2304	5,2156	5,2003	5,1845	5,1764	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
4	4,5448	4,3246	4,1908	4,1073	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357	3,9199	3,8955	3,8689	3,8443	3,8310	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7607
5	4,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163	3,2974	3,2682	3,2380	3,2067	3,1905	3,1741	3,1573	3,1402	3,1228	3,1050
6	3,7760	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0540	3,0145	2,9830	2,9577	2,9369	2,9047	2,8712	2,8363	2,8183	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
7	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	2,7849	2,7516	2,7247	2,7025	2,6681	2,6322	2,5947	2,5753	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
8	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7265	2,6683	2,6241	2,5893	2,5612	2,5380	2,5020	2,4642	2,4246	2,4041	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
9	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403	2,4163	2,3789	2,3396	2,2983	2,2768	2,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
10	3,2850	2,9245	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3772	2,3473	2,3226	2,2841	2,2435	2,2007	2,1784	2,1554	2,1317	2,1072	2,0818	2,0554
11	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735	2,2482	2,2087	2,1671	2,1230	2,1000	2,0762	2,0516	2,0261	1,9997	1,9721
12	3,1765	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,2135	2,1878	2,1474	2,1049	2,0597	2,0360	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
13	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,2830	2,2341	2,1953	2,1638	2,1376	2,0966	2,0532	2,0070	1,9827	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
14	3,1022	2,7265	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220	2,0954	2,0537	2,0095	1,9625	1,9377	1,9119	1,8852	1,8572	1,8280	1,7973
15	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862	2,0593	2,0171	1,9722	1,9243	1,8990	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7551
16	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,1783	2,1280	2,0880	2,0553	2,0281	1,9854	1,9399	1,8913	1,8656	1,8388	1,8108	1,7816	1,7507	1,7182
17	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2183	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284	2,0009	1,9577	1,9117	1,8624	1,8362	1,8090	1,7805	1,7506	1,7191	1,6856
18	3,0070	2,6239	2,4160	2,5858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047	1,9770	1,9333	1,8868	1,8368	1,8103	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
19	2,9899	2,6056	2,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836	1,9557	1,9117	1,8647	1,8142	1,7667	1,7382	1,7083	1,6988	1,6659	1,6308
20	2,9747	2,5893	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,9649	1,9367	1,8924	1,8449	1,7938	1,7873	1,7592	1,7298	1,6768	1,6433	1,6074
21	2,9609	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480	1,9197	1,8750	1,8272	1,7756	1,7481	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5862
22	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327	1,9043	1,8593	1,8111	1,7590	1,7312	1,7021	1,6714	1,6389	1,6042	1,5668
23	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189	1,8903	1,8450	1,7964	1,7439	1,7159	1,6864	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
24	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9063	1,8775	1,8319	1,7831	1,7302	1,7019	1,6721	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
25	2,9177	2,5283	2,3170	2,1843	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947	1,8658	1,8200	1,7708	1,7175	1,6890	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
26	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9610	1,9188	1,8841	1,8550	1,8090	1,7596	1,7059	1,6771	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
27	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743	1,8451	1,7989	1,7492	1,6951	1,6662	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
28	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9959	1,9427	1,9001	1,8652	1,8359	1,7895	1,7395	1,6852	1,6560	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
29	2,8871	2,4955	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8560	1,8274	1,7808	1,7306	1,6759	1,6465	1,6155	1,5825	1,5472	1,5090	1,4670
30	2,8807	2,4887	2,2761	2,1422	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8498	1,8195	1,7727	1,7223	1,6673	1,6377	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
40	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929	1,7627	1,7146	1,6624	1,6052	1,5741	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
60	2,7914	2,3932	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380	1,7070	1,6574	1,6034	1,5435	1,5107	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
120	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843	1,6524	1,6012	1,5450	1,4821	1,4472	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
∞	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315	1,5987	1,5458	1,4871	1,4206	1,3832	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,0000

PERCENTILES DE ORDEN 0,95 DE LA DISTRIBUCIÓN F con n_1 grados de libertad en el numerador y n_2 en el denominador

$$p[X \leq a] = 0.95$$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8868	8,8452	8,8123	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6385	8,6166	8,5944	8,5720	8,5494	8,5265
4	7,7086	6,9443	6,5914	6,3883	6,2560	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7744	5,7459	5,7170	5,6878	5,6581	5,6281
5	6,6079	5,7861	5,4095	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,5272	4,4957	4,4638	4,4314	4,3984	4,3650
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2066	4,1468	4,0990	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8415	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6688
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767	3,6365	3,5747	3,5108	3,4445	3,4105	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806	3,5005	3,4281	3,3881	3,3472	3,2840	3,2184	3,1503	3,1152	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	5,1174	4,2565	3,8626	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,9005	2,8637	2,8259	2,7872	2,7475	2,7067
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204	2,9782	2,9130	2,8450	2,7740	2,7372	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,6090	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,5055	2,4663	2,4259	2,3842	2,3410	2,2962
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,4202	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	4,6001	3,7389	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458	2,6021	2,5342	2,4630	2,3879	2,3487	2,3082	2,2664	,2230	2,1778	2,1307
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876	2,5437	2,4753	2,4035	2,3275	2,2878	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,2354	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	4,4513	3,5915	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1898	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1497	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	4,3808	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,1141	2,0712	2,0264	1,9796	1,9302	1,8780
20	4,3513	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5900	2,5140	2,4471	2,3928	2,3479	2,2776	2,2033	2,1242	2,0825	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3661	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0540	2,0102	1,9645	1,9165	1,8657	1,8117
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	2,0283	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201	2,2747	2,2036	2,1882	2,0476	2,0050	1,9605	1,9139	1,8649	1,8128	1,7570
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9838	1,9390	1,8920	1,8424	1,7897	1,7331
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821	2,3365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9643	1,9192	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	4,2252	3,3690	2,9751	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9464	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,9299	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,9147	1,8687	1,8203	1,7689	1,7138	1,6541
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2782	2,2229	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,9005	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8874	1,8409	1,7918	1,7396	1,6835	1,6223
40	4,0848	3,2317	2,8387	2,6060	2,4495	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,6929	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	4,0012	3,1504	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540	2,1665	2,0970	2,0401	1,9926	1,9174	1,8364	1,7480	1,7001	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2900	2,1750	2,0867	2,0164	1,9588	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,6084	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	2,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,5173	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

PERCENTILES DE ORDEN 0,99 DE LA DISTRIBUCIÓN F con n_1 grados de libertad en el numerador y n_2 en el denominador

$$p[X \leq a] = 0.99$$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052,2	4999,5	5403,3	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,6	6022,5	6055,8	6106,3	6157,3	6708,7	6234,6	6260,7	6286,8	6313,0	6339,4	6366,0
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,332	99,356	99,374	99,388	99,399	99,416	99,432	99,449	99,458	99,466	99,474	99,483	99,491	99,501
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345	27,229	27,052	26,872	26,690	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659	14,546	14,374	14,198	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	15,558	13,463
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158	10,051	9,8883	9,7222	9,5527	9,4665	9,3793	9,2912	9,2020	9,1118	9,0204
6	13,745	10,925	9,7795	9,1483	8,7459	8,4661	8,2600	8,1016	7,9761	7,8741	7,7183	7,5590	7,3958	7,3127	7,2285	7,1432	7,0568	6,9690	6,8801
7	12,246	9,5466	8,4513	7,8467	7,4604	7,1914	6,9928	6,8401	6,7188	6,6201	6,4691	6,3143	6,1554	6,0743	5,9921	5,9084	5,8236	5,7372	5,6495
8	11,259	8,6491	7,5910	7,0060	6,6318	6,3707	6,1776	6,0289	5,9106	5,8143	5,6668	5,5151	5,3591	5,2793	5,1980	5,1156	5,0316	4,9460	4,8588
9	10,561	8,0215	6,9919	6,4221	6,0569	5,8018	5,6129	5,4071	5,3511	5,2565	5,1114	4,9621	4,8080	4,7290	4,6486	4,5667	4,4831	4,3978	4,3105
10	10,044	7,5194	6,5523	5,9943	5,6363	5,3858	5,2001	5,0567	4,9424	4,0492	4,7059	4,5582	4,4054	4,3269	4,2469	4,1653	4,0819	3,9965	3,9090
11	9,6400	7,2057	6,2167	5,6683	5,3160	5,0692	4,8861	4,7445	4,6315	4,5393	4,3974	4,2509	4,0990	4,0209	3,9411	3,8596	3,7761	3,6904	3,6025
12	9,3302	6,9266	5,9526	5,4119	5,0643	4,8206	4,6395	4,4994	4,3875	4,2961	4,1553	4,0096	3,8584	3,7805	3,7008	3,6192	3,5355	3,4494	3,3608
13	9,0708	6,7010	5,7394	5,2053	4,8616	4,6204	4,4410	4,3021	4,1911	4,1003	3,9603	3,8154	3,6646	3,5868	3,5070	3,4253	3,3413	3,2548	3,1654
14	8,8616	6,5149	5,5639	5,0354	4,6950	4,4558	4,2779	4,1399	4,0297	3,9394	3,8001	3,6557	3,5052	3,4274	3,3476	3,2656	3,1813	3,0942	3,0040
15	8,6831	6,3589	5,4170	4,8932	4,5556	4,3183	4,1415	4,0045	3,8948	3,8049	3,6662	3,5222	3,3719	3,2940	3,2141	3,1319	3,0471	2,9595	2,8684
16	8,5310	6,2262	5,2922	4,7726	4,4374	4,2016	4,2059	3,8896	3,7804	3,6909	3,5527	3,4089	3,2588	3,1808	3,1007	3,0182	2,9330	2,8447	2,7528
17	8,3997	6,1121	5,1850	4,6690	4,3359	4,1015	3,9267	3,7910	3,6822	3,5931	3,4552	3,3117	3,1615	3,0835	3,0032	2,9205	2,8348	2,7459	2,6530
18	8,2854	6,0129	5,0919	4,5790	4,2479	4,0146	3,8406	3,7054	3,5971	3,5082	3,3706	3,2273	3,0771	2,9990	2,9185	2,8354	2,7493	2,6597	2,5660
19	8,1850	5,9259	5,0103	4,5003	4,1704	3,9386	3,7653	3,6305	3,5225	3,4338	3,2965	3,1533	3,0031	2,9249	2,8442	2,7608	2,6742	2,5839	2,4893
20	8,0960	5,8489	5,9382	4,4307	4,1027	3,8714	3,6987	3,5644	3,4567	3,3682	3,2311	3,0880	2,9377	2,8594	2,7785	2,6947	2,6077	2,5168	2,4212
21	8,0166	5,7804	4,8740	4,3688	4,0421	3,8117	3,6396	3,5056	3,3981	3,3098	3,1729	3,0299	2,8796	2,8011	2,7200	2,6359	2,5484	2,4568	2,3603
22	7,9454	5,7190	4,8166	4,3134	3,9880	3,7583	3,5867	3,4530	3,3458	3,2576	3,1209	2,9780	2,8274	2,7488	2,6675	2,5831	2,4951	2,4029	2,3055
23	7,8811	5,6637	4,7649	4,2635	3,9392	3,7102	3,5390	3,4057	3,2986	3,2106	3,0740	2,9311	2,7805	2,7017	2,6202	2,5355	2,4471	2,3542	2,2559
24	7,8229	5,6136	4,7181	4,2184	3,8951	3,6667	3,4959	3,3679	3,2560	3,1681	3,0316	2,8887	2,7380	2,6591	2,5773	2,4923	2,4035	2,3099	2,2107
25	7,7698	5,5680	4,6755	4,1774	3,8550	3,6272	3,4568	3,3239	3,2172	3,1294	2,9931	2,8502	2,6993	2,6203	2,5383	2,4530	2,3637	2,2695	2,1694
26	7,7213	5,5263	4,6166	4,1400	3,8183	3,5911	3,4210	3,2884	3,1818	3,0941	2,9579	2,8150	2,6640	2,5848	2,5026	2,4170	2,3273	2,2325	2,1315
27	7,6767	5,4881	4,0009	4,1056	3,7848	3,5580	3,3882	3,2558	3,1494	3,0618	2,9256	2,7827	2,6316	2,5522	2,4699	2,3840	2,2938	2,1984	2,0965
28	7,6356	5,4529	4,5681	4,0740	3,7539	3,5276	3,3581	3,2259	3,1195	3,0320	2,8959	2,7530	2,6017	2,5223	2,4397	2,3535	2,2629	2,1670	2,0642
29	7,5976	5,4205	4,5378	4,0449	3,7254	3,4995	3,3302	3,1982	3,0920	3,0045	2,8685	2,7256	2,5742	2,4946	2,4118	2,3253	2,2344	2,1378	2,0342
30	7,5625	5,3904	4,5097	4,0179	3,6990	3,4735	3,3045	3,1726	3,0665	2,9791	2,8431	2,7002	2,5487	2,4689	2,3860	2,2992	2,2079	2,1107	2,0062
40	7,3141	5,1785	4,3126	3,8283	3,5138	3,2910	3,1238	2,9930	2,8876	2,8005	2,6648	2,5216	2,3689	2,2880	2,2034	2,1162	2,0194	1,9172	1,8047
60	7,0771	4,9774	4,1259	3,6491	3,3389	3,1187	2,9530	2,8233	2,7185	2,6318	2,4961	2,3523	2,1978	2,1154	2,0285	1,9360	1,8363	1,7263	1,6006
120	6,8510	4,7865	3,9493	3,4796	3,1735	2,9559	2,7918	2,6629	2,5586	2,4721	2,3363	2,1915	2,0346	1,9500	1,8600	1,7628	1,0557	1,5530	1,3805
∞	6,6349	4,6052	3,7816	3,3192	3,0173	2,8020	2,6393	2,5113	2,4073	2,3209	2,1848	2,0385	1,8783	1,7908	1,6964	1,5923	1,4730	1,3246	1,0000

VII. Tabla de números aleatorios

La tabla proporciona 2500 dígitos aleatorios, ordenados en bloques de cinco.

49914	68221	56088	06112	95481	30094	68493	88796	94771	89418
62045	40681	15941	05962	44378	64349	29782	33287	27400	42915
42534	31925	94158	90197	62874	53659	33433	48610	14698	54761
76126	41049	43363	52461	00552	93352	58497	16347	87145	73668
80434	73037	69008	36801	25520	14161	32300	04187	80668	07499
81301	39731	53857	19690	39998	49829	12399	70867	44498	17385
54521	42350	82908	51212	70208	39891	64871	67448	42988	32600
82530	22869	87826	06678	36873	61198	87748	07531	29592	39612
81338	64309	45798	42954	95565	02789	83017	82936	67117	17709
58264	60374	32610	17879	96900	68029	06993	84288	35401	56317
77023	46829	21332	77383	15547	29332	77698	89878	20489	71800
29750	59902	78110	59018	87548	10225	15774	70778	56086	08117
08288	38411	69886	64918	29055	87607	37452	38174	31431	46173
93908	94810	22057	94240	89918	16561	92716	66461	22337	64718
06341	25883	42574	80202	57287	95120	69332	19036	43326	98697
23240	94741	55622	79479	34606	51079	09476	10695	49618	63037
96370	19171	40441	05002	33165	28693	45027	73791	23047	32976
97050	16194	61095	26533	81738	77032	60551	31605	95212	81078
40833	12169	10712	78345	48236	45086	61654	94929	69169	70561
95676	13582	25664	60838	88071	50052	63188	50346	65618	17517
28030	14185	13226	99566	45483	10079	22945	23903	11695	10694
60202	32586	87466	83357	95516	31258	66309	40615	30572	60842
46530	48755	02308	79508	53422	50805	08896	06963	93922	99423
53151	95839	01745	46462	81463	28669	60179	17880	75875	34562
80272	64398	88249	06792	98424	66842	49129	98939	34173	49883
87024	74221	69721	44518	58804	04860	18127	16855	61558	15430
04852	03436	72753	99836	37513	91341	53517	92094	54386	44563
33592	45845	52015	72030	23071	92933	84219	39455	57792	14216
68121	53688	56812	34869	28573	51079	94677	23993	88241	97735
25062	10428	43930	69033	73395	83469	25990	12971	73728	03856
78183	44396	11064	92153	96293	00825	21079	78337	19739	13684
70209	23316	32828	00927	61841	64754	91125	01206	06691	50868
94342	91040	94035	02650	36284	91162	07950	36178	42536	49869
92503	29854	24116	61149	49266	82303	54924	58251	23928	20703
71646	57503	82416	22657	72359	30085	13037	39608	77439	49318
51809	70780	41544	27828	84321	07714	25865	97896	01924	62028
88504	21620	07292	71021	80929	45042	08703	45894	24521	49942
33186	49273	87542	41086	29615	81101	43707	87031	36101	15137
40068	35043	05280	62921	30122	65119	40512	26855	40842	83244
76401	68461	20711	12007	19209	28259	49820	76415	51534	63574
47014	93729	74235	47808	52473	03145	92563	05837	70023	33169
67147	48017	90741	53647	55007	36607	29360	83163	79024	26155
86987	62924	93157	70947	07336	49541	81386	26968	38311	99885
58973	47026	78574	08804	22960	32850	67944	92303	61216	72948
71635	86749	40369	94639	40731	54012	03972	98581	45604	34885
60971	54212	32596	03052	84150	36798	62635	26210	95685	87089
06599	60910	66315	96690	19039	39878	44688	65146	02482	73130
89960	27162	66264	71024	18708	77974	40473	87155	35834	03114
03930	56898	61900	44036	90012	17673	54167	82396	39468	49566
31338	28729	02095	07429	35718	86882	37513	51560	08872	33717

ÍNDICE

Prefacio IX

1. **Concepto de probabilidad** 1
   Apéndice: nociones de Combinatoria 3
   Ejercicios propuestos 5
   Ejercicios propuestos de Combinatoria 8
   Resolución de los ejercicios 9
   Resolución de los ejercicios de Combinatoria 28

2. **Probabilidad condicionada e independencia estadística** 33
   Ejercicios propuestos 35
   Resolución de los ejercicios 41

3. **Variables aleatorias unidimensionales** 75
   Ejercicios propuestos 79
   Resolución de los ejercicios 87

4. **Variables aleatorias n-dimensionales** 129
   Ejercicios propuestos 136
   Resolución de los ejercicios 149

5. **Características de una variable aleatoria unidimensional** . . . 215
   Ejercicios propuestos 218
   Resolución de los ejercicios 226

6. **Características de una variable aleatoria n-dimensional** . . . 269
   Ejercicios propuestos 277
   Resolución de los ejercicios 285

7. **Funciones características** 337
Ejercicios propuestos 340
Resolución de los ejercicios 344

8. **Modelos de distribuciones discretas** 365
Ejercicios propuestos 371
Resolución de los ejercicios 377

9. **Modelos de distribuciones continuas univariantes** 405
Ejercicios propuestos 410
Resolución de los ejercicios 416

10. **Distribuciones relacionadas con la normal** 451
Ejercicios propuestos 453
Resolución de los ejercicios 455

11. **Distribución normal n-dimensional** 471
Ejercicios propuestos 474
Resolución de los ejercicios 479

12. **Leyes de los grandes números y teorema del límite central** . 505
Ejercicios propuestos 510
Resolución de los ejercicios 514

Anexo. Tablas estadísticas 539

Impreso en el mes de septiembre de 1995
en Talleres Gráficos DUPLEX, S. A.
Ciudad de Asunción, 26
08030 Barcelona